Un tabù da cancellare

Programma

La *teoria generale della relatività*, comunemente nota come “relatività generale” (RG) ha ormai quasi 100 anni di esistenza; ha ricevuto numerose conferme, è una base essenziale per comprendere struttura ed evoluzione dell'universo.

Conserva tuttavia una fama di teoria complessa, piena di formalismi matematici astrusi. Di conseguenza sembra impossibile proporla nella scuola secondaria superiore.

D'altra parte i temi che tratta e la stessa aura di “mistero” che la circonda le conferiscono un fascino singolare, per cui ci sono anche tentativi di portare i ragazzi a contatto con alcune idee e risultati.

Ma questo non di rado viene fatto in forma di discorso (chiacchiere), secondo uno stile che non ha niente a che vedere con quello che dovrebbe (idealmente) essere l'insegnamento della fisica.

Non sono neppure rari dei veri e propri errori; il che si spiega, perché la padronanza della RG non è certo molto diffusa tra i fisici, anche maturi...

Che cosa si può fare?

Qui mi propongo di presentare (sommariamente) le idee fondamentali della RG e di delineare un percorso che ritengo praticabile, col solo ostacolo del tempo disponibile...

Un breve elenco di titoli

1. Il principio di equivalenza: caduta libera e riferimenti accelerati.
2. Applicazioni:

   a) la deflessione della luce

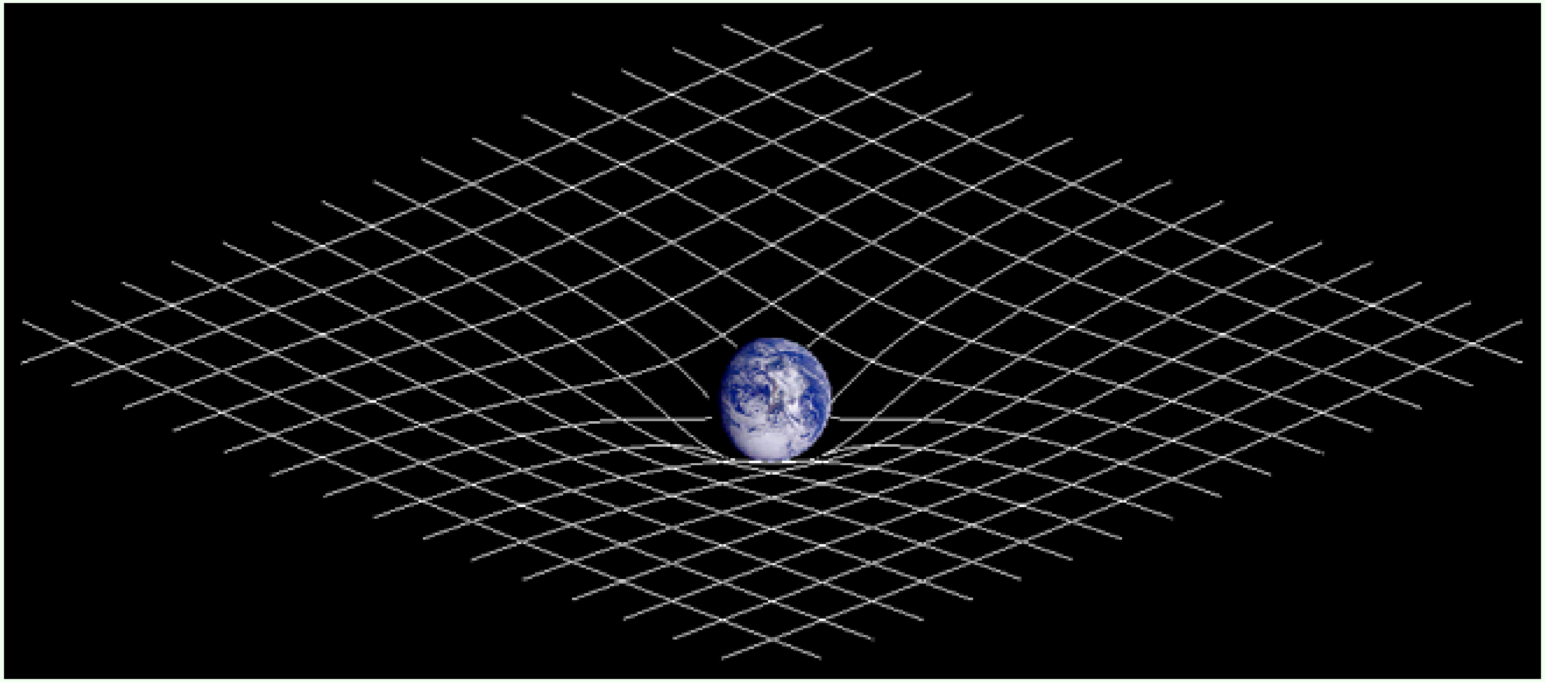
   b) il redshift gravitazionale.
3. Un esperimento moderno: Briatore e Leschiutta.
4. Lo spazio-tempo: i diagrammi spazio-tempo come carte geografiche.
5. Carattere *locale* del PE: le forze di marea.

   Le maree sulla Terra: effetto del Sole e della Luna
6. Lo spazio-tempo è curvo: la deviazione delle geodetiche.
7. Modelli di universo: il semplice esempio del modello FLRW a curvatura positiva.
8. Applicazione: il redshift cosmologico e la legge di Hubble.

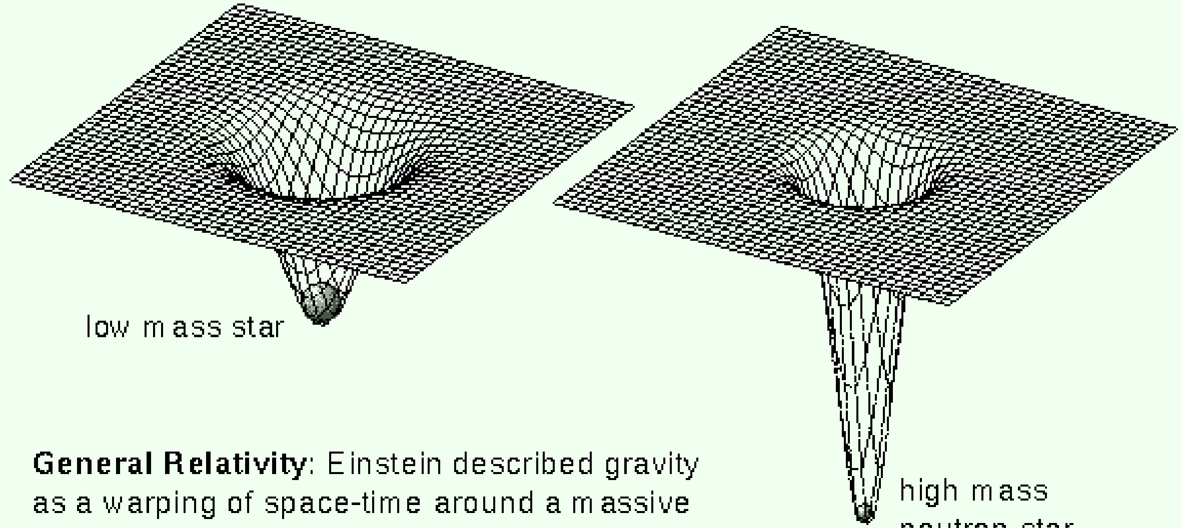
Gli errori: un paio di esempi

Il primo esempio è diffusissimo: si trova anche in testi divulgativi di autori rispettabili.

