LEZIONE 10

Redshift e GPS

Oggi vorrei cominciare mostrando come le cose di cui abbiamo parlato non siano solo materia da libri di scuola o testi universitari, ma comincino ad avere applicazioni pratiche di notevole importanza.

Avevo già accennato al GPS (Global Positioning System), per rilevare che il funzionamento di quel sistema si basa in maniera fondamentale sull'invarianza della velocità delle onde e.m. Ora voglio far vedere che nel GPS entrano aspetti più sofisticati della relatività: proprio le cose che abbiamo esaminato.

Un breve riepilogo: il sistema è basato sull'esattezza degli orologi atomici montati sui satelliti. Semplificando alquanto, diciamo che la frequenza nominale degli orologi è 10.23 MHz; voglio dire che quegli orologi mandano impulsi con la cadenza di 10.23 MHz. Però questa è la frequenza *nominale*: se vi mettete sul satellite e misurate la frequenza dell'orologio trovate che è un po' minore: 10.22999999545 MHz. Perché questo? Perché il satellite sta su in alto, e occorre che il ricevitore a terra riceva gli impulsi con la cadenza di 10.23 MHz; cosa che non succederebbe se l'orologio lassù li emettesse a 10.23 MHz nel suo rif. Ci sono due ragioni: la prima è il redshift gravitazionale (che in realtà in questo caso è un "blueshift," visto che gli impulsi viaggiano verso il basso); la seconda che il satellite, com'è ovvio, non è fermo rispetto al ricevitore. Dunque oltre al redshift gravitazionale gioca quell'effetto che contro i miei gusti si usa chiamare "dilatazione del tempo."(1)

L'effetto complessivo è estremamente piccolo: se andate a fare il conto, la variazione relativa di frequenza è $5 \cdot 10^{-10}$, nel senso che la frequenza ricevuta è *più alta*.

Che conseguenze produce questo piccolo spostamento sul funzionamento del sistema? Abbiamo il ricevitore a terra, che riceve il segnale. Se non teniamo conto della variazione di frequenza, abbiamo un errore relativo di $5 \cdot 10^{-10}$ nelle misure di tempo: i segnali ricevuti sono progressivamente sfasati rispetto a come dovrebbero essere. Facciamo il conto di quello che succede in un'ora: $5 \cdot 10^{-10}$ di un'ora fa $1.8\,\mu$s; quindi in capo a un'ora il tempo ricevuto avanzerebbe di $1.8\,\mu$s.

Ora questi segnali si usano per misurare la posizione del ricevitore in base al ritardo con cui arrivano; se il segnale arriva $1.8\,\mu$s prima, è come se il ricevitore si fosse avvicinato al satellite. Dato che $1.8\,\mu$s moltiplicato per c fa 500 metri, senza la correzione dopo un'ora la posizione del ricevitore sarà sbagliata per 500 metri. E l'effetto è cumulativo: dopo due ore 1000 metri ecc... Quindi agli effetti dell'utilizzazione dello strumento sarebbe un disastro.

Notate che $1.8\,\mu$s è lo stesso ordine di grandezza dell'esperimento B–L, dove avevamo parlato di $2.4\,\mu$s. Come mai, visto che quell'esperimento durava 2 mesi? La ragione è che il satellite sta molto più in alto, quindi il blueshift gravitazionale è molto più grande.

Come vedete, in un sistema come il GPS gli effetti relativistici devono essere messi in conto; altrimenti l'apparato darebbe una deriva sistematica delle posizioni di tutti gli oggetti sulla Terra. Questo prova che gli effetti relativistici stanno entrando nella tecnica:

---

(1) La storia delle correzioni relativistiche nel GPS presenta aspetti interessanti. Quando fu messo in orbita nel 1977 il primo satellite con a bordo un orologio atomico, c'era dissenso tra i progettisti sul fatto che l'effetto relativistico fosse reale, e se ne dovesse davvero tener conto. Si raggiunse una soluzione di compromesso, consistente nel montare nel satellite un orologio regolabile a distanza: se davvero c'era l'effetto previsto, si sarebbe proceduto *a posteriori* a correggere la marcia dell'orologio. Come andarono le cose potete immaginarlo. Ma non è finita: quando fu progettato il GPS la correzione era ormai accettata, ma in un primo tempo fu calcolata in misura leggermente errata. L'errore fu corretto solo dopo 8 anni!

come dicevo prima, non sono più cose che si trovano soltanto nei libri di fisica. Detto in una battuta: anche gli ingegneri debbono imparare la relatività. Magari si limiteranno a imparare delle formule, ma almeno di questo non possono fare a meno.

Forze di marea e curvatura dello spazio-tempo

Abbiamo visto la volta passata che l'interpretazione dell'esperimento B–L ci era sembrata paradossale perché ragionavamo su diagrammi spazio-tempo che sono carte non fedeli della geometria dello spazio-tempo. Se ne può dedurre che lo spazio-tempo è curvo? Abbiamo visto che effettivamente lo spazio-tempo è curvo, ma per arrivarci bisognava capire che non solo la forza di gravità c'è sulla Terra; ma che anche se ci mettiamo in un rif. in caduta libera (ascensore di Einstein, o satellite in orbita) la forza di gravità rimane come differenza e continuerà a produrre un effetto, pur se piccolissimo. Nel problema 8.3 abbiamo calcolato quanto piccolo.

Dato che un piccolissimo effetto è ineliminabile (perché il campo gravitazionale non è uniforme) non c'è modo di fare una carta dello spazio-tempo fedele con la metrica di Lorentz: questo veramente significa che lo spazio tempo è curvo.

La discussione che faremo ora è dedicata alla relazione fra curvatura dello spazio-tempo e forze di marea. L'argomento delle forze di marea l'abbiamo toccato in più di un'occasione, ma ho sempre detto "poi ne riparleremo"; il momento è arrivato.

Avevamo già visto che si chiama "forza di marea" quel residuo della forza di gravità che non viene cancellata neanche nel rif. in caduta libera. Non abbiamo però discusso perché si chiama così. Naturalmente il nome deriva dal fatto che ha a che fare con le maree.

Le forze di marea sono la causa delle maree

In fig. 10–1 vedete il Sole, e la Terra in orbita attorno al Sole. Chiamiamo D la distanza tra il centro del Sole e il centro della Terra (supponiamo l'orbita circolare, per semplicità). Posso dire allora che la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole. Noi ci mettiamo appunto in questo rif. in caduta libera. Ricordo che quando dico "rif. in caduta libera" penso a un rif. che si muove come il centro della Terra, ma non ruota: è sempre orientato verso le "stelle fisse." Si tratta dunque di un rif. accelerato, ma in moto traslatorio, non rotatorio: altrimenti dovrei tener conto di effetti più complicati, dati dalla forza di Coriolis.

