PROBLEMA 9.5

Ciclo di Carnot con gas di fotoni ⋆⋆

La radiazione elettromagnetica può essere descritta dal punto di vista termodinamico come un gas con energia interna

$$U = bVT^4 \tag{9.5.1}$$

e pressione

$$P = \frac{1}{3}bT^4 \tag{9.5.2}$$

dove b è una costante. Rappresentare un ciclo di Carnot di questo sistema nel piano $P - V$ e calcolarne esplicitamente il rendimento in termini delle sole temperature della sorgente calda e fredda.

Soluzione

Dall'equazione $P = \frac{1}{3}bT^4$ segue che una trasformazione isoterma è anche isobara. Per una trasformazione adiabatica si ha invece

$$dQ = dU + PdV = 4bVT^3dT + bT^4dV + \frac{1}{3}bT^4dV \tag{9.5.3}$$

$$= \frac{4}{3}bT^4dV + 4bVT^3dT = 0 \tag{9.5.4}$$

ossia

$$\frac{1}{3}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0 \tag{9.5.5}$$

ed integrando

$$V^{1/3}T = \text{costante} \tag{9.5.6}$$

che si può riscrivere come una relatione tra P e V:

$$PV^{4/3} = \text{costante}\,. \tag{9.5.7}$$

Un ciclo di Carnot si rappresenta dunque nel piano $P - V$ come in Figura 9.3.

Calcoliamo adesso il rendimento. Come conseguenza del primo principio, il lavoro fatto nelle trasformazioni adiabatiche è uguale alla variazione dell'energia interna cambiata di segno:

$$L_{B\to C} = b\left(V_B T_B^4 - V_C T_C^4\right) = b\left(V_B T_1^4 - V_C T_2^4\right) \tag{9.5.8}$$

$$L_{D\to A} = b\left(V_D T_2^4 - V_A T_1^4\right) \tag{9.5.9}$$

mentre per le trasformazioni isoterme si ha semplicemente

$$L_{A\to B} = P_A\left(V_B - V_A\right) = \frac{1}{3}bT_1^4\left(V_B - V_A\right) \tag{9.5.10}$$

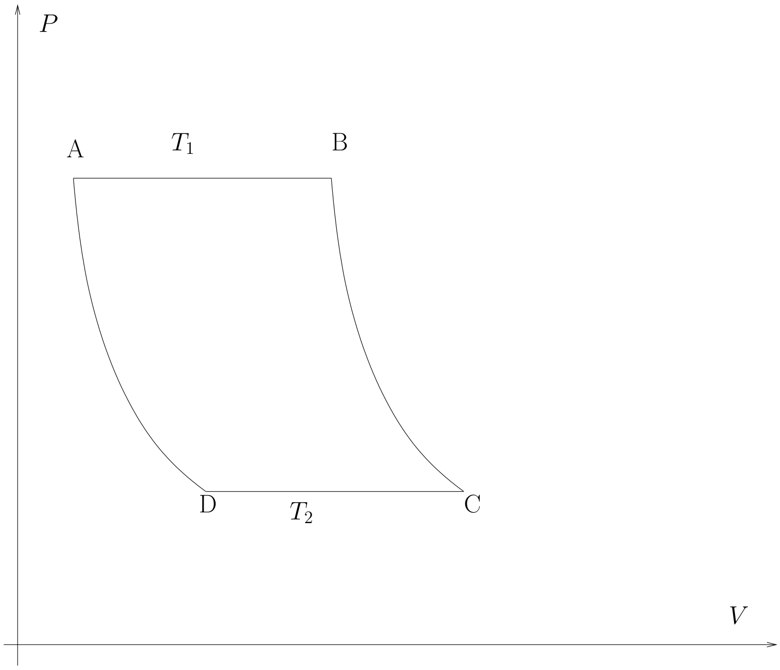

Figura 9.3.: Il ciclo di Carnot per il gas di fotoni, rappresentato nel piano $P - V$.

$$L_{C\to D} = P_C\left(V_D - V_C\right) = \frac{1}{3}bT_2^4\left(V_D - V_C\right) . \tag{9.5.11}$$

Calcoliamo infine il calore assorbito dalla sorgente calda. Diversamente dal caso del gas perfetto, questo non è uguale al lavoro fatto, poichè l'energia interna dipende dal volume. Per una isoterma abbiamo

$$dQ = \frac{4}{3}bT^4 dV \tag{9.5.12}$$

e quindi

$$Q_{A\to B} = \frac{4}{3}bT_1^4\left(V_B - V_A\right) . \tag{9.5.13}$$

Calcoliamo infine il rendimento:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\frac{1}{3}bT_1^4\left(V_B - V_A\right) + b\left(V_B T_1^4 - V_C T_2^4\right) + \frac{1}{3}bT_2^4\left(V_D - V_C\right) + b\left(V_D T_2^4 - V_A T_1^4\right)}{\frac{4}{3}bT_1^4\left(V_B - V_A\right)} \\
&= \frac{T_1^4\left(V_B - V_A\right) + T_2^4\left(V_D - V_C\right)}{T_1^4\left(V_B - V_A\right)} \\
&= 1 + \frac{T_2^4\left(V_D - V_C\right)}{T_1^4\left(V_B - V_A\right)}
\end{aligned}$$

ed utilizzando

$$V_D T_2^3 = V_A T_1^3, \qquad V_C T_2^3 = V_B T_1^3 \tag{9.5.14}$$

conseguenza dell'Equazione (9.5.6) otteniamo

$$\eta = 1 + \frac{T_2\left(V_A T_1^3 - V_B T_1^3\right)}{T_1^4\left(V_B - V_A\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad (9.5.15)$$