SOLUZIONI ESAME DEL 20/6/2012 1

1) $R = \rho \frac{L}{\pi r^2}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r^2}{r^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100}\right)^2 + 4\left(\frac{0,1}{1,0}\right)^2} = 0,20006$$

$$R = 1,69 \cdot 10^{-8} \frac{100}{\pi \cdot (0,001)^2} \Omega = 0,5379 \Omega$$

$$\rightarrow \Delta R = 0,1076 \simeq 0,11 \Omega$$

$$\boxed{R = (0,54 \pm 0,11) \Omega}$$

2)

$52,0052 \pm 0,0012$	$(5,20052 \pm 0,00012) \cdot 10$
5278 ± 24	$(5,278 \pm 0,024) \cdot 10^3$
$325,22 \pm 0,07$	$(3,2522 \pm 0,0007) \cdot 10^2$
26590 ± 250	$(2,659 \pm 0,025) \cdot 10^4$
720 ± 50	$(7,2 \pm 0,5) \cdot 10^2$
$85,66 \pm 0,10$	$(8,566 \pm 0,010) \cdot 10$

3) $p(x) = a^2 x + \frac{a}{x^2}$ $\quad 1 \leq x \leq 2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$$ assioma della completezza

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(a^2 x + \frac{a}{x^2}\right) dx = 1$$

$$\int_1^2 \left(a^2 x + \frac{a}{x^2}\right) dx = a^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - a^2 \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 =$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{a}{2} = 1$$

$$3a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} \begin{cases} -1 & \text{va scartata perché } a>0 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

4) $p(x) = \frac{4}{9}x + \frac{2}{3x^2} \qquad 1 \leq x \leq 2$

$$\mu = \int_1^2 x \cdot \left(\frac{4}{9}x + \frac{2}{3x^2}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3x}\right) dx =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 + \frac{2}{3}\left[\ln x\right]_1^2 = \frac{4}{27} \cdot (8-1) + \frac{2}{3}\ln 2 =$$

$$= \frac{28}{27} + \frac{2}{3}\ln 2$$

$$\boxed{\mu = \frac{2}{3}\left(\ln 2 + \frac{14}{9}\right) \simeq 1{,}499}$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_1^2 x^2 \left(\frac{4}{9}x + \frac{2}{3x^2}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{\cancel{4}}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{4}}\left[x^4\right]_1^2 + \frac{2}{3}\left[x\right]_1^2 = \frac{1}{9}(16-1) + \frac{2}{3} = \frac{15}{9} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{7}{3}$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{7}{3} - \mu^2 \rightarrow \boxed{\begin{gathered}\sigma^2 = \frac{7}{3} - \frac{4}{9}\left(\ln 2 + \frac{14}{9}\right)^2 \\ \sigma^2 \simeq 0{,}086\end{gathered}}$$

5) $p = 0,9$

$N = 8$ binomiale $\quad P(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$

$P_a = P(K \leq 5) = 1 - P(8) - P(7) - P(6)$

$P(8) = (0,9)^8 = 0,4305$

$P(7) = \frac{8!}{7!\,1!} (0,9)^7 \cdot (0,1)^1 = 0,3826$

$P(6) = \frac{8!}{6!\,2!} (0,9)^6 \cdot (0,1)^2 = 0,1488$

$P_a = 1 - 0,4305 - 0,3826 - 0,1488$

$\boxed{P_a = 0,0381 \quad P_a \simeq 3,8\%}$

$P_b = P(K \geq 5) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8)$

$P(5) = \frac{8!}{5!\,3!} (0,9)^5 \cdot (0,1)^3 = 0,0331$

$P_b = 0,0331 + 0,1488 + 0,3826 + 0,4305$

$\boxed{P_b = 0,995 \quad P_b \simeq 99,5\%}$

$P_c = P(5) = 0,0331$

$\boxed{P_c = 0,0331 \quad P_c \simeq 3,3\%}$

6) Prob. che un pezzo a caso sia difettoso:

$p = \frac{500}{10000} = \frac{5}{100} = 0,05$

$N = 100$ binomiale

$K = 10 \qquad P = P(K = 10)$

Ma poiché $N \gg 1$, $p \ll 1$

$\mu = Np = 5$

un'ottima è approssimazione poissoniana della binomiale con $\mu = 5$

$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$

$$P = P(k=10) = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5} = 2{,}691 \cdot e^{-5} = 0{,}018$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P = 0{,}018 \\ P = 1{,}8\% \end{array}}$$

7) $p = 30\% \rightarrow p = 0{,}3$ che un visitatore faccia un acquisto

$N = 30$ binomiale.