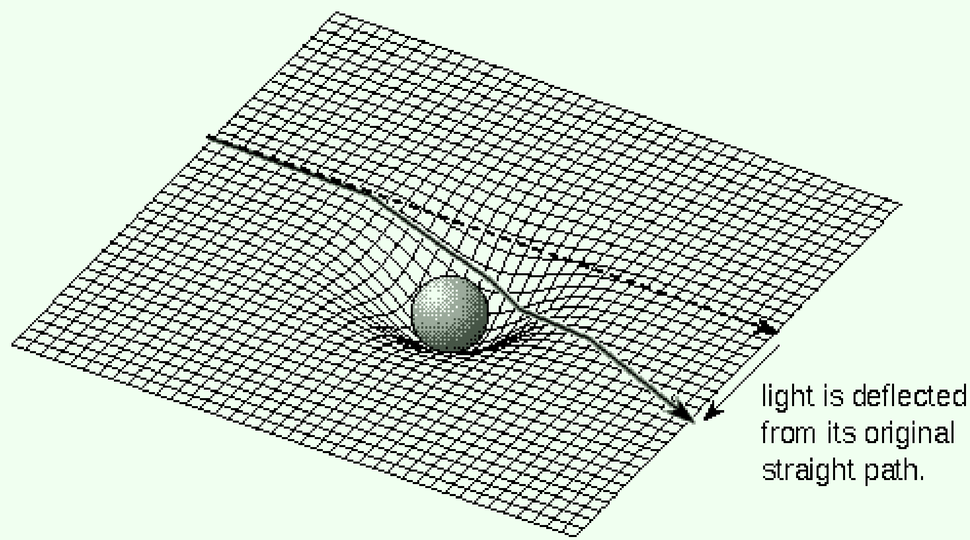
Si tratta del cosiddetto “lenzuolo”, con cui si tenta di “spiegare” la curvatura dello spazio-tempo causata dalla materia.



Ecco un'altra versione:



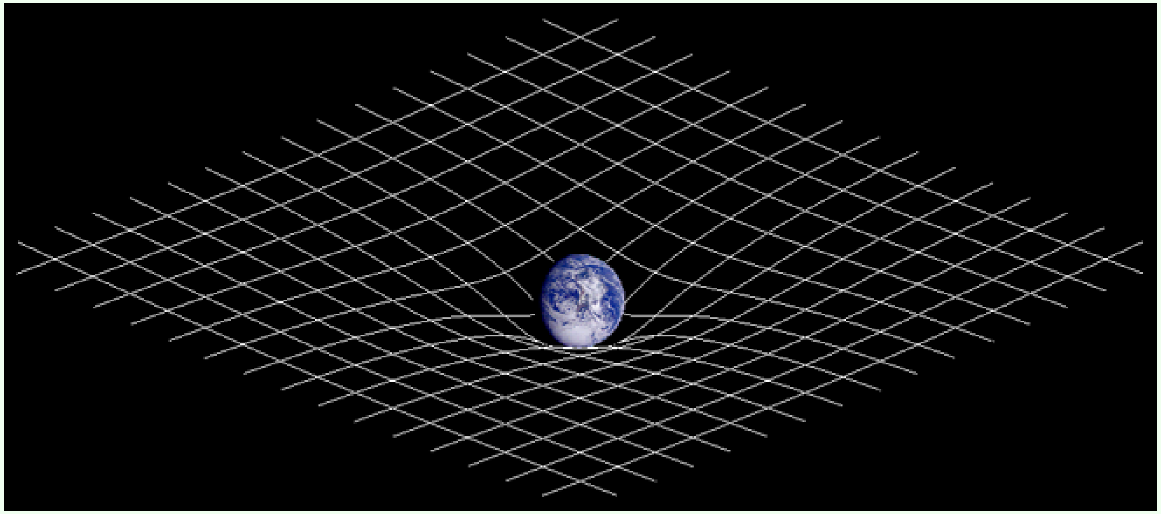
General Relativity: Einstein described gravity as a warping of space-time around a massive object. The stronger the gravity, the more space-time is warped.



General Relativity: Light travels along the curved space taking the shortest path between two points. Therefore, light is deflected toward a massive object! The stronger the local gravity is, the greater the light path is bent.

Vediamo ora gli errori (alcuni?).

1) Che cosa rappresenta il lenzuolo quadrettato? Evidentemente lo spazio, che sarebbe incurvato dalla gravità. E la palla? Come si vede dal colore e dal disegno, si tratta della Terra. Dunque la Terra sta fuori dello spazio? In un'altra dimensione?



2) La figura lascia credere che il lenzuolo sia incurvato dal "peso" della palla. Ma che cosa causa questo peso? Un'altra massa? Allora non è la gravità della Terra a incurvare lo spazio...

3) In realtà la RG dice che è lo spazio-tempo a essere incurvato dalla gravità, ma del tempo nella figura non c'è traccia: sembra che sia lo spazio di per sé a presentare curvatura.

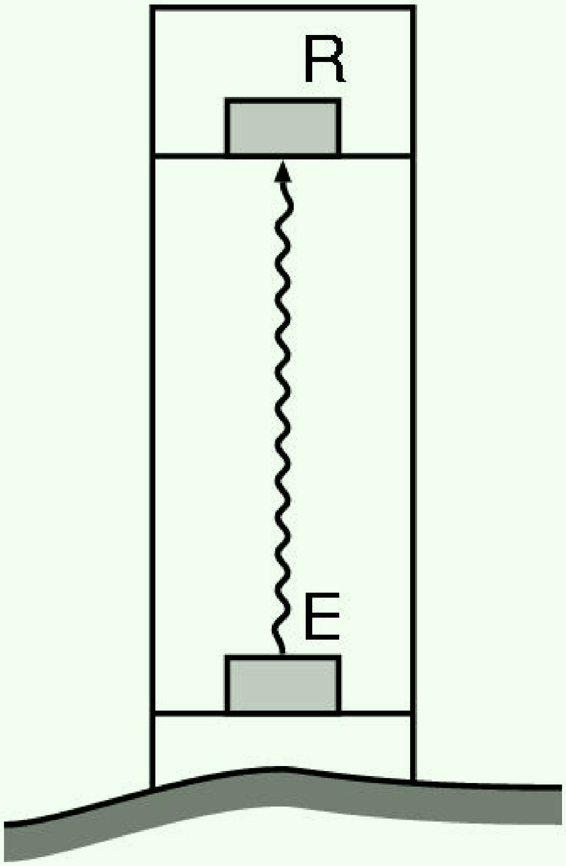
4) Come ho già detto, lo spazio (il lenzuolo) è incurvato in una terza dimensione. Per lo spazio reale occorre dunque una quarta dimensione? (che non è il tempo, si badi). La "vera" RG non parla affatto di dimensioni addizionali: lo spazio ne ha tre, lo spazio-tempo ne ha 4, e basta.