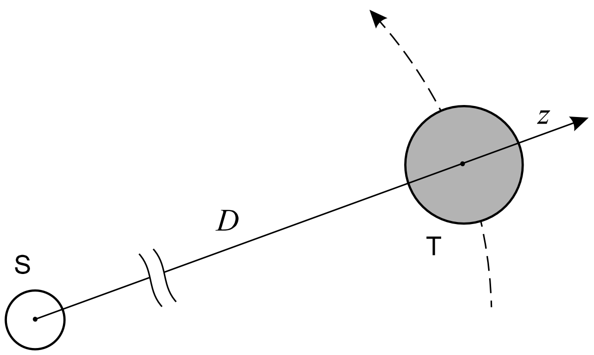

fig. 10–1

L'accelerazione di questo riferimento è nota: in modulo vale GM/D^2, uguale al campo gravitazionale del Sole nel centro della Terra. Però il campo in un punto della Terra che non sia il centro è diverso: sarà maggiore o minore a seconda che il punto sia più vicino al Sole, o più lontano.

Indico questo campo con g (anche se di solito g indica il campo gravitazionale della Terra sulla sua superficie, è ragionevole mantenere lo stesso simbolo). Allora, preso un asse z orientato dal Sole verso la Terra, con l'origine nel centro della Terra, $|g| = GM/(D + z)^2$. Questo per un punto sull'asse z; altrimenti l'espressione sarebbe un po' più complicata. La direzione del campo è sempre nel verso negativo dell'asse z, per cui scriverò $g_z = -GM/(D + z)^2$.

Dato che nei punti che ci possono interessare è sempre $z \ll D$, facciamo uno sviluppo in serie: il termine di ordine zero è $-GM/D^2$ (campo nel centro della Terra); il termine di primo ordine vale $2GMz/D^3$.

Se mi metto nel rif. in caduta libera la forza apparente cancella il primo termine, ma non il secondo (la stessa cosa che accade nell'ascensore di Einstein). Quindi nel rif. della Terra mi rimane un campo gravitazionale

$$g_{\text{marea}} = \frac{2GMz}{D^3} \tag{10–1}$$

a proposito del quale faccio notare due cose:

1) È proporzionale a z, quindi non solo aumenta se mi allontano dal centro della Terra, ma cambia verso col segno di z: se $z > 0$ è diretto verso fuori, se $z < 0$ è diretto in senso opposto, ossia *sempre fuori* dalla superficie della Terra.
2) Va come $1/D^3$, ossia è inversamente proporzionale al *cubo* della distanza Terra–Sole, non al quadrato. Quindi decresce molto più rapidamente quando ci si allontana dal Sole.

Sulla superficie della Terra $z = \pm R$, e allora $|g_{\text{marea}}| = 2GMR/D^3$. Questa è una forza addizionale che agisce sempre verso l'esterno della superficie terrestre, e ha come conseguenza di ridurre il peso di un corpo in quei punti.

Bisognerebbe ora vedere che cosa succede se ci si mette in punti della superficie terrestre che non stanno sull'asse z. Per esempio, nei punti del piano perpendicolare all'asse z per il centro della Terra la distanza dal Sole è più o meno la stessa del centro; però la direzione del campo gravitazionale è diversa. Di conseguenza la forza apparente, sebbene abbia lo stesso modulo del campo agente in quei punti, non lo cancella perché ne differisce in direzione. I conti ve li lascio come problema; il risultato è che il campo di marea è diretto verso l'interno e ha grandezza metà di quella calcolata prima, ossia GMR/D^3.

Ora pensate all'acqua degli oceani: nei punti davanti al Sole e all'opposto, l'acqua pesa meno; nei punti appartenenti alla circonferenza nel piano perpendicolare invece pesa di più. Risultato: nei primi punti l'acqua si solleva, negli altri si abbassa. E con questo abbiamo spiegato perché si dice "forze di marea." Spiegare le maree vere è tutta un'altra storia: le cose si complicano molto, per diverse ragioni che accennerò più avanti. È interessante ricordare, da un punto di vista storico, che Newton riuscì a fare in dettaglio il calcolo della forza di marea, fino a stimare l'ampiezza delle escursioni delle maree oceaniche.

Qualcuno potrebbe chiedere: ma le maree non sono dovute alla Luna? Noi abbiamo mostrato che il Sole produce maree; e la Luna? Per la Luna il discorso è lo stesso, perché la Terra sente anche il campo gravitazionale della Luna. In effetti la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale della Luna come in quello del Sole; o meglio, dovrei dire che sulla Terra agisce la somma del campo gravitazionale del Sole e di quello della Luna, e la Terra è in caduta libera nel campo risultante. Quindi possiamo considerare separatamente l'effetto di marea del Sole e quello della Luna, poi sommarli.

Da un punto di vista didattico c'è però una differenza (ed è per questo che ho cominciato dal Sole): dire che la Terra è in caduta libera nel campo del Sole è pacifico, perché si pensa che il Sole è grosso e massiccio e praticamente sta fermo, e la Terra cade, nel senso che gli gira intorno; invece nel caso della Luna si pensa che sia questa che gira intorno alla Terra e non la Terra che gira intorno alla Luna. Però si tratta in parte di un equivoco, indotto dal fatto che la massa della Luna è più piccola di quella della Terra.

La Luna produce una forza gravitazionale sulla Terra, che sente la forza e ne viene accelerata; in questo senso la Terra *è in caduta libera* nel campo gravitazionale della Luna. Ovviamente è vero anche il viceversa: anche la Luna cade nel campo gravitazionale della Terra. Cadono tutt'e due, e l'effetto è che entrambe girano attorno al centro di massa comune. Poiché la massa della Luna è 1/80 di quella della Terra, si nota molto di più l'effetto sulla Luna; ma per ciò che ora c'interessa, ossia le maree sulla Terra, quello che conta è il campo che agisce sulla Terra e il moto di caduta libera di questa.

Se dovessimo fare il conto della forza di marea dovuta alla Luna arriveremmo alla stessa formula che abbiamo trovata per il Sole: basta solo sostituire i diversi valori dei parametri. Invece della massa del Sole ci va quella della Luna; al posto della distanza Terra–Sole, quella Terra–Luna. Ora la massa del Sole è molto più grande di quella della Luna, ma pure la distanza è maggiore. Se si vanno a mettere i numeri, capita una coincidenza curiosa, senza nessuna ragione profonda: l'ordine di grandezza delle due forze di marea è lo stesso. Più esattamente, la forza di marea dovuta alla Luna è un po' più del doppio di quella dovuta al Sole. Notate che si potrebbe facilmente equivocare: se non ci si rendesse conto che la forza di marea è un effetto differenziale e va come $1/D^3$, e si pensasse invece che le forze di marea vadano con la legge di Newton, siano cioè inversamente proporzionali al quadrato della distanza, si arriverebbe alla conclusione che l'azione del Sole è molto più importante.

