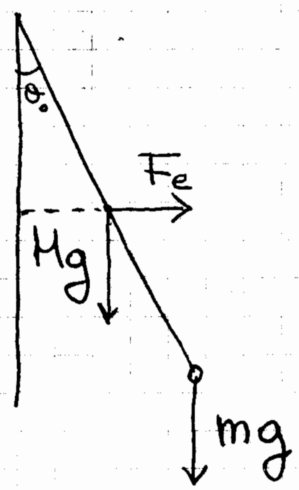
Compito del 25/10/2012

ESERCIZIO 1

1) Equilibrio meccanico $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

$\sum \tau_z = 0$

Calcolo i momenti rispetto ad un asse passante per il punto O. Noto che la molla (quando $0<\theta_0<\pi/2$) è sicuramente compressa



$F_e = K \cdot \Delta x$

Δx = accorciamento della molla

$\Delta x = \ell_0 - x$

$x = \frac{L}{2} \cdot \sin\theta_0$

$$\Delta x = \frac{L}{2}(1-\sin\theta_0)$$

$$\sum \tau_z = 0$$

$$+F_e \cdot \frac{L}{2}\cos\theta_0 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta_0 - mgL\sin\theta_0 = 0$$

$$\sin\theta_0\left(\frac{M}{2}+m\right)g\cancel{L} = K\cdot\Delta x \cdot \frac{\cancel{L}}{2}\cos\theta_0$$

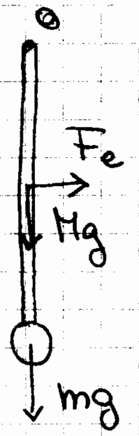
$$\sin\theta_0\left(\frac{M}{2}+m\right)g = K\frac{L}{4}(1-\sin\theta_0)\cdot\cos\theta_0$$

$$K = \frac{4\left(m+\frac{M}{2}\right)g\sin\theta_0}{L(1-\sin\theta_0)\cdot\cos\theta_0}$$

$$\boxed{K = \frac{2(M+2m)\,g\,\tan\theta_0}{L\,(1-\sin\theta_0)}}$$

$$\boxed{K = 64\ \frac{N}{m}}$$

2)



$$\sum \tau_z = I\alpha$$

$$\sum \tau_z = F_e \cdot \frac{L}{2}$$

con $F_e = K\Delta x$

$$\Delta x = \ell_0 - \frac{L}{2}$$

la molla è compressa del tutto

$$I = I_{\text{sbarretta}} + I_{\text{pallina}}$$ (rispetto al punto O)

$$I_{\text{pallina}} = mL^2$$

$$I_{\text{sbarretta}} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = ML^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right) = \frac{ML^2}{3}$$

$$I = mL^2 + \frac{M}{3}L^2 = \left(m+\frac{M}{3}\right)L^2$$

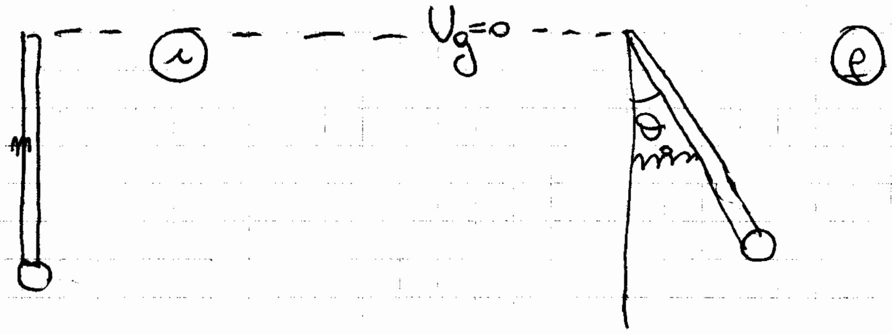
$$K\frac{\cancel{L}^2}{4} = \left(m+\frac{M}{3}\right)\cancel{L^2}\cdot\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{K}{4\left(m+\frac{M}{3}\right)}}$$