$P = P(K > 10)$

Ma poiché $N \gg 1$ e $\mu = Np = 30 \cdot 0{,}3 = 9$

$\mu > 5 \Rightarrow$ Approssimazione gaussiana della binomiale

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con $\mu = 9$

$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} = 2{,}5$

$$P = \int_{10{,}5}^{+\infty} p(x)\,dx =$$

$g(z)$ = gaussiana standard

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{10{,}5 - 9}{2{,}5} = 0{,}6$$

$$= \int_{z_1}^{+\infty} g(z)\,dz = \int_{0{,}6}^{+\infty} g(z)\,dz =$$

$$= 0{,}5 - \int_{0}^{0{,}6} g(z)\,dz = 0{,}5 - 0{,}2257 = 0{,}274$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P \simeq 0{,}274 \\ P \simeq 27{,}4\% \end{array}}$$

8) $m = \frac{\sum x_i}{N}$ $N = 6$ $m = \frac{39{,}4}{6} = 6{,}57$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{N-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{0{,}1849 + 0{,}0169 + 0{,}0784 + 0{,}0196 + 0{,}0025 + 0{,}0361}{5}}$$

$$S = \sqrt{\frac{0{,}3384}{5}} = 0{,}26$$

$$m - t_{crit} \frac{S}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + t_{crit} \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$t_{crit} = 2{,}571$ (5 gradi di libertà)

$$t_{crit} \cdot \frac{S}{\sqrt{N}} = 2{,}571 \cdot \frac{0{,}26}{\sqrt{6}} = 0{,}27$$

$$6{,}57 - 0{,}27 \leq \mu \leq 6{,}57 + 0{,}27$$

$$\boxed{6{,}30 \leq \mu \leq 6{,}84}$$

9) $m = 1$
$\sigma = 0{,}05$

$$m - A \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + A \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

larghezza dell'intervallo $= \left(m + A\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) - \left(m - A\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 2A\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

$$2A\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0{,}02$$

con $A = 2{,}576$

$$\Rightarrow \sqrt{N} = \frac{2A\sigma}{0{,}02} = \frac{2 \cdot 2{,}576 \cdot 0{,}05}{0{,}02} = 12{,}88$$

$$N = (12{,}88)^2 = 165{,}9 \qquad \boxed{N \simeq 166}$$

10) Fit del minimo χ^2
che nel caso $y = A$ coincide con la media pesata

$$A = \frac{\sum \frac{y_i}{(\Delta y_i)^2}}{\sum \left(\frac{1}{\Delta y_i}\right)^2}$$

$$A = \frac{\frac{0{,}50}{(0{,}05)^2} + \frac{0{,}51}{(0{,}07)^2} + \frac{0{,}48}{(0{,}1)^2} + \frac{0{,}53}{(0{,}1)^2}}{\left(\frac{1}{0{,}05}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}07}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}1}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}1}\right)^2} = \frac{405{,}08}{804{,}08}$$

$$A = 0{,}50378$$

$$\Delta A = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{1}{\Delta y_i}\right)^2}} \Rightarrow \Delta A = \frac{1}{\sqrt{804{,}08}} = 0{,}0352$$

$$\boxed{A = 0{,}50 \pm 0{,}03}$$

11)

y_i	$(\Delta y_i)^2$	$f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
0,50	0,0025	0,50	0
0,51	0,0049	0,50	0,0001
0,48	0,01	0,50	0,0004
0,53	0,01	0,50	0,0009

$$\chi_0^2 = \sum \left(\frac{y_i - f(x)}{\Delta y_i}\right)^2$$

$$\chi_0^2 = 0 + \frac{0{,}0001}{0{,}0049} + \frac{0{,}0004}{0{,}01} + \frac{0{,}0009}{0{,}01} = 0{,}150$$

$d = 4 - 1 = 3$ gradi di libertà

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{0{,}150}{3} = 0{,}050$$

$$P_3\left(\tilde{\chi}^2 \geq 0{,}050\right) > 90\%$$

L'ipotesi è accettabile. Questa probabilità è tuttavia molto elevata e fa pensare che gli errori Δy_i siano stati sovrastimati oppure che i dati siano stati "massaggiati".