Le maree reali sono complicate…

Riassumendo, come grossolana approssimazione si può dire che le maree dipendono dalla Luna, però l'effetto del Sole cambia le cose non di poco, visto che è la metà. È cosa nota da moltissimo tempo, scoperta per via empirica, che quando c'è luna nuova o luna piena, cioè quando Terra, Luna e Sole sono all'incirca allineati, le maree sono molto maggiori che non ai quarti. Poi le cose sono ancora più complicate, perché il piano su cui si muove la Luna rispetto alla Terra e quello in cui si muove il Sole non coincidono, quindi gli allineamenti sono variabili; per di più le orbite sono ellittiche, quindi le distanze cambiano; inoltre conta anche molto l'altezza dei due corpi sull'orizzonte. E queste sono solo le complicazioni astronomiche…

Ma c'è anche da considerare che la Terra non è uniformemente ricoperta d'acqua: ci sono i mari aperti, gli oceani, i golfi, gli stretti… Tutte queste particolarità geografiche producono diversi effetti, per cui in certi posti le maree sono altissime e in altri sono bassissime. Non solo: anche le fasi cambiano. Il nostro ragionamento porterebbe a dire che si avrà alta marea quando la Luna è sul meridiano, ma si vede che nei fatti ciò non è vero. In ogni luogo della Terra l'alta marea è sfasata rispetto al passaggio della Luna, di una quantità fissa ma diversa da un posto dall'altro. Una delle cause della variazione è l'attrito: l'onda di marea non può seguire istantaneamente il moto apparente della Luna (dovuto in realtà principalmente alla rotazione terrestre): per questo motivo resta indietro.

Ma non è tutto: se guardate ad es. i dati relativi alla marea sulla costa africana dell'Atlantico, dalla Liberia al Marocco, dove pure la longitudine cambia di poco, si vede che l'alta marea è sfasata di diverse ore. Qui la spiegazione è un'altra: è la forza di Coriolis. Bisogna infatti pensare che la marea non è solo un sollevamento dell'acqua: se l'acqua si alza in un posto e si abbassa in un altro, ci dev'essere dell'acqua che si sposta dal secondo posto al primo, ossia una corrente di marea. Quest'acqua che si muove sta sulla Terra (un rif. rotante) e sente la forza di Coriolis, quindi viene deviata verso destra (nell'emisfero nord). Il risultato è lo sfasamento che dicevo sopra.

Un fenomeno diverso si ha alle foci dei fiumi: negli estuari la corrente di marea s'insinua entroterra, e man mano che l'estuario si restringe il livello della marea aumenta. Infine, in certi casi ci sono veri e propri fenomeni di risonanza, con le frequenze proprie di oscillazione di masse d'acqua delimitate, come in golfi o stretti.

Questo era solo un velocissimo accenno per mostrare perché i fenomeni reali della marea si possono scostare moltissimo dai semplici calcoli che abbiamo fatto.

Maree e curvatura

Vediamo ora come le forze di marea sono legate alla curvatura dello spazio-tempo. Ritorniamo all'ascensore di Einstein: abbiamo detto più volte che nell'ascensore la forza

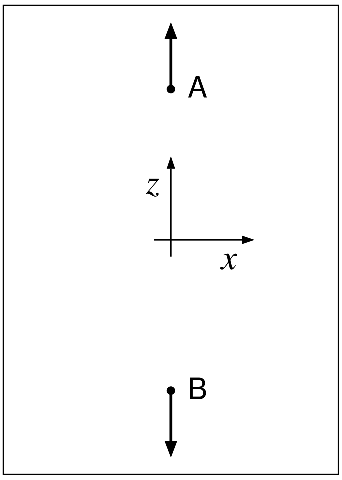

fig. 10–2

gravitazionale non si cancella completamente. Se lascio libere le due palline, quella in alto si muove in su e l'altra va in giù; se invece le voglio tenere ferme debbo applicare una forza, che naturalmente dovrà compensare la forza di marea: sarà una forza molto piccola, ma non nulla.

Il calcolo della forza si fa esattamente allo stesso modo come quello già fatto per la forza di marea sulla Terra, dovuta al Sole. Con riferimento alla fig. 10–2, basta sostituire nel ragionamento precedente il campo gravitazionale della Terra a quello del Sole. Il risultato sarà una formula del tutto simile alla (10–1), con l'unico cambiamento che M starà a indicare la massa della Terra, e al posto di D (distanza Terra–Sole) dovremo scrivere R (raggio della Terra):

$$g_{\text{marea}} = \frac{2GMz}{R^3} \qquad (10\text{–}2)$$

Esaminiamo il moto di queste palline in un diagramma spazio-tempo (fig. 10–3). Supponendo che siano inizialmente ferme, le due curve orarie partono entrambe orizzontali, ma poi divergono: ne segue che se misuriamo la loro distanza, questa cresce approssimativamente come il quadrato del tempo. Il moto relativo, almeno all'inizio, è uniformemente accelerato. Questo grafico ci servirà più avanti.

Ora un'affermazione importante: la cosa che ho appena detto *dimostra che lo spazio-tempo è curvo.* Riprendiamo un ragionamento che in parte abbiamo già fatto. Che vuol dire che la superficie della Terra è curva? Finora abbiamo esaminato il concetto di curvatura della superficie solo dal punto di vista delle carte geografiche. Abbiamo detto: dato che la superficie della Terra è curva, non è possibile rappresentarla su di un piano; non è possibile costruire una carta geografica che non abbia deformazioni. Però se voglio dare una definizione di curvatura, e possibilmente anche una misura di curvatura, come posso procedere?

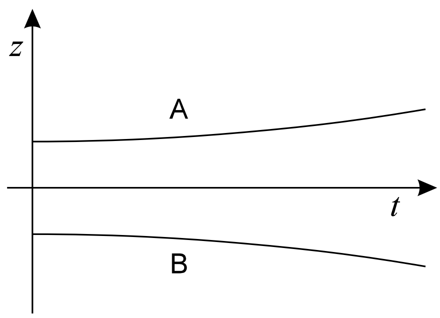

fig. 10–3

Se ci si chiede oggi di provare che la Terra è curva, probabilmente la risposta più semplice è: guardando la Terra dalla Luna si vede che è una palla. (È ovvio che questo metodo non è il primo con cui si è scoperta la curvatura terrestre, ma è certamente il più diretto.) Un altro metodo, assai più antico, è quello di Eratostene, che in un certo senso è l'inverso: col primo metodo si guarda la Terra da fuori; seguendo Eratostene si sta sulla Terra e si guarda verso fuori: si guarda il Sole e l'ombra che esso produce.

Si può fare anche con le stelle: per es. si misura l'altezza della stella polare da diversi punti della superficie terrestre; si vede che l'altezza cambia e da qui si ricava il raggio della Terra.

Però i due metodi hanno in comune che entrambi richiedono di pensare la superficie della Terra immersa nello spazio tridimensionale: noi vediamo che la superficie è curva perché la possiamo confrontare con qualcosa che sta fuori, in una terza dimensione.

Finché siamo interessati alla Terra, non ci sono obiezioni. Il fatto è che tutto questo ragionamento sulla superficie della Terra lo stiamo facendo per scoprire che cosa vuol dire che lo spazio-tempo è curvo. Ora c'è una differenza essenziale fra la superficie della Terra e lo spazio-tempo: mentre possiamo pensare di uscire dalla Terra, o di guardare fuori dalla Terra, *non possiamo uscire* dallo spazio-tempo o *guardare fuori* dallo spazio-tempo.

