SOLUZIONI ESAME DI METODI COMPUTAZIONALI 18/1/2013

1

1) $m = m_{tot} - m_p = 98\,g - 80\,g = 18\,g$

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 100\ mm^3 = 15393,8\ mm^3$

$V = 15,39\ cm^3$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{18\,g}{15,39\,cm^3} = 1,16959\ g/cm^3$

$\Delta m = \sqrt{(\Delta m_{tot})^2 + (\Delta m_p)^2}$

$\Delta m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,41\ g$

$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$

$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{0,5}{7}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{100}\right)^2} = 0,1429$

$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1,41}{18}\right)^2 + (0,1429)^2} = 0,16296$

$\rightarrow \Delta \rho = 0,16296 \cdot 1,16959\ \frac{g}{cm^3} = 0,19059\ g/cm^3$

$$\boxed{\rho = (1,17 \pm 0,19)\ \frac{g}{cm^3}}$$

2) $82,346 \pm 0,028$ $\quad (8,2346 \pm 0,0028) \cdot 10^1$

$256,338 \pm 0,007$ $\quad (2,56338 \pm 0,00007) \cdot 10^2$

$246,32 \pm 0,05$ $\quad (2,4632 \pm 0,0005) \cdot 10^2$

990 ± 170 $\quad (9,9 \pm 1,7) \cdot 10^2$

25980 ± 240 $\quad (2,598 \pm 0,024) \cdot 10^4$

980 ± 80 $\qquad (9,8 \pm 0,8) \cdot 10^2$ ②

$32,53 \pm 0,07$ $\qquad (3,253 \pm 0,007) \cdot 10^1$

4214 ± 24 $\qquad (4,214 \pm 0,024) \cdot 10^3$

3) $$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{x}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ \phi & x < 0 \;,\; x > 1 \end{cases}$$

Assioma della completezza $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$

$$\rightarrow \int_0^1 \left(\frac{a}{x+1} + \frac{x}{3}\right) dx = a \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx =$$

$$= a \left[\ln(x+1)\right]_0^1 + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= a\left(\ln 2 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\ln 1}}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = a \ln 2 + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad a \ln 2 + \frac{1}{6} = 1$$

$$a \ln 2 = 1 - \frac{1}{6}$$

$$a \ln 2 = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{5}{6 \ln 2}}$$

4) $$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx$$

$$\mu = \int_0^1 x\left(\frac{a}{x+1} + \frac{x}{3}\right) dx = a \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= a \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= a \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx + \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\,dx =$$

3

$$= a\left[x\right]_0^1 - a\left[\ln(x+1)\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= a - a\ln 2 + \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{5}{6\ln 2} - \frac{5}{6\cancel{\ln 2}}\cancel{\ln 2} + \frac{1}{9} = \frac{5}{6\ln 2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{5}{6\ln 2} + \frac{-15+2}{18}$$

$$\boxed{\mu = \frac{5}{6\ln 2} - \frac{13}{18}} \qquad \mu \simeq 0,48$$

5) $m = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{0,495+0,504+0,498+0,499+0,502+0,503}{6}$

$N=6$

$$m = \frac{3,001}{6} = 0,5002$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-m)^2}{N-1}} = 0,003$$

$$m - t_{crit}\frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + t_{crit}\frac{s}{\sqrt{N}}$$

$t_{crit} = 4,032$ (5 gradi di libertà)

$$t_{crit}\cdot\frac{s}{\sqrt{N}} = 4,032\cdot\frac{0,003}{\sqrt{6}} = 0,005$$

$$0,5002 - 0,005 \leq \mu \leq 0,5002 + 0,005$$

$$\boxed{0,4952 \leq \mu \leq 0,5007}$$

6) $P_1 = 0,89$ prob. di fare centro (evento A_1)

$P_2 = 0,5$ prob di biglietto pari (evento A_2)

Probabilità che avvenga A_1 oppure A_2 (4)

Sono due eventi indipendenti:

$$P(A_1 \text{ o } A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \text{ e } A_2)$$

con $P(A_1 \text{ e } A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

$$\Rightarrow P(A_1 \text{ o } A_2) = 0,89 + 0,5 - 0,89 \cdot 0,5 =$$
$$= 1,39 - 0,445 = 0,945$$

$$\boxed{P = 0,945}$$

7) Assumendo che le particelle di impurezze vengano immesse casualmente e indipendentemente l'una dall'altra, si utilizza una distribuzione di Poisson.