Chi guardi ingenuamente quella figura si farà un'immagine *del tutto errata* di una delle idee fondamentali della RG. Peggio, non avrà alcun indizio che capire che la RG richiede uno *sforzo di astrazione*, di uscire dall'ordinaria visione dello spazio euclideo...

Secondo esempio: gli orologi (o il tempo) che rallentano

Mi riferisco al ben noto fenomeno del *redshift gravitazionale*.

Il termine “redshift” indica la previsione (Einstein 1911) poi verificata da Pound e Rebka nel 1960, che radiazione emessa in un campo gravitazionale verrà ricevuta con frequenza più bassa in un punto situato più in alto nel campo.



Quasi tutti i testi spiegano il redshift dicendo che “un orologio o un oscillatore immerso in un campo gravitazionale rallenta le sue oscillazioni, tanto più quanto si trova in basso.”

C’è anche chi dice addirittura che in un campo gravitazionale “il tempo scorre più lentamente”...

Debbo confessare che questa seconda formulazione mi riesce del tutto incomprensibile: più lentamente rispetto a che?

Ma sta di fatto che si tratta d’interpretazioni, che andrebbero ben distinte dal fatto operativamente osservabile, che è solo la diversa misura della frequenza.

Per capire meglio la questione, conviene ricorrere a un esperimento diverso, anche se del tutto equivalente. Ne parleremo più avanti.

Il principio di equivalenza: l'ascensore di Einstein

Se un ascensore cade senza freni, l'accelerazione di caduta è $\mathbf{g}$; perciò la forza apparente sulla pallina vale $-m\mathbf{g}$, opposta al peso.

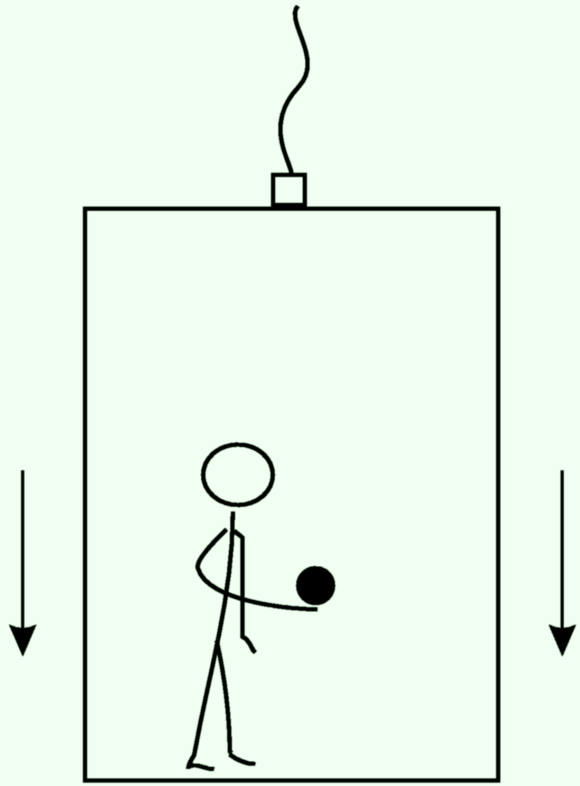
Ne segue che la pallina resta ferma: è “senza peso”.

In altre parole, per un fisico dentro l'ascensore *la gravità non c'è*.

In termini più astratti:

L'ascensore in caduta libera equivale a un RI in assenza di gravità.

Prima di Einstein questa equivalenza era nota, ma limitata all'ambito meccanico.



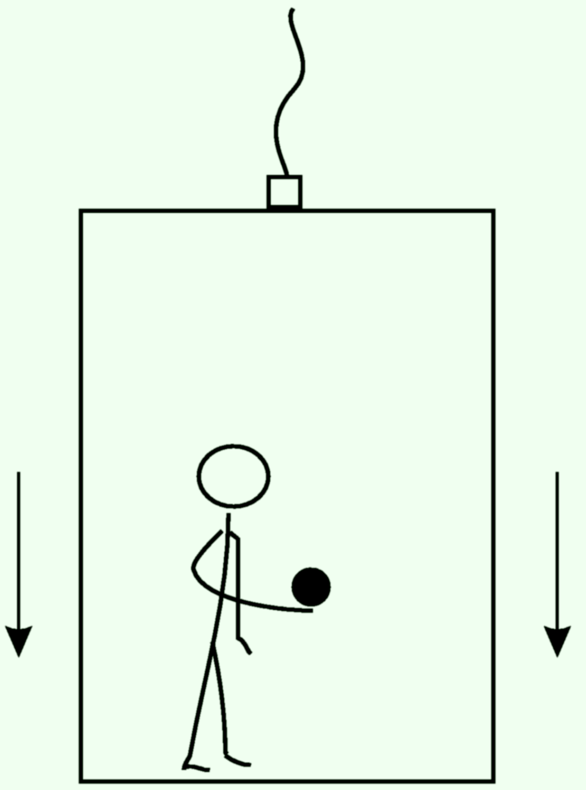
Il principio di equivalenza secondo Einstein

Einstein si spinge ad affermare che l'equivalenza ha carattere universale:

Un rif. in caduta libera in un campo gravitazionale equivale a tutti gli effetti fisici a un RI in assenza di gravità.

E simmetricamente:

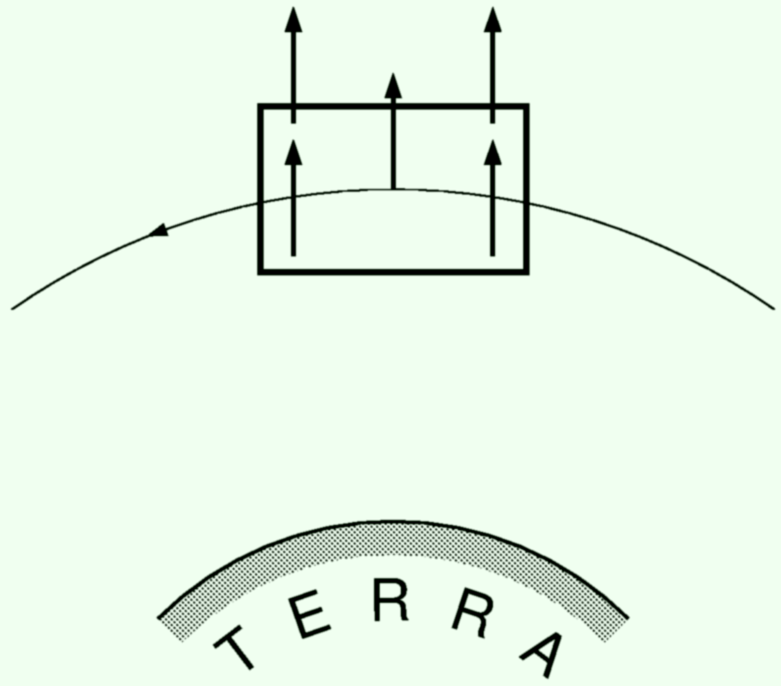
Un rif. in moto traslatorio accelerato equivale a tutti gli effetti fisici a un rif. fermo in un campo gravitazionale.



Esempio: un'astronave che viaggi nello spazio profondo, lontana da qualsiasi corpo, coi motori accesi che le danno un'accelerazione g, equivale all'astronave ferma sulla rampa di lancio.