Quindi i metodi visti non possono essere adattati per fare una misura della curvatura dello spazio-tempo. Lo spazio-tempo è tutto quello che c'è: non si può uscirne fuori, né guardare fuori. Occorrerà inventare altri metodi, buoni per la superficie terrestre, ma che richiedano solo misure fatte sulla superficie. Il nostro problema è quindi: come si fa a misurare la curvatura della superficie terrestre senza uscire dalla superficie? Ci sono diversi modi (in tutti, per semplicità, assumo la Terra sferica, almeno all'inizio).

Come misurare la curvatura

Primo metodo. Tracciamo la curva formata da tutti i punti che hanno una stessa distanza r dal polo nord (sarà ovviamente un parallelo). Misuriamo la lunghezza l della circonferenza. Se R è il raggio della sfera, non è difficile vedere che

$$l = 2\pi R \sin(r/R).$$

Dunque dalla misura di l e di r posso ricavare R, anche se in pratica il calcolo non è semplicissimo. Se $r \ll R$ si può sviluppare in serie di potenze il seno e si ottiene approssimativamente

$$l = 2\pi r \left(1 - \frac{r^2}{6R^2}\right)$$

che è più semplice da risolvere rispetto a R.

Comunque sia, la curvatura si manifesta qualitativamente nel fatto che $l < 2\pi r$; poi la formula permette di ricavare R dalla misura di r e di l, e posso anche dare questa come *definizione* di R (con qualche cautela su cui non mi soffermo).

Un secondo metodo è quello del triangolo sferico. Sulla superficie della Terra traccio un triangolo sferico, i cui lati sono archi di cerchio massimo. Misuro gli angoli interni e li sommo. Si sa che la somma dei tre angoli non è π ma $\pi + \varepsilon$, dove ε si chiama *eccesso sferico*. E si sa anche che $\varepsilon = A/R^2$, dove A è l'area del triangolo: l'eccesso sferico è tanto maggiore quanto più grande l'area del triangolo. È chiaro quindi che dalla misura degli angoli e dall'area posso ricavare il raggio. Non è un metodo molto pratico, ma concettualmente funziona.

Qui mi sembra opportuna un'avvertenza. Il discorso del triangolo sferico potrebbe ricordare quello che dicemmo in una delle primissime lezioni, a proposito della misura di Gauss: la triangolazione fra tre cime di montagne. Ma invece non c'entra niente. Lì il problema era se i raggi di luce, che normalmente intendiamo come rette nello spazio euclideo, formassero un triangolo euclideo o no. I raggi di luce non erano obbligati a seguire la curvatura terrestre.

Qui invece siamo ancorati alla superficie, i lati del triangolo sono tracciati sulla superficie della sfera (sono archi di cerchio massimo) e gli angoli di cui si parla sono angoli fra archi di cerchio massimo, o se preferite fra le tangenti a due cerchi massimi nel punto d'intersezione. Quindi abbiamo a che fare con triangoli sferici. L'eventuale curvatura dello spazio intorno alla Terra, di cui si preoccupò Gauss, qui non c'entra: lo spazio tridimensionale è euclideo; è la superficie della sfera che non lo è.

Questi due metodi sono abbastanza naturali e facili da pensare, ma non sono utili per il nostro scopo; vediamo quindi un terzo metodo. È altrettanto poco pratico dei precedenti se lo scopo è di misurare davvero il raggio della Terra, ma come vedremo funziona meglio per la nostra applicazione allo spazio-tempo.

La deviazione delle geodetiche

Prendiamo due punti A e B sull'equatore, a distanza ξ tra loro (fig. 10–4). Partendo da quei due punti, ci spostiamo lungo i meridiani che vanno da A e da B verso i poli. Percorriamo lungo i due meridiani uno stesso tratto s: arriveremo in due punti A′

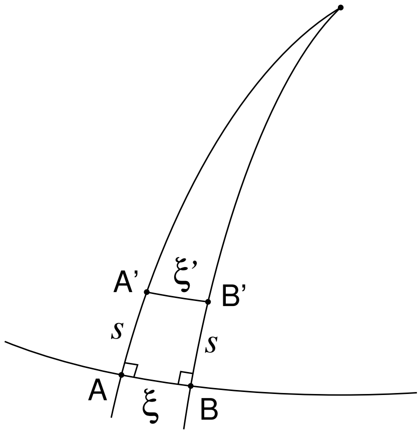

fig. 10–4

e B$'$. Ora misuriamo la distanza ξ' fra questi due punti: ovviamente troveremo che $\xi' < \xi$.

Quantitativamente si ha $\xi' = \xi\,\cos(s/R)$ e da qui si può calcolare R. Si arriva a questa formula ragionando così: l'angolo diedro fra i due semipiani che contengono i nostri meridiani è ξ/R; il raggio del parallelo che unisce A$'$ con B$'$ è $R' = R\cos(s/R)$. Allora

$$\xi' = R'\,\frac{\xi}{R} = \xi\cos(s/R). \tag{10–3}$$

Però c'è un errore.

L'errore è che la distanza fra A$'$ e B$'$ non va misurata lungo il parallelo, ma lungo l'arco di cerchio massimo che li unisce: questo rispetto al parallelo corre un po' più in alto, verso il polo. Si tratta di un fatto ben noto a chi naviga, in mare o in aria. Se si prendono due luoghi sulla Terra, molto lontani tra loro e circa alla stessa latitudine, e si guarda che rotta percorrono gli aerei per andare da un luogo all'altro, si scopre che passano vicino al polo. Per esempio, la rotta aerea da Londra per il Giappone passa sull'Alaska, nonostante che tanto Londra quanto Tokio siano molto più a sud dell'Alaska.

L'errore c'è, ma non è importante. Volendo possiamo scrivere la formula giusta, che è

$$\sin\frac{\xi'}{2R} = \sin\frac{\xi}{2R}\,\cos\frac{s}{R}\,; \tag{10–4}$$

ma a me interessa applicare l'idea per piccoli valori di ξ. Dato che fra la (10–3) e la (10–4) le correzioni sono solo al terzo ordine, posso tranquillamente confonderle: al posto di $\sin(\xi'/2R)$ scrivere $\xi'/2R$ ecc. Il vantaggio della (10–3) è che si dimostra in modo elementare, mentre la (10–4) richiede la trigonometria sferica. Non mi soffermo a spiegare come ci si arriva.

Ancora più interessante è una terza versione della formula, che va bene se non solo ξ è piccolo ma è piccolo anche s, cioè se mi sposto poco dall'equatore. Allora, sviluppando in serie la (10–3):

$$\xi' = \xi\left(1 - \frac{s^2}{2R^2}\right).$$

Si vede che la diminuzione della distanza va col quadrato di s. La ragione è (scusate il gioco di parole) che all'inizio i due meridiani sono paralleli: partono entrambi ad angolo retto rispetto all'equatore. Quindi al prim'ordine la distanza non cambia.

Infine una quarta versione, che sebbene appaia più complessa è poi la più utile:

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = -\frac{1}{\xi}\,\frac{d^2\xi}{ds^2}\,. \tag{10–5}$$

La possiamo ricavare senza difficoltà dalla (10–3), derivando due volte. Notate che ora ho scritto R_c invece di R: la ragione è duplice. Una è che voglio sottolineare, con l'indice $_\mathrm{c}$, che sto parlando di un *raggio di curvatura* (che per la sfera non è che il solito raggio). La seconda, più spicciola, è che fra poco dovrò confrontare la (10–4) con un'altra formula, dove R ha un altro significato.

