

CAPITOLO 22

Il teorema di Birkhoff

Nel Cap. 19 abbiamo dimostrato che la geometria di Schwarzschild è la soluzione statica a simmetria sferica delle equazioni di Einstein per lo spazio vuoto. In realtà alla stessa geometria si arriva sotto ipotesi più deboli: basta la sola simmetria sferica, senza imporre la condizione statica. È questo il teorema di Birkhoff.

Prima di dare la dimostrazione, discutiamo brevemente il significato del teorema. La sua importanza per il nostro discorso è che esso mostra come la geometria di Schwarzschild descriva lo spazio-tempo al di fuori della materia anche se questa non è in quiete, purché mantenga la simmetria sferica: il caso per noi importante è quello del *collasso gravitazionale*. Naturalmente nella regione di spazio-tempo occupata dalla materia la geometria sarà diversa, come già abbiamo visto nel Cap. 19 per il modello (statico) di Schwarzschild.

Possiamo rendere plausibile il teorema di Birkhoff osservando che qualcosa di simile accade per il campo elettromagnetico: una distribuzione di cariche a simmetria sferica, anche se non statica (quindi in moto esclusivamente radiale) produce all'esterno lo stesso campo di una carica puntiforme (teorema di Gauss). D'altra parte abbiamo già visto al Cap. 18 che l'andamento asintotico della geometria è caratterizzato solo dalla massa e dal momento angolare della materia: nell'ipotesi di simmetria sferica il momento angolare è nullo, e la geometria asintotica concorda con quella di Schwarzschild. Dunque il teorema di Birkhoff non fa che estendere anche alla regione vicina la stessa proprietà.

Per dimostrare il teorema basta scrivere la metrica come al Cap. 19:

$$d\tau^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (22-1)$$

con la sola differenza che ora non supponiamo in partenza che Φ e Λ dipendano solo da r , ma lasciamo la possibilità di una dipendenza da t . Il teorema sarà dimostrato se faremo vedere che in realtà la dipendenza da t non c'è.

Le equazioni di Einstein sono state già scritte in parte al Cap. 19, e restano invariate, sebbene Φ e Λ possano anche dipendere da t : da $G^{tt} = 0$ e $G^{rr} = 0$ si ha (ponendo ora $p = 0$, $\varrho = 0$)

$$2r\Lambda_{,r} = 1 - e^{2\Lambda} \quad 2r\Phi_{,r} = e^{2\Lambda} - 1. \quad (22-2)$$

Occorre ora aggiungere l'equazione $G^{tr} = 0$, che si riduce a $\Lambda_{,t} = 0$: dunque Λ in realtà non dipende da t . Allora la prima delle (22-2) dà subito

$$e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (22-3)$$

con M costante d'integrazione, di evidente significato.

Nota: Osserviamo che la (22-3) ha senso solo per $r > 2M$, dato che $e^{2\Lambda}$ è sempre positivo. Riprenderemo la questione più avanti.

Resta da integrare la seconda delle (22-2): poiché non possiamo escludere che Φ dipenda da t , dobbiamo scrivere (sempre per $r > 2M$)

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right) + f(t),$$

con f funzione arbitraria. Si arriva così alla metrica

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) e^{2f(t)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2M/r} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

che a prima vista sembra diversa da quella di Schwarzschild, e non statica. Tuttavia basta fare il cambiamento di variabile

$$t' = \int e^{f(t)} dt$$

per ottenere il risultato cercato. ■

Osservazione: Per completezza occorrerebbe dimostrare che le equazioni dedotte dalle altre componenti di \mathbf{G} non aggiungono niente: ciò deriva ancora una volta dalla simmetria del sistema, e dall'annullarsi della divergenza di \mathbf{G} . Lasciamo la verifica per esercizio.

Quanto alla restrizione $r > 2M$, in realtà essa non sussiste: basta cambiare i segni ai primi due termini della (22-1) e verificare che si arriva ancora allo stesso risultato.