Forze apparenti nel moto traslatorio

Qualunque sia il tipo di moto (rettilineo oppure no) nel caso traslatorio l'accelerazione *è la stessa in ogni punto*, e lo stesso è vero quindi per la forza apparente $-m\,\boldsymbol{a}$: il campo gravitazionale è *uniforme*.



Riferimenti in caduta libera

Attenzione: quando parliamo di rif. in caduta libera non intendiamo dire *solo in moto verticale*.

In generale, intendiamo che il rif. (laboratorio) si muove *sotto l'azione della sola gravità*.

Il laboratorio può essere ad es. in orbita attorno alla Terra (satellite artificiale).

È per questo che in un satellite "i corpi sono senza peso"; non perché siamo lontani dalla Terra.

Particolari rif. in caduta libera

Il rif. in caduta libera *può essere un pianeta*.

Ad es. la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, e per questo motivo la Terra può essere trattata come RI.

In termini newtoniani si direbbe: la Terra è un rif. accelerato:

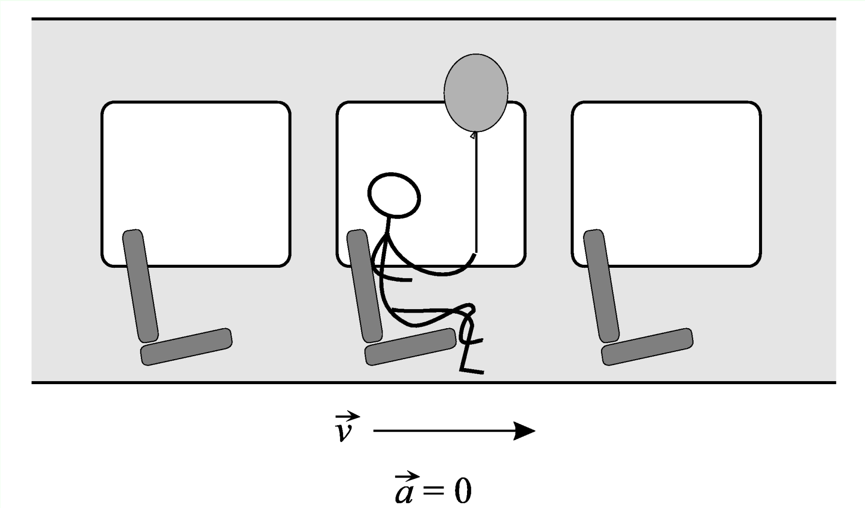
$$a = 6\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}.$$

La forza apparente dovuta a quest'accelerazione è compensata dalla forza di gravità del Sole, e sulla Terra la forza di gravità del Sole “non si sente” (approssimativamente, se si trascurano gli effetti di marea).

Il problema del palloncino

Seguendo Einstein, le forze apparenti in un rif. accelerato possono essere viste come una *gravità apparente*, che non si distingue da quella “reale”.

Esempio: un bambino sta seduto in un treno e tiene il filo di un palloncino.



Se il treno frena, da che parte si sposta il palloncino?

Le verifiche storiche del PE

A. *Galileo* (la scoperta): è cosa ben nota.

B. *Newton e il pendolo*

Nei *Principia* Newton afferma di aver sperimentato con pendoli di uguale lunghezza, le cui masse erano diverse per grandezza e costituzione, e di aver verificato (dice entro 10^{-3}) che *il periodo dipende solo dalla lunghezza*.

C. *Newton e i satelliti di Giove*

Sempre nei *Principia*, Newton osserva che i satelliti si muovono attorno a Giove *come se il Sole non ci fosse*.

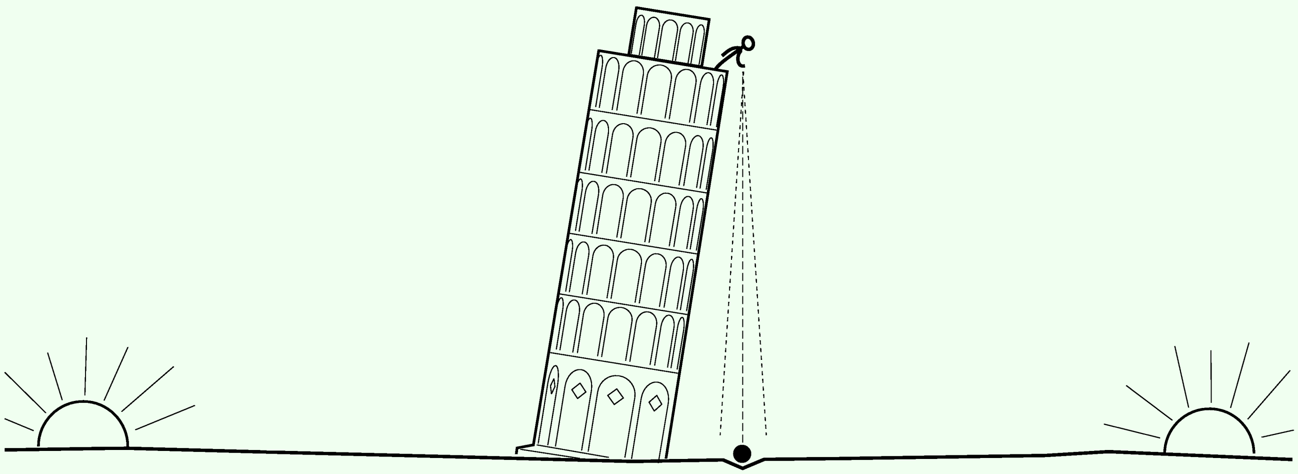
Ne conclude che la forza di attrazione del Sole su Giove, e quelle sui satelliti, stanno in proporzione alle masse.

In termini moderni: nel rif. di Giove la forza di attrazione del Sole sui satelliti *è compensata dalla forza apparente* del rif.

Oppure: nel rif. di Giove, che è in caduta libera, il campo gravitazionale del Sole *si cancella*.

Un problema

Se la forza di attrazione del Sole influenzasse la caduta dei gravi, di quanto si sposterebbe il punto di caduta di un sasso lasciato dalla Torre Pendente (52 m) tra la mattina e la sera?



Soluzione:

Stiamo supponendo che sul sasso che cade agisca, oltre al campo gravitazionale della Terra, anche quello del Sole; ma che invece non agisca la forza apparente dovuta al moto orbitale (accelerato) della Terra.

Allora la risposta è facile: il campo gravitazionale della Terra è diretto in verticale e vale 9.8 N/kg.

Quello del Sole vale 6×10^{-3} N/kg e cambia direzione nel corso del giorno, ma alla mattina e alla sera è orizzontale.

Perciò l'angolo del campo risultante rispetto alla verticale è

$$\alpha \simeq 6 \times 10^{-3} / 9.8 \simeq 6 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

La traiettoria di caduta sarebbe ancora rettilinea, ma formerebbe l'angolo α con la verticale, e il punto di caduta si sposterebbe quindi di

$$52\ \mathrm{m} \times\ 6{\times}10^{-4}\ \mathrm{rad}\ =\ 3.2{\times}10^{-2}\ \mathrm{m}\ =\ 3.2\ \mathrm{cm}:$$

verso est la mattina, verso ovest la sera.

Uno spostamento facilmente osservabile.