La prob. che una bottiglia sia difettosa è

$$p = \frac{20}{100} = 0,2$$

che corrisponde al n° medio di bottiglie difettose (su un campione di 1 bottiglia) $\mu = 0,2$

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

P_s = prob. che una bottiglia venga scartata

$$P_s = P(k \geq 1) = 1 - P(0)$$

$$P(0) = \frac{1\, e^{-0,20}}{1} = e^{-0,20} = 0,8187$$

$$P_s = 1 - 0,8187 = 0,1813 \qquad \boxed{P_s \simeq 18,13\%}$$

8) $18 + 28 = 46$ palline totali

a) Definiamo le seguenti probabilità:

$P_1(N)$ = prob. di estrarre una pallina nera alla 1ª estrazione

5

$P_2(N)$ = " " " " 2ª estrazione avendo già estratto una pallina nera alla 1ª estrazione

$$P_a = P_1(N) \cdot P_2(N) = \frac{18}{46} \cdot \frac{17}{45} = 0,1478$$

$$\boxed{P_a \simeq 14,8\%}$$

b) $P_b = P_1(N) \cdot P_2(N) + P_1(B) \cdot P_2(B)$

in quanto eventi indipendenti e incompatibili

$$P_1(B) = \frac{28}{46}$$

$$P_2(B) = \frac{27}{45}$$

$$P_b = \frac{18}{46} \cdot \frac{17}{45} + \frac{28}{46} \cdot \frac{27}{45} = 0,1478 + 0,3652 = 0,5130$$

$$\boxed{P_b \simeq 51,3\%}$$

c) $P_c = 1 - P_b = 1 - 0,513 = 0,487$ $\boxed{P_b \simeq 48,7\%}$

Altro modo di calcolare P_b:

$$P_b = \underbrace{\frac{28}{46}}_{B} \underbrace{\frac{18}{4}}_{N} + \underbrace{\frac{18}{46}}_{N} \cdot \underbrace{\frac{28}{4}}_{B} = 2 \frac{28 \cdot 18}{46 \cdot 45} = 48,7\%$$

9) $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con $\mu = 70$ $\sigma^2 = 9 \rightarrow \sigma = 3$

$$\int_{64}^{d} p(x)\,dx = 0,9051$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

6

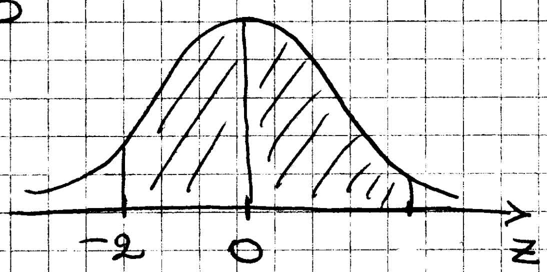
$$\int_{64}^{d} p(x)\,dx = \int_{z_1}^{z_2} g(z)\,dz \qquad z_1 = \frac{64-70}{3} = -2$$

$$z_2 = \frac{d-70}{3}$$

$$= \int_{-2}^{z_2} g(z)\,dz = 0,9051$$

dal fatto che $0,9051 > 0,5$ ne deduco che

$z_2 > 0$



$$= \int_{-2}^{0} g(z)\,dz + \int_{0}^{z_2} g(z)\,dz = \int_{0}^{2} g(z)\,dz + \int_{0}^{z_2} g(z)\,dz =$$

$$= 0,4772 + \int_{0}^{z_2} g(z)\,dz = 0,9051$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{z_2} g(z)\,dz = 0,9051 - 0,4772 = 0,4279$$

$$\Rightarrow z_2 = 1,46$$

$$\frac{d-70}{3} = 1,46 \longrightarrow d-70 = 4,38$$

$$\boxed{d = 74,38}$$

10) Metodo di fit del minimo χ^2. Poiché

$y = A$ si tratta della media pesata. (7)

$$A = \frac{\sum \frac{y_i}{(\Delta y_i)^2}}{\sum \frac{1}{(\Delta y_i)^2}} \qquad \Delta A = \frac{1}{\sqrt{\sum \frac{1}{(\Delta y_i)^2}}}$$

y_i	Δy_i
13	0,5
13,5	0,4
13,3	0,2
13,8	0,7
12,9	0,4

$$A = \frac{\frac{13}{(0,5)^2} + \frac{13,5}{(0,4)^2} + \frac{13,3}{(0,2)^2} + \frac{13,8}{(0,7)^2} + \frac{12,9}{(0,4)^2}}{\frac{1}{(0,5)^2} + \frac{1}{(0,4)^2} + \frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(0,7)^2} + \frac{1}{(0,4)^2}}$$

$$A = \frac{577,663}{43,54} = 13,267$$

$$\Delta A = \sqrt{\frac{1}{43,54}} = 0,1515 \simeq 0,15$$

$$\boxed{A = 13,27 \pm 0,15}$$

11)

y_i	Δy_i	$y_i - A$
13	0,5	-0,27
13,5	0,4	0,23
13,3	0,2	0,03
13,8	0,7	0,53
12,9	0,4	-0,37

$$\chi^2 = \sum \frac{(y_i - A)^2}{(\Delta y_i)^2}$$

$$\chi_0^2 = \left(\frac{-0,27}{0,5}\right)^2 + \left(\frac{0,23}{0,4}\right)^2 + \left(\frac{0,03}{0,2}\right)^2 + \left(\frac{0,53}{0,7}\right)^2 + \left(\frac{-0,37}{0,4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \chi_0^2 = 2,0736$$

$d = 5 - 1 = 4$ gradi di libertà

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi^2}{d} = \frac{2,0736}{4} = 0,5184$$

$$P_4\left(\tilde{\chi}^2 \geq 0,5184\right) \simeq 74\%$$

L'ipotesi è accettabile $(74\% > 5\%)$