La (10–5) fornisce $1/R_\mathrm{c}^2$ come derivata seconda (la derivata seconda si spiega, perché la dipendenza di ξ da s è quadratica). La difficoltà è che si tratta di una relazione differenziale: in pratica ciò significa che occorre fare misure solo in una piccola regione attorno al punto in cui interessa misurare il raggio. Ma questa è anche la ragione per cui è utile: questo carattere "locale" permette di generalizzarla, ossia di applicarla a superfici di forma qualsiasi.

Possiamo prendere la (10–5) come definizione generale del raggio di curvatura di una superficie; quella che si chiama *curvatura gaussiana*. La tecnica rimane quella già vista: scelto un punto, si fa partire un meridiano (se si tratta di una superficie qualunque non posso parlare di meridiano: dovrei dire una *geodetica*, ma preferisco sorvolare per ora); ci si sposta di un piccolo tratto in direzione perpendicolare al meridiano tracciato, e dal nuovo punto così raggiunto si fa partire un altro meridiano (geodetica). Si studia come le due geodetiche (i due meridiani) si avvicinano: si calcola l'espressione (10–5) e si ottiene la curvatura. Notate che nella formula c'è un segno meno: la ragione è che la distanza diminuisce, mentre $1/R_\mathrm{c}^2$ è certamente positivo.

Per la sfera è ovvio che se fissato il punto iniziale si cambia il polo (in una sfera tutti i punti sono equivalenti, quindi ogni punto può fare da polo) e si lavora coi nuovi meridiani e col nuovo equatore, si otterrà lo stesso risultato. Non è assolutamente ovvio, e c'è voluto Gauss per scoprirlo, che lo stesso è vero per ogni superficie. La direzione in cui fate partire le geodetiche non è importante: in un dato punto c'è *una sola curvatura* della superficie, che si ottiene sempre dalla (10–5), comunque si scelgano le geodetiche.

Deviazione delle geodetiche nello spazio-tempo

Forse non è ancora molto chiaro che cosa c'entri tutto questo con lo spazio-tempo; ma torniamo all'ascensore di Einstein e al grafico che descrive la distanza delle palline (fig. 10–3).

Se non ci fosse la forza di marea, le palline resterebbero ferme e la loro distanza non cambierebbe. Invece cambia: abbiamo già visto il calcolo. In un RI in assenza di gravità ecc., il moto naturale dovrebbe essere rettilineo uniforme: il grafico della curva oraria nello spazio-tempo sarebbe rettilineo. In particolare, se le palline sono inizialmente ferme, restano ferme: le loro coordinate restano costanti e i grafici sono due rette parallele.

Sulla Terra non è possibile procedere diritti e mantenere la stessa distanza fra i due meridiani, perché la superficie è curva; nello spazio-tempo non è possibile avere moti naturali (dritti) a distanza costante. Ce lo mostra l'ascensore in caduta libera: le palline lasciate libere non restano ferme e i loro diagrammi orari non sono rette parallele. Uno curva verso l'alto e uno verso il basso. Ma se succede questo, vuol dire che lo spazio-tempo è curvo.

Quindi *forza di marea e spazio-tempo curvo sono due modi di vedere la stessa cosa.* Dal punto di vista newtoniano voi dite che le palline cominciano a muoversi e quindi le curve orarie divergono, perché c'è la forza di marea. Dal punto di vista di Einstein il discorso è semplicemente: non è possibile disegnare due grafici di moti naturali che siano due rette (geodetiche) parallele, perché lo spazio-tempo è curvo: non ci sono rette parallele in uno spazio-tempo curvo.

Come vedete, si tratta di un'idea piuttosto semplice, o almeno così appare oggi; l'analogia con la Terra ci aiuta. Ma non dimentichiamo mai che c'è voluto Einstein.

A questo punto siamo anche in condizioni di calcolare la curvatura dello spazio-tempo. Riprendiamo la formula (10–2) della forza di marea

$$g_\mathrm{marea} = \frac{2GM}{R^3}\,z$$

dove R è il raggio della Terra, M la sua massa, z la quota rispetto al centro dell'ascensore. (Attenzione: io continuo a dire "forza di marea" ma in realtà quello che ho scritto è un campo, ossia una forza per unità di massa.) Se questa è la forza di marea (per unità di massa) l'accelerazione della pallina sarà esattamente uguale.

Com'è giusto, l'accelerazione dipende da z: se la pallina è al di sopra del centro dell'ascensore accelererà verso l'alto, se è al di sotto accelererà verso il basso. La legge del moto della pallina sarà

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2GMz}{R^3} \tag{10–6}$$

che ora possiamo confrontare con la (10–5), che ci dava la deviazione delle geodetiche, e dalla quale si ricava

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{\xi}{R_\mathrm{c}^2}. \tag{10–7}$$

Ora guardate le (10–6) e (10–7): in (10–7) c'è la derivata seconda di ξ, che è la distanza dei due meridiani, fatta rispetto a s, che è lo spazio percorso sul meridiano. Nella (10–6) abbiamo la derivata seconda di z, che è la distanza di una pallina dal centro dell'ascensore (o se volete la metà della distanza dall'altra pallina) fatta rispetto al tempo che passa.

Il secondo membro della (10–7) mostra che questa derivata è proporzionale a ξ; nella (10–6) è proporzionale a z. Il coefficiente nella (10–7) è il reciproco del quadrato del raggio di curvatura della superficie. E nella (10–6)?

Posso già quasi (sul "quasi" torno fra un momento) dire che questo coefficiente $2GM/R^3$ nella (10–6) ha la stessa funzione di $1/R_\mathrm{c}^2$ nella (10–7). Le due formule sono strettamente analoghe: in un caso ho due meridiani che si avvicinano, perché la superficie della Terra è curva; nell'altro caso ho le curve orarie delle palline che si allontanano, perché lo spazio-tempo è curvo. La misura della curvatura si fa allo stesso modo, quindi le due formule hanno la stessa funzione.

Perché ho detto che è "quasi" la stessa? In primo luogo perché nella (10–6) si deriva rispetto al tempo e nella (10–7) rispetto allo spazio. Ma questo per noi non è un problema. Conosciamo bene la ragione storica: abbiamo cominciato a costruire la fisica misurando tempo e spazio con unità diverse. Perciò dobbiamo solo ridurre il tempo a unità spaziali, cosa che si ottiene dividendo la (10–6) per c^2:

$$\frac{d^2z}{c^2dt^2} = \frac{2GMz}{c^2R^3}. \tag{10–8}$$

Ora c^2dt^2 della (10–8) è proprio l'equivalente del ds^2 nella (10–7), e questo mi autorizza a scrivere

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = \frac{2GM}{c^2R^3} \tag{10–9}$$

dove R_c è il raggio di curvatura cercato.

Curvatura dello spazio-tempo attorno alla Terra

È dunque vero che la forza di marea ci permette di calcolare la curvatura dello spazio-tempo. A destra nella (10–9) figurano: la costante di gravitazione G, la velocità della luce, la massa M e il raggio R della Terra.