$$\boxed{\alpha = 2{,}9\cdot 10\ \text{rad/s}}$$

3) Conservazione dell'energia meccanica

$E_i = E_f$



$$E_i = \frac{1}{2} K \left(\frac{L}{2}\right)^2 - Mg\frac{L}{2} - mgL$$

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{L}{2}(1-\sin\theta_0)\right)^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 + \\ - mgL\cos\theta_0$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{8} KL^2 (1-\sin\theta_0)^2 - \left(\frac{M}{2}+m\right) gL\cos\theta_0 = \frac{1}{2} K\frac{L^2}{4} + \\ - \left(\frac{M}{2}+m\right) gL$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{8} KL^2 \left(1-(1-\sin\theta_0)^2\right) - \left(\frac{M}{2}+m\right) gL \left(1-\cos\theta_0\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{3}\right) L^{\cancel{2}} \omega^2 = \frac{1}{8} kL^{\cancel{2}} \left(2\sin\theta_0 - \sin^2\theta_0\right) - g\cancel{L} \left(m+\frac{M}{2}\right)(1-\cos\theta_0)$$

$$\omega = \left[\frac{2}{\left(m+\frac{M}{3}\right)L} \cdot \left[\frac{1}{8} kL(2\sin\theta_0 - \sin^2\theta_0) - g\left(m+\frac{M}{2}\right)(1-\cos\theta_0)\right]\right]^{1/2}$$

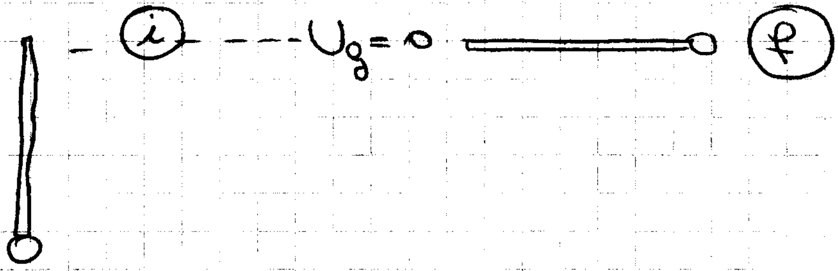
$v = \omega r$ con $r = L$

$v = \omega L$

$$\omega = \sqrt{8{,}27 \ \frac{rad}{s}} = 2{,}87 \ rad/s$$

$$\boxed{v = 0{,}58 \ \frac{m}{s}}$$

4) La pallina colpirà il soffitto se lo raggiungerà con energia cinetica $K \geq 0$



$$E_i = \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{2}\right)^2 - Mg\frac{L}{2} - mgL$$

$$E_f = K + \underbrace{\frac{1}{2} k \cdot 0^2}_{\text{la molla è alla sua lunghezza di riposo}}$$

$$\frac{1}{2} k \left(\frac{L}{2}\right)^2 - Mg\frac{L}{2} - mgL = K$$

$$K \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} k \frac{L^2}{4} - \left(\frac{M}{2} + m\right) gL \geq 0$$

$$\frac{kL^{\cancel{2}}}{8} - \left(\frac{M}{2} + m\right) g\cancel{L} \geq 0$$

$$kL - (4M + 8m) g \geq 0$$

$$k \geq (4M + 8m) \frac{g}{L}$$

ovvero $k \geq 111{,}8 \ \frac{N}{m}$

Poiché abbiamo che $k = 32$ N/m, la pallina <u>NON</u> arriverà a colpire il soffitto.

ESERCIZIO 2

1) dQ = carica infinitesima posseduta da un guscio sferico di raggio r (con $a<r<b$) e spessore infinitesimo dr

$$dQ = \rho \cdot dV$$

dV = volume infinitesimo del guscio di spessore dr

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

$$dQ = \rho\, 4\pi r^2 dr = -\frac{A}{r}\, 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow \quad dQ = -4\pi A\, r\, dr$$

$$Q = \int dQ = \int_a^b -4\pi A\, r\, dr =$$

$$= -4\pi A \int_a^b r\, dr = -4\pi A \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^b \Rightarrow$$

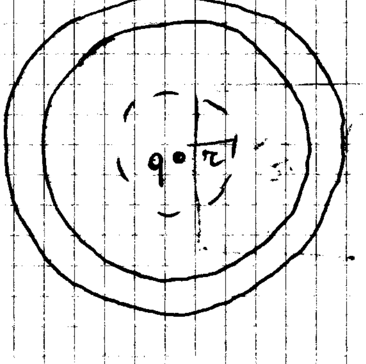
$$\boxed{Q = -2\pi A\,(b^2 - a^2)}$$

$$Q = -2\pi \cdot 3\cdot 10^{-6}\,(0{,}12^2 - 0{,}10^2)\ \mathrm{C}$$

$$\boxed{Q = -83\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}$$

2) $0<r<a$

Teo di Gauss. Superficie gaussiana di raggio r, centrata sulla carica q.



