SOLUZIONI ESAME METODI COMPUTAZIONALI del 5/2/2012

1

1) $p = p_0 + \rho g h = p_0 + p_1$

$p = 1{,}013 \cdot 10^5\, Pa + 1150 \cdot 9{,}81 \cdot 20\, Pa = 3{,}2693 \cdot 10^5\, Pa$

$\Delta p = \sqrt{(\Delta p_0)^2 + (\Delta p_1)^2}$

$\frac{\Delta p_1}{p_1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{1150}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{20}\right)^2} = 0{,}01325$

$p_1 = \rho g h = 2{,}2563 \cdot 10^5\, Pa$

$\rightarrow \Delta p_1 = 0{,}01325 \cdot 2{,}2563 \cdot 10^5\, Pa = 0{,}029896 \cdot 10^5\, Pa$

$\Delta p = \sqrt{(0{,}004 \cdot 10^5)^2 + (0{,}029896 \cdot 10^5)^2} = 0{,}0302 \cdot 10^5\, Pa$

$$\boxed{p = (3{,}27 \pm 0{,}03) \cdot 10^5\, Pa}$$

2)

25980 ± 240	$(2{,}598 \pm 0{,}024) \cdot 10^4$
$82{,}89 \pm 0{,}07$	$(8{,}289 \pm 0{,}007) \cdot 10$
$22{,}53 \pm 0{,}04$	$(2{,}253 \pm 0{,}004) \cdot 10$
4214 ± 21	$(4{,}214 \pm 0{,}021) \cdot 10^3$
$325{,}338 \pm 0{,}017$	$(3{,}25338 \pm 0{,}00017) \cdot 10^2$
$246{,}59 \pm 0{,}06$	$(2{,}4659 \pm 0{,}0006) \cdot 10^2$
980 ± 90	$(9{,}8 \pm 0{,}9) \cdot 10^2$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$ assioma della completezza

$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + a x^2\right) dx = \left[\ln x\right]_1^2 + a\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$

$= \ln 2 - \underset{0}{\underset{\parallel}{\ln 1}} + \frac{a}{3}(8-1) = \ln 2 + \frac{7}{3} a$

$$\Rightarrow \quad \ln 2 + \frac{7}{3} a = 1$$

$$\frac{7}{3} a = 1 - \ln 2 \qquad \boxed{a = \frac{3}{7}(1 - \ln 2)}$$

$a \simeq 0,131$

4) $\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$

$$\mu = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + a x^2 \right) dx = \int_1^2 (1 + a x^3)\, dx =$$

$$= [x]_1^2 + a \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = 2 - 1 + \frac{a}{4}(16 - 1) =$$

$$= 1 + \frac{15}{4} a = 1 + \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{7}(1 - \ln 2) =$$

$$= 1 + \frac{45}{28}(1 - \ln 2) = 1 + \frac{45}{28} - \frac{45}{28} \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{73}{28} - \frac{45}{28} \ln 2} \qquad \mu \simeq 1,493$$

5) 20 studenti $\nearrow$ 13 femmine, $\searrow$ 7 maschi

a) $P_a = P_1(F) \cdot P_2(F) = \frac{13}{20} \cdot \frac{12}{19} = 0,4105$

$\boxed{P_a \simeq 41,0\%}$

b) $P_b = P_1(F) \cdot P_2(F) + P_1(M) \cdot P_2(M) =$

$$= \frac{13}{20} \cdot \frac{12}{19} + \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} = 0,5210$$

$\boxed{P_b \simeq 52,1\%}$

c) $P_c = 1 - P_b = 1 - 0,5210 = 0,4790$

$$\boxed{P_c \simeq 47,9\%}$$

Altro modo di calcolare P_c

$$P_c = P_1(F)P_2'(M) + P_1(M)P_2'(F) =$$

$$= \frac{13}{20}\cdot\frac{7}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{13}{19} = 2\cdot\frac{13\cdot 7}{20\cdot 19} = 0,4789$$

d) $P_d = P(M/1)\cdot P(1) + P(M/2)\cdot P(2)$

prob. che venga estratto un M dalla classe 1

prob. che venga estratta la classe 1

$$P(1) = P(2) = \frac{1}{2}$$

$$P_d = \frac{7}{20}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{20}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{40} + \frac{5}{40} = \frac{3}{10} = 0,300$$

$$\boxed{P_d = 30,0\%}$$

6)

x_i	$P(x_i)$
21	$3/10 = 0,3$
22	$2/10 = 0,2$
25	$1/10 = 0,1$
28	$15/100 = 0,15$
29	$25/100 = 0,25$

media $\mu = E[x] = \sum_i x_i P(x_i) =$

$$\mu = 21\cdot 0,3 + 22\cdot 0,2 + 25\cdot 0,1 + 28\cdot 0,15 + 29\cdot 0,25$$

$$\boxed{\mu = 24,65}$$

moda = valore con $P(x)$ massima $\Rightarrow$ $\boxed{\text{moda} = 21}$

mediana $m_{1/2}$ tale che

$$\sum_{x_i < m_{1/2}} P(x_i) = \sum_{x_i > m_{1/2}} P(x_i) = 1/2$$

Quindi $m_{1/2}$ è compreso tra $x = 22$ e $x = 25$

$m_{1/2} = \frac{22+25}{2} \rightarrow \boxed{m_{1/2} = 23,5}$ (4)