Problema: la deflessione della luce

Servirsi del PE (ascensore di Einstein) per spiegare la deflessione gravitazionale della luce.

Soluzione:
L'ascensore in caduta libera è un RI; perciò se nell'ascensore si monta un proiettore che manda un fascio di luce orizzontale, esso incontrerà la parete opposta *alla stessa altezza*.

Se sparo un proiettile nel rif. dell'ascensore, che è *inerziale*, esso si muove in linea retta, ma se lo guardo *da terra* vedo una *traiettoria curva*.

Questo non a causa della gravità, ma solo per ragioni cinematiche.

L'ascensore si muove verso il basso di moto accelerato e percorre spazi verticali proporzionali ai *quadrati* dei tempi, mentre il proiettile percorre spazi orizzontali *proporzionali* semplicemente ai tempi.

Perciò la traiettoria del proiettile, vista da terra, è una *parabola*.

Attenzione: per ragionare come Einstein dobbiamo *capovolgere* il filo logico cui siamo abituati.

Parto dal fatto che so come si muove il proiettile nella cabina, che è un RI.

Poi guardo come si muove la cabina rispetto al rif. terrestre, e *compongo i due moti*.

Per la luce la situazione è analoga: cambiano solo gli ordini di grandezza dei parametri, causa l'elevata velocità della luce.

– Nel rif. (inerziale) dell'ascensore $x' = ct$, $y' = 0$.

– Moto dell'ascensore rispetto alla Terra: $x = 0$, $y = \frac{1}{2} gt^2$.

Componendo i due moti:

$$x = ct, \quad y = \tfrac{1}{2} g t^2 = (g\,x^2) / (2\,c^2).$$

Se $x = 10$ m, risulta $y \simeq 5\times10^{-5}$ m e la deflessione angolare

$$dy / dx = gx / c^2 \simeq 10^{-14} \text{ rad}.$$

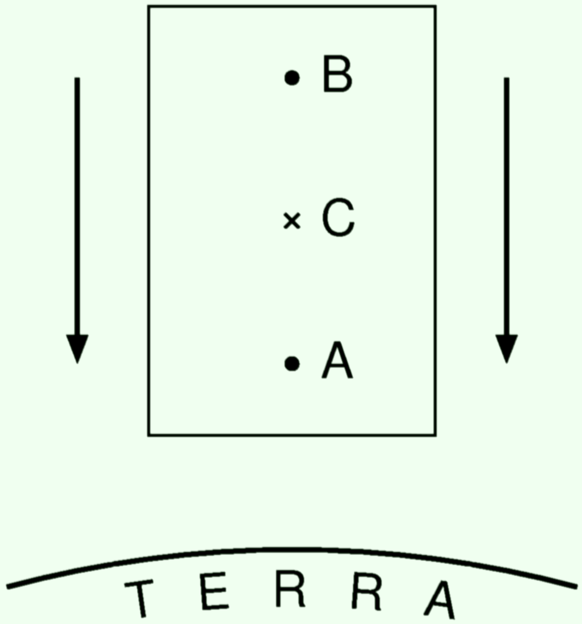
Visti i numeri, verificare sperimentalmente questo effetto risulta impossibile.

Occorre quindi trovare il modo per amplificarlo.

L'equivalenza è solo locale

L'equivalenza tra l'ascensore in caduta libera e un riferimento inerziale *non è esatta*.

Il campo gravitazionale in A è più intenso che in C, mentre in B è meno intenso; quindi la pallina A cade con accelerazione maggiore dell'ascensore, quella in C con accelerazione minore.



Nel riferimento dell'ascensore la pallina A è accelerata *verso il basso*, B *verso l'alto*.

Perciò la gravità non si cancella esattamente, e il rif. dell'ascensore non equivale a un rif. inerziale in assenza di gravità.

O meglio, l'equivalenza è *approssimata*: con approssimazione tanto migliore quanto più le dimensioni della cabina sono piccole.

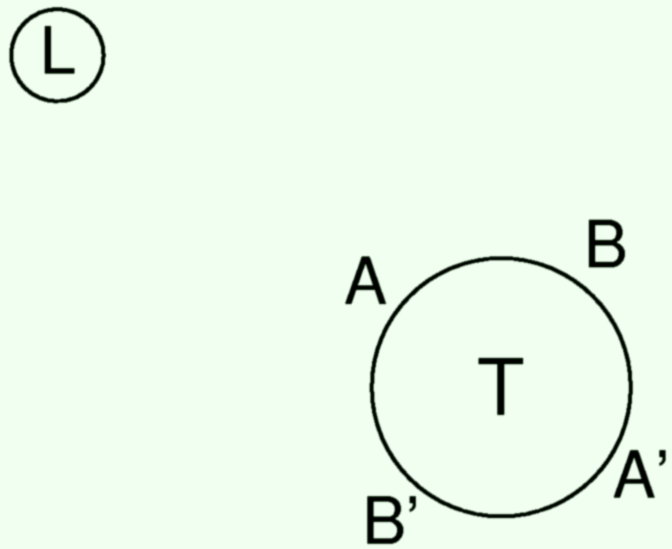
Per questo motivo si parla di equivalenza *locale*.

La forza di marea

Il residuo di forza di gravità si chiama *forza di marea*, perché fornisce la spiegazione delle maree.

La Terra "cade" verso la Luna, e il campo gravitazionale della Luna in A è più intenso che al centro della Terra, mentre in A' è più debole: come nell'ascensore.

Se non ci fosse il campo della Terra, una pallina in A si muoverebbe verso la Luna, e una in A' si allontanerebbe in verso opposto.



Invece succede solo che le due palline *pesano meno* che se la Luna non ci fosse.

Per questa ragione l'acqua in A e in A' si solleva (alta marea).

In B e in B' si abbassa, ma non ho spiegato perché...

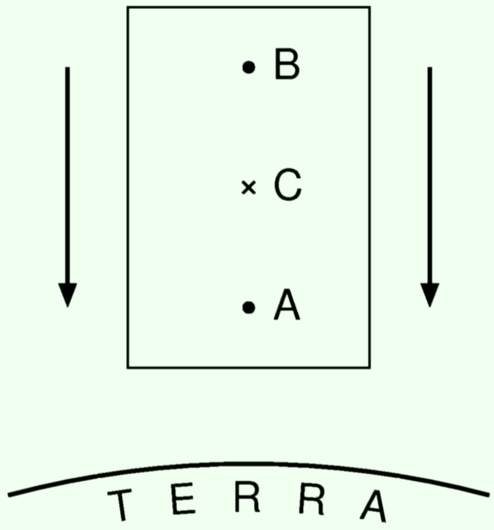
La curvatura dello spazio-tempo

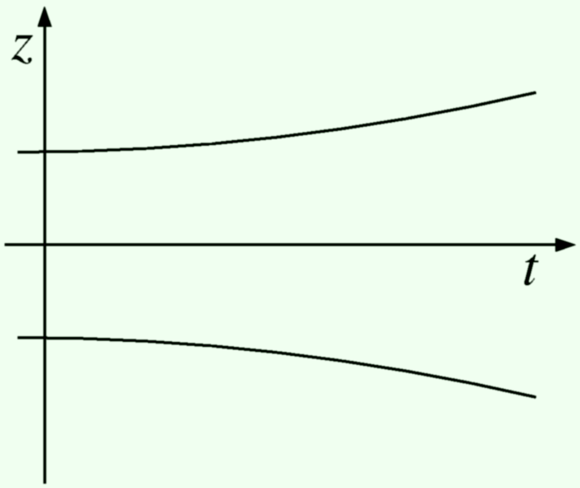
La forza di marea permette di arrivare in modo elementare alla curvatura dello spazio-tempo.