$$q_{int} = q$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\, 4\pi r^2$$

a causa della simmetria sferica

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_I = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$a < r < b$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$q_{int} = q + Q(r)$$

→ carica contenuta nel guscio sferico di raggio interno a e raggio esterno r

$$Q(r) = \int_a^r \rho(r)\, dV = \int_a^r -\frac{A}{r} \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= -4\pi A \int_a^r r\, dr = -4\pi A \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^r \Rightarrow$$

$$Q(r) = -2\pi A (r^2 - a^2)$$

$$q_{int} = q - 2\pi A (r^2 - a^2)$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q - 2\pi A (r^2 - a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E = \frac{q - 2\pi A (r^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$\boxed{\vec{E}_{II} = \frac{q - 2\pi A (r^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}}$$

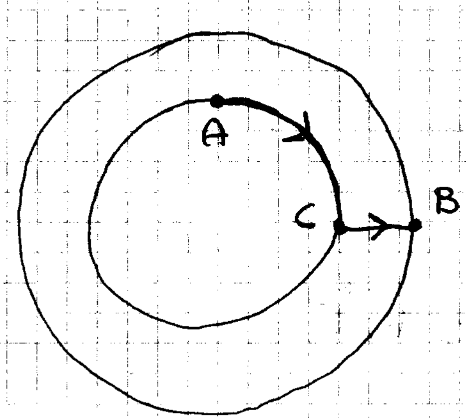
$r > b$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{int} = q + Q = q - 2\pi A (b^2 - a^2)$$

$$\boxed{\vec{E}_{III} = \frac{q - 2\pi A (b^2 - a^2)}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

3) $$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_{II} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_A^C \vec{E}_{II} \cdot d\vec{s}}_{=0} + \int_C^B \vec{E}_{II} \cdot d\vec{s}$$



perchè lungo l'arco di circonferenza che va da A a C il campo è $\perp$ allo spostamento

$$V_A - V_B = \int_C^B E_{II}(r)\,dr = \int_a^b \frac{q - 2\pi A (r^2 - a^2)}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}\,dr =$$

$$= \int_a^b \frac{q + 2\pi A a^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}\,dr - \int_a^b \frac{\cancel{2\pi} A \cancel{r^2}}{\cancel{4\pi}\,2\,\varepsilon_0 \varepsilon_r \cancel{r^2}}\,dr =$$

$$= \frac{q + 2\pi A a^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr - \frac{A}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_a^b 1\,dr =$$

$$= \frac{q + 2\pi A a^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b - \frac{A}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[r\right]_a^b =$$

$$= \frac{q + 2\pi A a^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{A}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} (b - a)$$

$V_A - V_B = 3{,}5\ KV$

4) Si deve avere E_{II} indipendente da r.
Questo è possibile se:

$$E_{II}(r) = \frac{q + 2\pi A a^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

questo termine deve essere $= \emptyset$ perché dipende da r

$$q + 2\pi A a^2 = 0$$

$$\boxed{A = -\frac{q}{2\pi a^2}}$$

$$A = -7{,}96 \cdot 10^{-6} C \simeq -8{,}0 \cdot 10^{-6} C$$

$$\boxed{A = -8{,}0 \cdot 10^{-6} C}$$

quindi $\rho(r) = -\frac{A}{r} = 8{,}0 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \cdot \frac{1}{r\,[m]}$

cioè il guscio isolante deve possedere una carica POSITIVA

$$Q = -2\pi A (b^2 - a^2)$$

5) Il campo $\vec{E}_{III} = 0$ se $q_{int} = 0$ ovvero se $q + Q = 0$

$\Rightarrow Q = -q$ utilizzando l'espressione di Q

$$-2\pi A (b^2 - a^2) = -q$$

$$\boxed{A = \frac{q}{2\pi \cdot (b^2 - a^2)}} \qquad \boxed{A = 2{,}0 \cdot 10^{-4} \frac{C}{m^2}}$$

La carica posseduta dal guscio isolante è NEGATIVA