Collasso di una “stella di polvere”: la geometria interna

Il più semplice modello possibile per studiare il collasso gravitazionale si fa supponendo che la pressione all'interno della stella sia trascurabile (Oppenheimer e Snyder, 1939). Avremo allora

$$\mathbf{T} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$$

e le (19-5), (19-6) diventano

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0. \quad (22-4)$$

La prima di queste equazioni dice semplicemente che l'energia si conserva: ρ varia solo perché cambia il volume occupato da una data porzione di materia.

La seconda mostra invece che la materia segue le geodetiche: essa è in caduta libera, poiché non ci sono forze di pressione.

Renderemo ancora più semplice il modello supponendo che la densità ρ non dipenda neppure da r (stella omogenea), anche se la simmetria sferica sarebbe compatibile con una ρ variabile radialmente. Dovremmo ora scrivere e risolvere le equazioni di Einstein; ma si dà il caso che parte del lavoro sia già stato fatto. Riprendiamo infatti la geometria di Robertson–Walker, studiata al Cap. 8:

$$d\tau^2 = R^2 (d\eta^2 - d\chi^2 - \Sigma^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2))$$

dove $R = R(\eta)$. Abbiamo dimostrato a suo tempo che le curve $\chi = \text{cost.}$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ sono geodetiche, e abbiamo visto l'espressione dell'elemento di volume:

$$dV = R d\chi \cdot R \Sigma d\vartheta \cdot R \Sigma \sin \vartheta d\varphi = R^3 \Sigma^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\chi. \quad (22-5)$$

La (22-5), insieme con la prima delle (22-4), ci dice che ρR^3 è costante. Possiamo poi scrivere le equazioni di Einstein, e troviamo due sole relazioni significative:

$$\left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + k R^2 = \frac{8}{3}\pi\rho R^4 \quad (22-6)$$

$$\frac{d^2R}{d\eta^2} - \frac{1}{2R} \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + \frac{1}{2}kR = 0. \quad (22-7)$$

In queste equazioni $k = 0, \pm 1$ distingue, come già sappiamo, i tre casi della geometria. A noi interesserà il caso $k = 1$, perché è il solo che dà luogo a un massimo per R , ossia a un collasso che parte dalla quiete per un certo raggio massimo.

In effetti le (22-6), (22-7) non sono entrambe necessarie: derivando la (22-6) rispetto a η e confrontando con la (22-7) si ritrova $\rho R^3 = \text{cost.}$; possiamo quindi fare a meno della (22-7).

Conviene introdurre il parametro R_0 ponendo

$$\rho R^3 = \frac{3R_0}{8\pi}. \quad (22-8)$$

Allora la (22-6) ha la soluzione

$$R = \frac{1}{2}R_0 (1 + \cos \eta) \quad (22-9)$$

e il tempo proprio della materia è dato, secondo la (8-6), da

$$\tau = \int_0^\eta R d\eta = \frac{1}{2}R_0 (\eta + \sin \eta). \quad (22-10)$$

La (22-9) mostra il significato di R_0 : è il raggio di curvatura massimo delle sezioni spaziali, che si ottiene per $\eta = 0$. La soluzione trovata rappresenta dunque una fase di contrazione (collasso) preceduta da una di espansione. A noi interessa solo il collasso, e possiamo supporre che in precedenza la stella sia tenuta in equilibrio da forze di pressione, che vengono improvvisamente a mancare a un certo istante.

Però la materia non riempie tutto lo spazio, come in un modello d'universo: la soluzione trovata si estende dunque solo fino a un certo $\chi = \chi_1$. Il raggio della stella (distanza dal centro alla superficie) è $R\chi_1$, e l'area della superficie è $4\pi R^2 \sin^2 \chi_1$. Il volume totale occupato dalla materia si calcola a partire dalla (22-5), e risulta

$$V = 2\pi R^3 (\chi_1 - \sin \chi_1 \cos \chi_1). \quad (22-11)$$

Raccordo con la geometria esterna

Sappiamo che la geometria esterna è una geometria di Schwarzschild, delimitata all'interno dalla superficie della stella, che corrisponderà a un certo valore della coordinata r . La superficie è in caduta libera, ossia lungo una geodetica radiale, e questo fatto deve risultare vero tanto nella geometria interna (dove è automatico, avendo posto $\chi = \chi_1$ alla superficie della stella) quanto in quella esterna.