Avrete certo notato il segno meno, che c'è nella (10–7) e non nella (10–6). Il punto è che non tutte le superfici hanno curvature dello stesso segno: la sfera ha curvatura positiva per definizione, ma se prendete una superficie "di tipo iperbolico," ad esempio una sella, trovate che ha curvatura negativa. Quindi non c'è motivo di aspettarsi che la derivata $d^2\xi/ds^2$ debba risultare sempre negativa (che le geodetiche si debbano sempre avvicinare): può essere anche positiva, se le geodetiche si allontanano.

Quando la derivata è negativa si dice che la curvatura è positiva; questa è solo una convenzione, scelta per dare curvatura positiva alla sfera. Di conseguenza, quando la derivata è positiva si dovrà dire che la superficie ha curvatura negativa. Dunque lo spazio-tempo ha curvatura negativa.

Possiamo anche toglierci la curiosità di calcolare quanto viene R_c. Non è poi così importante, ma si trova $1.7 \cdot 10^{11}$ m, non molto diversa dalla distanza Terra–Sole. È un puro caso, perché la curvatura dello spazio-tempo in vicinanza della Terra dipende solo dalla Terra; che la Terra sia più o meno lontana dal Sole non conta niente. Però può avere un'utilità mnemonica sapere che R_c è all'incirca un'unità astronomica.

È invece importante notare che nell'espressione della curvatura compare M/R^3, che ha a che fare con la densità della Terra. Sfruttiamo questo fatto, e troviamo:

$$\frac{1}{R_c^2} = \frac{2GM}{c^2R^3} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{G\varrho}{c^2}. \qquad (10\text{–}10)$$

A parte il fattore numerico $8\pi/3$ e le costanti fondamentali G e c, la sola cosa che conta per calcolare il raggio di curvatura dello spazio-tempo alla superficie della Terra è la densità media ϱ della Terra. (Dico "media" perché la densità della Terra varia dal centro alla superficie, com'è noto.) Allo stesso modo, la curvatura in vicinanza del Sole dipenderà solo dalla densità media del Sole. Questa è minore, ma non di molto, di quella della Terra; quindi i raggi di curvatura dello spazio-tempo vicino alla Terra o vicino al Sole non sono molto diversi.

La ragione dell'importanza della (10–10), a parte che ci permette questi raffronti fra Terra e Sole, è che essa non è altro che una versione molto semplificata, ma che contiene tutta la sostanza, delle equazioni della RG di Einstein.

L'idea fondamentale della RG è che la curvatura dello spazio-tempo è prodotta dalla presenza di materia, e che la materia determina la curvatura proprio in questo modo: *l'inverso del quadrato del raggio di curvatura è proporzionale alla densità della materia.* Naturalmente le vere equazioni di Einstein sono alquanto più complicate: al posto di $1/R_c^2$ vi figura il cosiddetto "tensore di Einstein," al posto della densità ϱ il "tensore energia-impulso." Ciò diventa essenziale quando si vogliono fare i conti esatti per ricavarne tutti gli effetti previsti dalla RG; ma per i nostri scopi quanto ho detto può essere sufficiente.

Come vedete si riesce ad arrivare al contenuto fondamentale delle idee di Einstein sulla RG con un ragionamento che non presenta particolari difficoltà, e non richiede conoscenze avanzate. Certo il difficile è non perdersi per strada nel ragionamento, ma le formule, i calcoli o le nozioni di base che bisogna avere non sono niente di speciale.

Curvatura e B–L

Alla curvatura dello spazio-tempo ci si può arrivare per una strada diversa dalla forza di marea: con l'esperimento B–L nel satellite. Nella lezione passata abbiamo visto che l'esperimento fatto nel satellite mostrerebbe un effetto piccolissimo ma non nullo. Abbiamo anche visto (9–4) che in generale

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta V}{c^2}$$

dove ΔV è la variazione del potenziale gravitazionale, ossia il lavoro per unità di massa della forza di gravità, cambiato di segno. La forza di marea (sempre per unità di massa) nel satellite vale $2GMz/R^3$; la differenza di potenziale è $-GMz^2/R^3$. Quindi nel satellite

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = -\frac{GMz^2}{c^2R^3} \qquad (10\text{–}11)$$

Ricordate: la forza di marea non è costante, ma è proporzionale a z; quindi bisogna integrare. Avevamo pure notato il segno opposto: dal centro verso l'esterno del satellite non si ha redshift, ma blueshift.

Guardiamo ora la fig. 10–5, che riproduce il grafico dell'esperimento (è la stessa della (9–5)): anche qui ho due curve che dovrebbero essere parallele e che invece non lo sono, com'è mostrato dal fatto che i due lati orizzontali del presunto parallelogramma hanno lunghezza diversa. Ci troviamo quindi nella stessa situazione del grafico delle forze di marea.

Di nuovo ho due geodetiche che partono parallele, ma poi si avvicinano o si allontanano. In questo caso si avvicinano, come si vede dal segno meno; quindi il raggio di curvatura, calcolato con la solita formula

$$\frac{1}{R_{\rm c}^2} = -\frac{1}{\xi}\,\frac{d^2\xi}{ds^2}$$

con $\tau(z)$ dato dalla (10–11) al posto di $\xi(s)$, viene

$$\frac{1}{R_{\rm c}^2} = -\frac{1}{\tau}\,\frac{d^2\tau}{dz^2} = \frac{2GM}{c^2R^3}$$

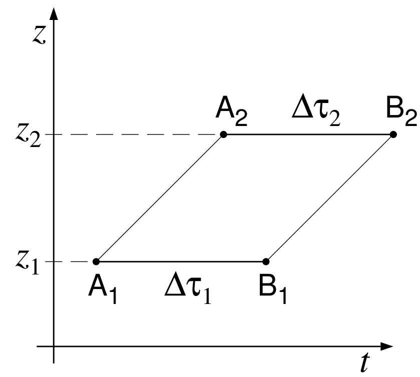

fig. 10–5

cioè lo stesso trovato per l'altra via.

È però necessario un commento. Parlando della forza di marea noi abbiamo confrontato le accelerazioni delle palline; da queste abbiamo ottenuto due curve orarie: una che andava in su e una che andava in giù (fig. 10–3). Abbiamo percorso queste curve, che sarebbero delle rette se lo spazio tempo fosse piatto, e abbiamo studiato come varia la loro distanza: abbiamo misurato la differenza delle z in funzione di t.

Nell'esperimento B–L sul satellite noi mandiamo segnali da una z all'altra, e ne misuriamo lo scostamento in t. In realtà qui c'è una differenza, perché non possiamo mandare i segnali in verticale nel grafico 10–4: vorrebbe dire mandarli a velocità infinita. Ci dobbiamo rassegnare a mandarli alla velocità della luce, quindi obliqui nello spazio-tempo; però quello che c'interessa è che varia la z, e scopriamo che la distanza in tempo non resta costante.