7) $N = 15$

$m = 584,1$

$s = 123,4$

$$m - t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

con $t_{crit} = 2,145$ (14 gradi di libertà)
95% confidenza

$$t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 2,145 \cdot \frac{123,4}{\sqrt{15}} = 68,3$$

$$584,1 - 68,3 = 515,8$$
$$584,1 + 68,3 = 652,4$$

$$\boxed{515,8 \text{ mm} \leq \mu \leq 652,4 \text{ mm}}$$

8) $N = 120$

$p = 0,8$ distribuzione binomiale

prob. di avere almeno 100 funzionanti

$$P(K \geq 100) = P(100) + P(101) + \dots + P(120)$$

Noto che $\begin{cases} \mu = Np = 120 \cdot 0,8 = 96 \\ N(1-p) = 120 \cdot 0,2 = 24 \end{cases}$

sono entrambi $\gg 5$, quindi posso applicare l'approssimazione gaussiana della binomiale

$$P = \int_{99,5}^{+\infty} p(x)\,dx$$

con $p(x)$ gaussiana di media $\mu = 96$ e

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} = 4,38$$

$$P = \int_{z_1}^{+\infty} g(z)\,dz$$

con $g(z)$ gaussiana standard

$$z_1 = \frac{99,5 - 96}{4,38} \simeq 0,80$$

$$P = \int_{0,80}^{+\infty} g(z)dz = \int_{0}^{+\infty} g(z)dz - \int_{0}^{0,80} g(z)dz = 0,5 - \int_{0}^{0,80} g(z)dz =$$

$$= 0,5 - 0,2881 \cong 0,218$$

ovvero $\boxed{P \cong 21,8\%}$ questa non è una "buona probabilità", quindi il ragionamento non è corretto.

9) media campionaria $m = \frac{\sum x_i}{N}$

$$m = \frac{1,502 + 1,501 + 1,505 + 1,499 + 1,495 + 1,504}{6} = 1,501$$

deviazione standard campionaria $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{N-1}}$

Facendo il calcolo $s = 0,0036$

$$m - t_{crit}\frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq m + t_{crit}\frac{s}{\sqrt{N}}$$

con $t_{crit} = 11,18$ (5 gradi di libertà confidenza 99,99%)

$$t_{crit} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 0,016$$

$$1,501 - 0,016 = 1,485$$

$$1,501 + 0,016 = 1,517$$

$$\boxed{1,485\,l \leq \mu \leq 1,517\,l}$$

10)

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	0	0,1	0	0
	1	-0,2	1	-0,2
	2	-6	4	-12
	3	-10	9	-30
Σ	6	-16,1	14	-42,2

Metodo di fit dei minimi quadrati

$$y = A + Bx$$

$N = 4 \qquad \Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = 4 \cdot 14 - 36 = 20$ 6

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

$$A = \frac{-16{,}1 \cdot 14 - 6 \cdot (-42{,}2)}{20} = \frac{27{,}8}{20} = 1{,}39$$

$$(\Delta A)^2 = (\Delta y)^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{\Delta} = (0{,}5)^2 \cdot \frac{14}{20} = 0{,}175$$

$$\Delta A = \sqrt{0{,}175} = 0{,}418$$

$$\boxed{A = 1{,}4 \pm 0{,}4}$$

$$B = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{4 \cdot (-42{,}2) - 6 \cdot (-16{,}1)}{20} = -\frac{72{,}2}{20} = -3{,}61$$

$$(\Delta B)^2 = (\Delta y)^2 \frac{N}{\Delta} = (0{,}5)^2 \cdot \frac{4}{20} = 0{,}05$$

$$\Delta B = \sqrt{0{,}05} = 0{,}224$$

$$\boxed{B = -3{,}61 \pm 0{,}22}$$

11)

x_i	y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
0	0,1	1,4	-1,3	1,69
1	-0,2	-2,21	2,01	4,0401
2	-6	-5,82	-0,18	0,0324
3	-10	-9,43	-0,57	0,3249

con

$f(x) = A + Bx =$

$= 1{,}4 - 3{,}61 \cdot x$

$$\chi_0^2 = \frac{\sum (y_i - f(x_i))^2}{(\Delta y)^2} = \frac{6{,}0874}{(0{,}5)^2} \simeq 24{,}35$$

$d = 4 - 2 = 2$ gradi di libertà

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi_0^2}{d} = \frac{24{,}35}{2} \simeq 12{,}2$$

$$P_2\left(\tilde{\chi}^2 \geq 12{,}2\right) < 0{,}05\,\%$$

L'ipotesi NON è accettabile