Il grafico a destra mostra i diagrammi orari delle due palline A e B: una accelera verso l'alto, l'altra verso il basso.

I due diagrammi *si allontanano*.

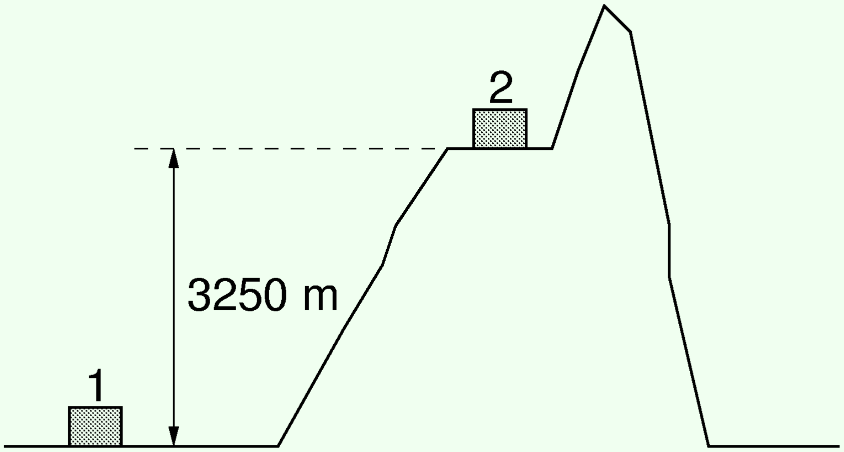
Basta interpretare questo fatto come una *deviazione di due geodetiche* nello spazio-tempo, ed è fatta.





L'esperimento di Briatore-Leschiutta

Questo esperimento risale al 1975. Ci sono due orologi atomici, uno a Torino (1) e l'altro sul Plateau Rosà (M. Cervino) (2).



L'orologio 1 invia un segnale a 2, e cominciano a contare il tempo.

Dopo circa due mesi, 1 invia un nuovo segnale, e si ferma il conteggio.

Risultato: 2 è *avanti* rispetto a 1 di circa 2.4 μs.

Come si deve interpretare questo risultato?

Quasi sempre si dice: l'orologio 1 *rallenta* rispetto a 2 perché sta più in basso nel campo gravitazionale della Terra.

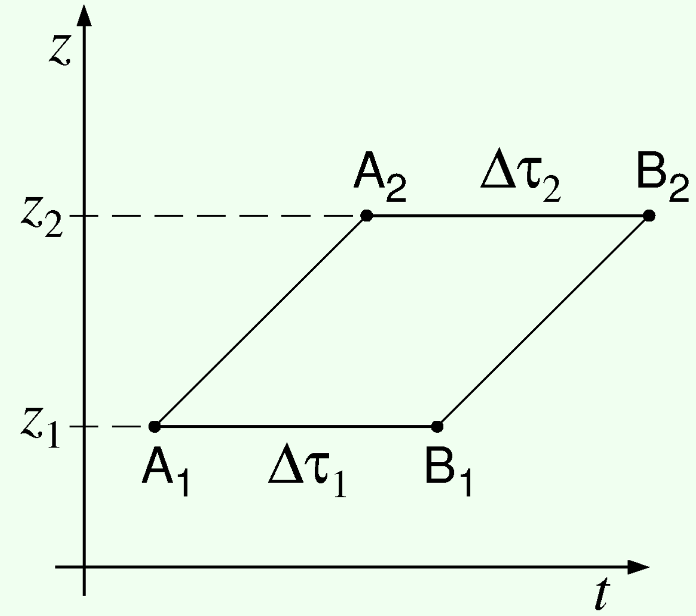
Ma l'interpretazione più corretta è un'altra, come vedremo.

Nei due laboratori possiamo creare condizioni del tutto uguali: l'unica eccezione è il campo gravitazionale, che è leggermente più debole sul monte.

Ma la minima variazione della gravità da sola *non è sufficiente* a spiegare il fenomeno: per quanto possiamo dire, i due orologi debbono marciare *allo stesso modo*.

Il diagramma spazio-tempo

L'orologio 1 sta fermo alla quota z_1; l'orologio 2 sta fermo alla quota z_2: le loro linee orarie sono rette orizzontali.



Inizia l'esperimento.

L'orologio 1 emette il segnale di partenza (evento A_1) che viaggia alla velocità della luce, e quando giunge in z_2 fa partire l'orologio 2 (evento A_2).

Dopo un certo tempo, l'orologio 1 manda il segnale di fine esperimento (evento B_1); questo giunge all'altro orologio (evento B_2) e pone termine alla misura.

L'esempio della Terra – superfici curve

Una mappa della superficie terrestre *non è mai fedele*, perché la Terra è (circa) sferica e non c'è modo di rappresentare fedelmente una *superficie sferica* (in generale, una superficie *curva*) su un *piano*.

Si può *approssimare*, tanto meglio quanto più ci si limita a una porzione *piccola*, ma non si otterrà mai una mappa fedele.

È bene notare che *non vale il viceversa*: mappa non fedele non significa per forza superficie curva.

È sempre possibile (e talvolta torna utile) una rappresentazione non fedele (una deformazione) anche per una superficie piana.

Ciò che caratterizza una superficie curva è che per essa *non è possibile* una mappa fedele su un piano.

Questa osservazione ci tornerà utile fra poco.

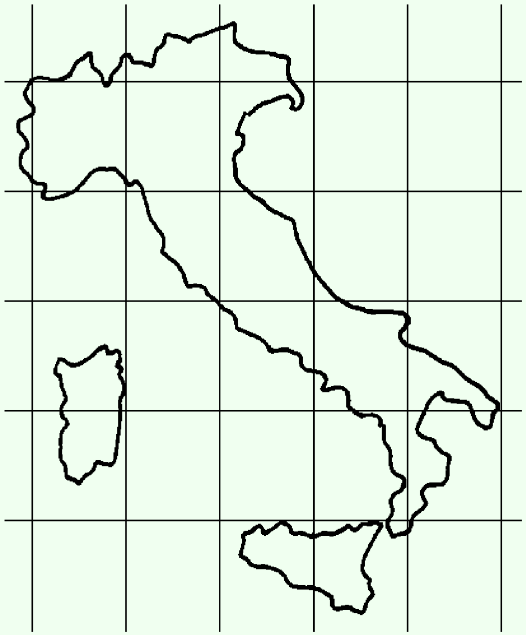
Meridiani e paralleli

La figura mostra la carta d'Italia, rappresentata con paralleli equidistanti e meridiani equidistanti, ortogonali fra loro.

(Una carta così fatta è comoda per certi scopi.)

La carta *non è fedele*: misuriamo la distanza tra due meridiani, per es. per una differenza di longitudine di 1°, prima in Sicilia e poi nei pressi di Bolzano.