Dunque: mentre prima misuravamo la Δz in funzione del tempo, ora misuriamo la $\Delta\tau$ in funzione di z. Ma Gauss ha mostrato che nel caso di curvatura di una superficie, i "meridiani" usati per misurare la curvatura si possono prendere in qualunque direzione, e la curvatura è sempre la stessa. Ora abbiamo visto che anche nello spazio-tempo è la stessa cosa.

Nello spazio-tempo, in un primo esperimento ho preso come "meridiani" (in realtà geodetiche) delle curve che vanno nella direzione di t (tempo); nel secondo ho preso delle geodetiche che vanno nella direzione di z. Così si vede che due esperimenti che sembrano totalmente diversi in realtà misurano la stessa cosa, com'è mostrato dalla formula finale, che è la stessa. *Entrambi gli esperimenti misurano la curvatura dello spazio-tempo.*

In verità, quel teorema di Gauss secondo cui la curvatura è la stessa in qualunque direzione si prendano le geodetiche, è vero solo in due dimensioni. Se le dimensioni sono più di due non basta un solo numero per caratterizzare le proprietà di curvatura della varietà. Ciò accade ovviamente per lo spazio-tempo: per descriverne completamente la curvatura occorre il tensore di Riemann. Questo tensore ha una sola componente indipendente in due dimensioni, ma più d'una se le dimensioni sono tre o più (nello spazio-tempo sono ben 20).

Ma una volta che ho scelto una particolare sezione bidimensionale dello spazio-tempo, se resto sempre su quella allora una sola curvatura è sufficiente. Noi abbiamo sempre lavorato nella sezione delle coordinate t e z: questo spiega perché il risultato sia sempre lo stesso. Ma se avessimo preso t e x avremmo potuto trovare un risultato diverso. D'altronde questo l'avevamo già visto, se ricordate: avevo detto che la forza di marea in direzione x è diversa che in direzione z...

D: Nell'espressione del raggio di curvatura compare G che misura la grandezza della forza d'interazione nella legge di Newton. Che ci sta a fare?

F: Perché non ti chiedi come fa a dipendere dalla velocità della luce? Che c'entrano le onde e.m.? Invece c non ci preoccupa, perché basta usare come unità di misura al posto del metro il secondo-luce e si elimina subito. Anche G si può eliminare: basta usare la giusta unità di massa. Per informazione: questa unità è tale che un metro equivale a circa 220 masse terrestri. Usiamo quella come unità di massa, e G sparisce.

Problemi

1. Ripetere il calcolo della forza di marea solare, per un punto situato nel piano per il centro della Terra, perpendicolare alla congiungente Terra–Sole.

2. Stimare l'altezza delle maree solari.

3. Discutere l'influenza del Sole e della Terra sul moto della Luna.

4. Partendo dal problema 1, calcolare la curvatura della sezione (x, t).

Risposte

Problema 1. (Forza di marea sul piano perpendicolare):

Con riferimento alla fig. 10–1, assunto un asse x per il centro della Terra e perpendicolare a z, il vettore $\vec{g}$ (fig. 10–6) ha le seguenti componenti:

$$g_x = -\frac{GMx}{(D^2 + x^2)^{3/2}} \qquad g_z = -\frac{GMD}{(D^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Invece la forza apparente ha solo la componente z già vista.

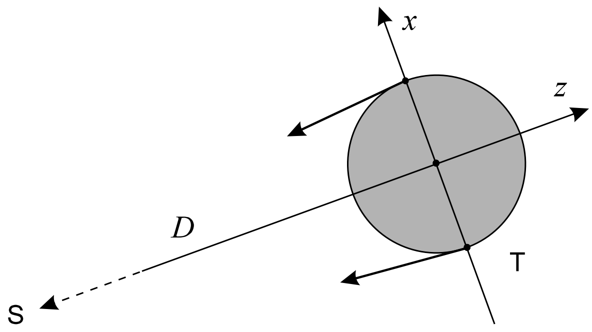

fig. 10–6

Lo sviluppo di g_z in serie di potenze di x dà $-GM/D^2 + \mathrm{O}(x^2)$; il primo termine è compensato dalla forza apparente, mentre il secondo è trascurabile. Per quanto riguarda g_x lo stesso sviluppo dà

$$g_x = -\frac{GM}{D^3}\,x + \mathrm{O}(x^3)\,.$$

Dunque la forza di marea è diretta verso il centro della Terra, e ha grandezza metà di quella calcolata lungo l'asse z.

Problema 2. (Altezza delle maree solari):

Il modo più diretto per risolvere il problema è di sfruttare un teorema della statica dei fluidi: in un campo di forza conservativo le superfici di ugual pressione, e in particolare la superficie libera di un liquido, sono equipotenziali.

Trascuriamo l'effetto della rotazione terrestre, che aggiungerebbe un potenziale centrifugo, comunque costante in un dato punto della Terra. Allora dobbiamo tener conto solo del potenziale gravitazionale della Terra

$$V_{\text{grav}} = -\frac{GM_\oplus}{r} \tag{10–12}$$

e del potenziale della forza di marea, che lungo l'asse x vale

$$V_{\text{marea}}(x,0,0) = \frac{GM_\odot}{2D^3}\,x^2$$

e lungo l'asse z

$$V_{\text{marea}}(0,0,z) = -\frac{GM_\odot}{D^3}\,z^2.$$

Siano ora h_x, h_z le altezze della marea rispetto alla superficie di riferimento $r = R$ (h_x sarà negativa). Possiamo trascurare la dipendenza del potenziale di marea da h_x, h_z, e approssimare al primo ordine la (10–12):

$$V_{\text{grav}} = \begin{cases} -\dfrac{GM_\oplus}{R}\left(1 - \dfrac{h_x}{R}\right) & \text{lungo l'asse } x \\[2ex] -\dfrac{GM_\oplus}{R}\left(1 - \dfrac{h_z}{R}\right) & \text{lungo l'asse } z. \end{cases}$$

Imponendo l'uguaglianza del potenziale $V_{\text{grav}} + V_{\text{marea}}$ si ha

$$-\frac{GM_\oplus}{R}\left(1 - \frac{h_x}{R}\right) + \frac{GM_\odot R^2}{2D^3} = -\frac{GM_\oplus}{R}\left(1 - \frac{h_z}{R}\right) - \frac{GM_\odot R^2}{D^3}$$

da cui

$$h_z - h_x = \tfrac{3}{2}\,R\,\frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{R}{D}\right)^3 = 25\,\text{cm}.$$

Problema 3. (Il moto della Luna):

A. L'effetto della Terra sul moto della Luna è del tutto ovvio: la Luna gira attorno alla Terra, di cui sente l'attrazione gravitazionale. Al più c'è da osservare una cosa già detta: dato che la massa della Luna è piccola, ma non piccolissima (circa 1/80 di quella della Terra) è più corretto dire che Terra e Luna girano insieme attorno al comune centro di massa G.

Tale centro di massa si trova a una distanza dal centro della Terra che è circa 1/80 della distanza Terra–Luna, che vale circa 384 000 km (distanza media, dato che il moto della Luna non è esattamente circolare). Dunque G dista 4800 km dal centro della Terra, ossia *è interno alla Terra.*

Questo non è un problema: l'unico inconveniente che ne deriva sta nella spiegazione della forza di marea lunare sulla Terra, che diventa un po' più complicata perché bisogna stare bene attenti ai versi delle forze. Ma non è necessario occuparcene.

B. Passiamo all'effetto del Sole. Il primo effetto evidente è che Terra e Luna sono soggette all'attrazione solare; quindi G si muove in orbita attorno al Sole, mentre Terra e Luna girano attorno a G.

Diventa allora più complicato visualizzare l'effettiva traiettoria della Terra e della Luna: si trova a volte in qualche libro una figura come la fig. 10–7, del tutto errata, o come la fig. 10–8, anch'essa errata ma in modo più sottile.

Vediamo perché le due figure sono sbagliate. Quanto alla fig. 10–7, sarebbe giusta se in qualche momento la Luna si trovasse ad avere, in un rif. solidale al Sole, velocità di verso opposto a quella di G. Ma è facile verificare, prendendo i dati delle varie orbite, che la velocità di G vale circa 30 km/s, mentre quella della Luna rispetto a G è circa 1 km/s. Dunque la velocità della Luna in un rif. solidale al Sole oscillerà tra 29 e 31 km/s: 31 quando la Luna è più lontana dal Sole (luna piena), 29 quando è più vicina (luna nuova).

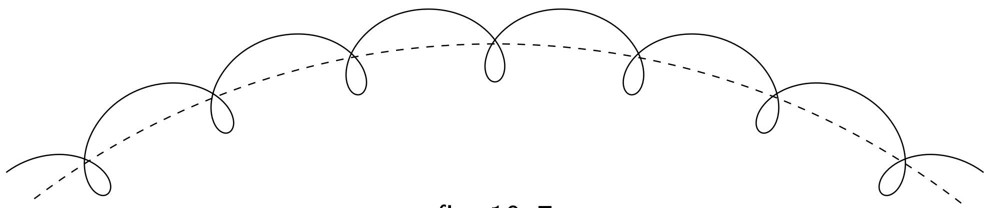

fig. 10–7

Nella fig. 10–8 la traiettoria della Luna mostra dei tratti in cui è convessa verso il Sole, e altri in cui è invece concava. Ora il vettore accelerazione è sempre diretto nel verso della concavità, quindi la figura sarebbe giusta se in un punto come A l'accelerazione fosse diretta verso l'esterno, ossia se la forza di attrazione della Terra superasse quella del Sole.

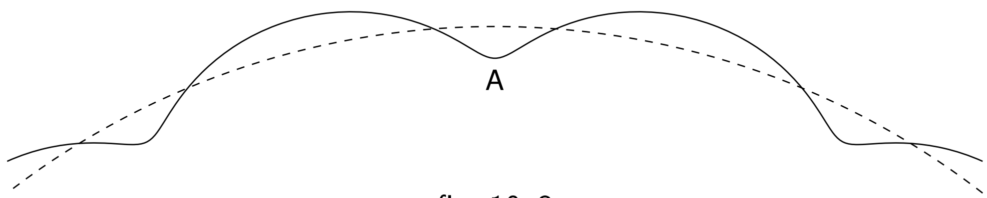

fig. 10–8

Il rapporto delle distanze Terra–Luna e Sole–Luna è circa 1/390, mentre il rapporto delle masse di Sole e Terra è circa $3.3 \cdot 10^5$. Tenuto conto che la forza va come l'inverso del quadrato della distanza, si vede che la forza del Sole sta a quella della Terra nel rapporto $(3.3 \cdot 10^5)/390^2$ che vale circa 2. Dunque la risultante delle forze che agiscono sulla Luna *è sempre diretta verso il Sole*, e perciò la traiettoria della Luna *è sempre concava verso il Sole*.

È solo il raggio di curvatura che cambia, nel rapporto circa 1 a 3, tra la fase di luna piena, dove Terra e Sole tirano dalla stessa parte, e quella di luna nuova, dove invece la Terra tira in verso opposto al Sole. C'è da dire che la figura corretta è piuttosto difficile da fare (fig. 10–9), e non ricordo di averla mai vista.

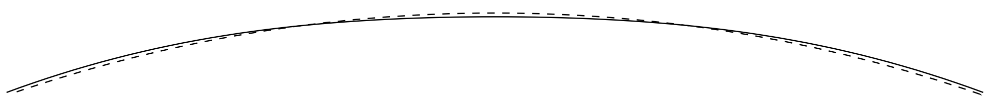

fig. 10–9

Va da sé che tutto quanto detto vale per il caso Terra–Luna; per altri pianeti e satelliti i numeri sono diversi, e anche la traiettoria del satellite può riuscire diversa. Per i satelliti di Marte è giusta la fig. 10–8. Per i satelliti galileiani di Giove c'è maggiore varietà: per Io ed Europa è giusta la fig. 10–7, per Ganimede e Callisto la fig. 10–8.

C. Esiste infine un effetto del Sole sulla Luna che ha molto più a che fare con l'argomento di questa lezione: la forza di marea.

Nella lezione 6 ho accennato al fatto che in un rif. solidale con la Terra, che è in caduta libera nel campo del Sole, la solita cancellazione tra forza gravitazionale del Sole e forza apparente non è esatta per la Luna, perché il campo gravitazionale del Sole nella posizione della Luna non è uguale a quello sulla Terra, e varia al variare della posizione della Luna stessa.

A parte la precisazione, che ora abbiamo vista, che in realtà è piuttosto G a essere in caduta libera, il discorso è esattamente lo stesso che abbiamo fatto per spiegare la forza di marea sulla Terra; possiamo quindi servirci di quei calcoli per stimare l'effetto sulla Luna.

Basta riprendere la (10–1), e applicarla alla Luna, invece che a un corpo sulla superficie della Terra. Ciò richiede solo di sostituire al posto di z la distanza Terra–Luna, che chiamerò d: si ottiene

$$g_{\mathrm{marea}} = \frac{2GM_\odot d}{D^3}.$$

Per capire quanto sia importante, dobbiamo confrontare questa forza con l'attrazione terrestre, che vale

$$g_\oplus = \frac{GM_\oplus}{d^2}.$$

Il rapporto è

$$\frac{g_{\mathrm{marea}}}{g_\oplus} = 2\,\frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{d}{D}\right)^3.$$

Mettendo i numeri, si trova $1.1 \cdot 10^{-2}$, che non è certo poco: dobbiamo aspettarci scostamenti dell'ordine dell'1% nel moto della Luna rispetto alle leggi di Keplero. Per esempio, che la Luna possa trovarsi avanti o indietro sulla sua orbita di qualcosa come 1°, ed è proprio ciò che accade. Inoltre il perigeo lunare non ha direzione fissa, ma ruota facendo un giro in circa 9 anni, e anche il piano dell'orbita ruota in circa 19 anni. Queste irregolarità nel moto della Luna erano già note agli astronomi greci.

Problema 4. (Curvatura della sezione (x,t)):

Questo è molto semplice: visto che la forza di marea in direzione x è metà che in direzione z, e ha verso opposto, lo stesso accade per la curvatura dello spazio-tempo. In grandezza vale la metà, ed è positiva, dal momento che nella sezione (z,t) l'avevamo trovata negativa.