Sulla carta la distanza è sempre *la stessa*; invece *nella realtà* è molto *diversa*.

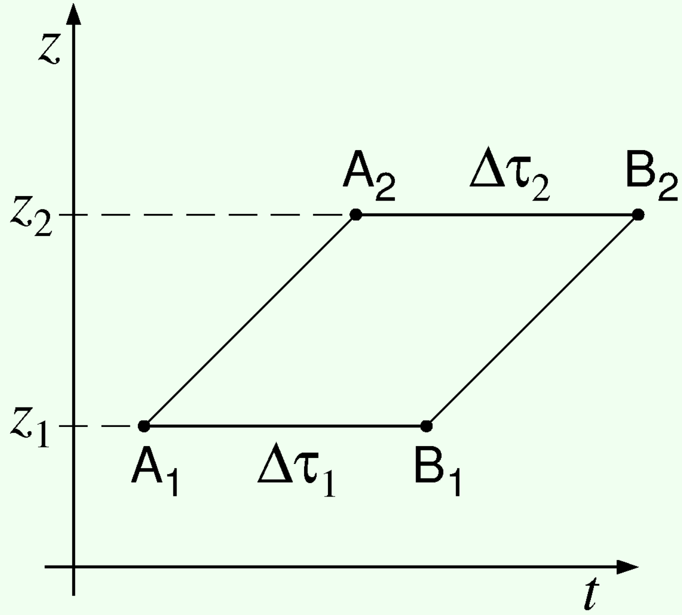


(Non è certo una grande scoperta: sappiamo bene che i meridiani si avvicinano andando verso il polo...)

La risposta all'esperimento

Allo stesso modo, *solo l'esperimento può decidere* se la carta qui sotto sia fedele o no.

L'esperimento di B–L ci dice che non lo è.



Lo spazio-tempo è curvo?

L'esperimento B–L ci ha mostrato che la nostra mappa dello spazio-tempo (fatta usando due orologi atomici) *non è fedele*.

Le carte geografiche della Terra *non sono mai fedeli* perché la superficie della Terra è *curva*.

Conclusione: *lo spazio-tempo è curvo*.

La conclusione è *vera*, ma la deduzione è *sbagliata*.

L'errore sta nell'aver trascurato il "mai".

Nel caso della Terra una mappa fedele *non esiste*.

Invece con l'esperimento B–L noi abbiamo solo scoperto *una* mappa non fedele, ma questo *non dimostra* che non ne esista alcuna.

Alla ricerca della mappa fedele

L'esperimento B–L, insieme al redshift gravitazionale, ci ha insegnato che è la presenza della gravità a produrre una mappa non fedele.

Se non ci fosse la gravità si potrebbe creare una mappa fedele.

Dunque la soluzione è semplice: *basta porsi in un* RI, in caduta libera!

È proprio vero?

Possiamo davvero far sparire la gravità?

Localmente sì, ma in presenza di un campo gravitazionale *non uniforme* vi sono sempre quei piccoli effetti (le *forze di marea*) che non è possibile cancellare.

Anche sulla Terra, se ci limitiamo a una *piccolissima porzione,* ne possiamo avere una rappresentazione così prossima a essere fedele, che gli strumenti non rivelino differenza tra le misure sulla carta e sul terreno.

Localmente anche una superficie curva può essere rappresentata in modo fedele.

(In termini matematici, si dice che si tratta di una *varietà riemanniana*.)

Però su grande scala ciò non è possibile *se la superficie è curva*.

Esperimento su un satellite

Che succede se facciamo l'esperimento di Pound–Rebka in un satellite? Avremo un piccolo effetto di redshift.

E se c'è questo, si avrà anche un piccolo risultato per l'esperimento B–L.

(Sarebbe un esperimento fantascientifico, perché l'effetto è assai piccolo...)

Per quanto piccolo però non c'è modo di farlo sparire completamente.

A questo punto possiamo concludere:

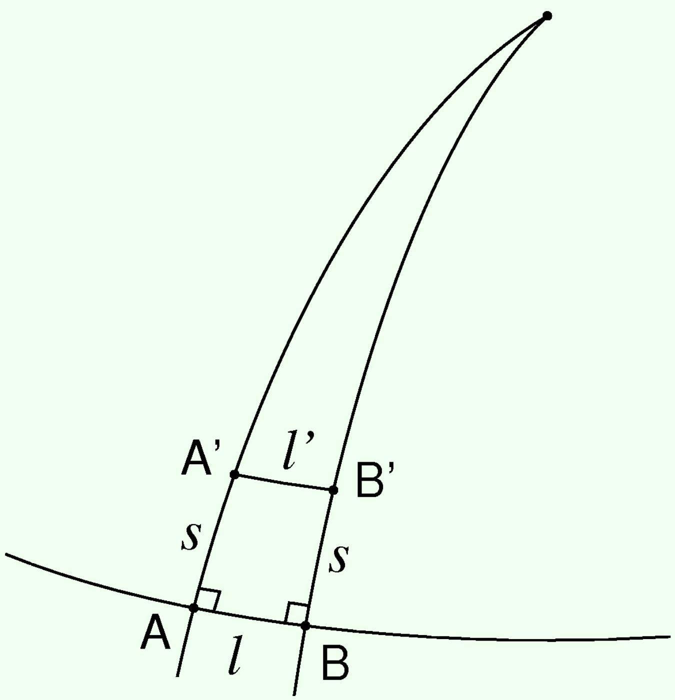
non è possibile disegnare una mappa fedele dello spazio-tempo.

Quindi

è vero che lo spazio-tempo è curvo.

Distanza tra i meridiani

Prendiamo due punti A e B sull'equatore, a distanza l tra loro. Partendo da quei due punti, spostiamoci lungo i meridiani che vanno da A e da B verso i poli. Percorriamo lungo i due meridiani uno stesso tratto s: arriveremo in due punti A' e B'. Ora misuriamo la distanza l' fra questi due punti: ovviamente troveremo che $l' < l$.



Quantitativamente si ha

$$l' = l \cos(s / R) \qquad (1)$$

e da qui si può calcolare R, noti s, l, l'.

La formula è approssimata, ma a noi basta dato che prenderemo l molto piccolo.

Distanza tra i meridiani

Derivando la (1) due volte rispetto a s, otteniamo

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = -\frac{1}{\ell} \left(\frac{d^2\ell'}{ds^2}\right)_{s=0}. \qquad (2)$$

Ho scritto R_c invece di R per distinguerlo da un altro R che apparirà tra poco.

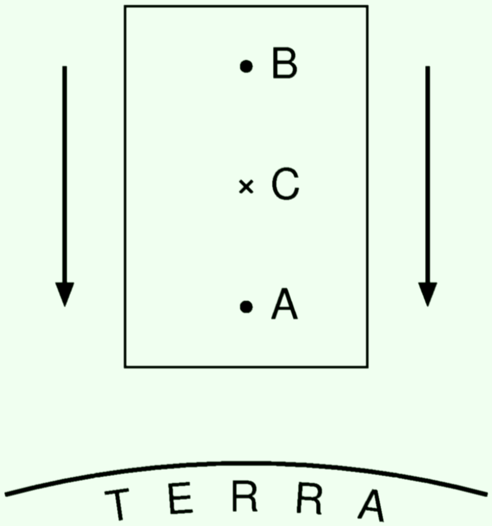
La (2) è una relazione differenziale: in pratica ciò significa che occorre fare misure solo in una piccola regione attorno al punto in cui interessa misurare il raggio.

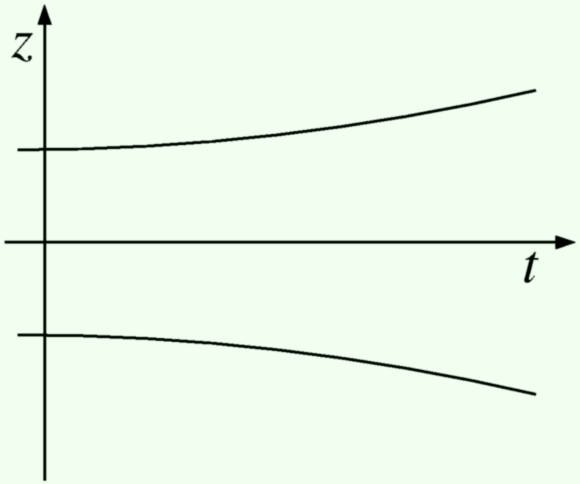
Ma questa è anche la ragione per cui è utile: questo carattere “locale” permette di generalizzarla, ossia di applicarla a superfici di forma qualsiasi.

La deviazione delle geodetiche nello spazio-tempo

Forse non è ancora molto chiaro che cosa c'entri tutto questo con lo spazio-tempo; ma torniamo all'ascensore di Einstein e al grafico che descrive la distanza delle palline.

Se non ci fosse la forza di marea, le palline resterebbero ferme e la loro distanza non cambierebbe.





Invece cambia: il calcolo non è difficile, ma per risparmiare tempo fornisco il risultato:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2GMz}{R^3}. \qquad (3)$$

In un RI in assenza di gravità ecc., il moto naturale dovrebbe essere rettilineo uniforme: il grafico della curva oraria nello spazio-tempo sarebbe rettilineo.

In particolare, se le palline sono inizialmente ferme, restano ferme: le loro coordinate restano costanti e i grafici sono due rette parallele.

Sulla Terra non è possibile procedere diritti e mantenere la stessa distanza fra i due meridiani, perché la superficie è curva; nello spazio-tempo non è possibile avere moti naturali (dritti) a distanza costante.

Ce lo mostra l'ascensore in caduta libera: le palline lasciate libere non restano ferme e i loro diagrammi orari non sono rette parallele. Uno curva verso l'alto e uno verso il basso.

Ma se succede questo, vuol dire che *lo spazio-tempo è curvo*.

Due punti di vista (paradigmi)

Forza di marea e spazio-tempo curvo sono due modi di vedere la stessa cosa.

Dal punto di vista newtoniano diciamo che le palline cominciano a muoversi e quindi le curve orarie divergono, perché c'è la forza di marea.

Dal punto di vista di Einstein diciamo invece: non è possibile disegnare due grafici di moti naturali che siano due rette (geodetiche) parallele, perché lo spazio-tempo è curvo.

In uno spazio-tempo curvo *non ci sono rette* (moti rettilinei uniformi) tra loro *parallele*.

La curvatura dello spazio-tempo ...

… ora possiamo calcolarla. Riprendiamo la (3)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{2GMz}{R^3} \qquad (3)$$

e la (2) scritta così:

$$\frac{d^2 \ell'}{ds^2} = -\frac{\ell'}{R_\mathrm{c}^2}\,. \qquad (4)$$

Confrontando (3) e (4) è evidente l'analogia: in (4) c'è la derivata seconda di *l'*, che è la distanza dei due meridiani, fatta rispetto a *s*, che è lo spazio percorso sul meridiano. Questa derivata è proporzionale a *l'*.

Nella (3) abbiamo la derivata seconda di *z*, che è la distanza di una pallina dal centro dell'ascensore (la metà della distanza dall'altra pallina) fatta rispetto al tempo; la derivata è proporzionale a *z*.

Il coefficiente nella (4) è il reciproco del quadrato del raggio di curvatura della superficie. E nella (3)?

Posso già quasi dire che il coefficiente $2GM/R^3$ nella (3) ha la stessa funzione di $1/R_c{}^2$ nella (4).

Le due formule sono strettamente analoghe: in un caso ho due meridiani che si avvicinano, perché la *superficie della Terra* è curva; nell'altro caso ho le curve orarie delle palline che si allontanano, perché lo *spazio-tempo* è curvo.

C'è però una differenza: nella (3) si deriva rispetto al tempo e nella (4) rispetto allo spazio.

Ma questo non è un problema: dobbiamo solo ridurre il tempo a unità spaziali, cosa che si ottiene dividendo la (3) per c^2:

$$\frac{d^2 z}{c^2\, dt^2} = \frac{2GMz}{c^2 R^3}. \qquad (5)$$

Curvatura dello spazio-tempo attorno alla Terra

Ora il confronto fra (4) e (5) è perfettamente giustificato, e ci dà la curvatura dello spazio-tempo nei pressi della Terra:

$$\frac{1}{R_{\mathrm{c}}^2} = \frac{2GM}{c^2 R^3}\,. \qquad (6)$$

Si noterà che — a parte costanti universali — nella (6) entrano solo la massa M e il raggio R della Terra.

Avrete notato il segno meno, che c'è nella (4) e non nella (5). Questo significa solo che il *segno* della curvatura è diverso.

A titolo di curiosità, R_{c} vale 1.7×10^{11} m: non molto diversa dalla distanza Terra--Sole. È un puro caso, ma può avere un'utilità mnemonica.

Curvatura dello spazio-tempo e densità della materia

Il fatto che la curvatura dipenda da M/R^3 ci permette di esprimerla mediante la *densità media* della Terra:

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{G\varrho}{c^2}.$$

Questa formuletta è per noi molto importante: infatti essa non è altro che *una versione molto semplificata*, ma che contiene tutta la sostanza, *delle equazioni della RG di Einstein*.

L'idea fondamentale della RG è che la curvatura dello spazio-tempo è prodotta dalla presenza di materia, e che la materia determina la curvatura proprio in questo modo: l'inverso del quadrato del raggio di curvatura è proporzionale alla densità della materia.

Commenti didattici

Questa è una delle grandi scoperte di Einstein: la *gravità* implica una *curvatura dello spazio-tempo*.

Si riesce dunque a toccare punti assai profondi della RG con un'analisi di poche cose, purché siano quelle giuste.

Osservo che solo 35 anni fa questi discorsi non si sarebbero potuti fare, perché *gli esperimenti non c'erano*.

Ancor più dobbiamo ammirare Einstein, che ci è arrivato quasi un secolo fa, del tutto senza esperimenti...

Ma il punto che mi preme sottolineare è che *è possibile parlare agli studenti di queste cose*. E non facendo della vaga divulgazione!

Senza dubbio si tratta di argomenti difficili: non per i conti o le formule, ma per l'astrazione e i ragionamenti.

Occorre saper cambiare punto di vista; svincolarsi da concezioni radicate.

Ma proprio qui sta il *valore educativo* di questi temi.

Ed è importante far vedere come la fisica possa contribuire a una formazione tutt'altro che “tecnica”: *una vera maturità*.