Abbiamo visto al Cap. 5 le equazioni di tali geodetiche:

$$r = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos \eta) \quad \tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2M}} (\eta + \sin \eta). \quad (22-12)$$

Si è usato lo stesso parametro η in entrambe le geometrie, ma a priori non ci sarebbe ragione perché debba trattarsi della stessa η . Però le due geodetiche debbono identificarsi, e il confronto della (22-10) con la seconda delle (22-12) mostra che η è proprio lo stesso, e che inoltre dev'essere

$$R_0 = \sqrt{\frac{r_0^3}{2M}}. \quad (22-13)$$

Le condizioni di raccordo non terminano con la (22-13). È evidentemente necessario che l'area della superficie sia la stessa in entrambe le geometrie, e ciò richiede $r = R \sin \chi_1$. Poiché la dipendenza di r e di R da η è la stessa, come mostrano la (22-9) e la prima delle (22-12), la sola condizione è

$$r_0 = R_0 \sin \chi_1. \quad (22-14)$$

In base alle (22-13), (22-14) tutta la geometria è completamente determinata da due soli parametri: possiamo ad es. prendere M e r_0 , che sono possibili

dati osservativi. Anche la densità è determinata dalla (22–8) e si trova la relazione, apparentemente ovvia

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = \frac{4}{3}\pi \varrho R^3 \sin^3 \chi_1. \quad (22-15)$$

Tuttavia la (22–15) non coincide con $M = \varrho V$, come si vede dalla (22–11); anzi è sempre $M < \varrho V$, dal momento che $\frac{2}{3} \sin^3 \chi_1 < \chi_1 - \sin \chi_1 \cos \chi_1$. Come mai?

La risposta qualitativa è che M è la massa totale nel senso del suo effetto gravitazionale, ad es. sul moto di un pianeta; invece ϱV è solo la somma delle masse di riposo delle particelle che costituiscono la stella. Dobbiamo aspettarci che la prima sia minore, perché anche l'energia di legame gravitazionale contribuisce alla massa totale, nel senso di diminuirla. È possibile un'ulteriore verifica: se sviluppiamo in serie di potenze di χ_1 troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sin^3 \chi_1 &= \frac{2}{3} \chi_1^3 - \frac{1}{3} \chi_1^5 + \dots \\ \chi_1 - \sin \chi_1 \cos \chi_1 &= \frac{2}{3} \chi_1^3 - \frac{2}{15} \chi_1^5 + \dots \end{aligned}$$

Dunque le due espressioni concordano all'ordine più basso, che coincide con l'approssimazione newtoniana; all'ordine successivo si trova una differenza di massa pari a $\frac{3}{5}M^2/r_0$, che è proprio l'energia di legame newtoniana di una sfera omogenea di massa M e raggio r_0 .

Concludiamo osservando che a rigore il raccordo tra le due geometrie va controllato più a fondo: non ci deve essere discontinuità nella curvatura della superficie di separazione, calcolata con le due metriche. Rimandiamo a *Gravitation*, Cap. 32 per i dettagli.

La geometria del collasso

Per studiare l'evoluzione della geometria spazio-temporale durante il collasso conviene cambiare coordinate. Useremo coordinate (\bar{t}, \bar{r}) definite come segue: \bar{t} è il tempo proprio lungo la geodetica (radiale) che ha il massimo $r = \bar{r}$ per $\bar{t} = 0$. Qui r indica il raggio nel senso di Schwarzschild, ossia tale che la superficie $r = \text{cost.}$ ha area $4\pi r^2$. Coerentemente, indicheremo d'ora in poi con \bar{r}_0 il raggio della stella all'inizio del collasso.

Dimostriamo anzitutto che le coordinate così definite sono ortogonali, ossia che è sempre

$$\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = 0.$$

Questa relazione vale per $\bar{t} = 0$; infatti per la nostra scelta nell'origine delle t ($t = 0$ per $\eta = 0$, ossia all'inizio del collasso) la curva $\bar{t} = 0$ coincide, come sostegno, con la $t = 0$. Ma la prima è curva integrale di $\mathbf{e}_{\bar{r}}$, la seconda di \mathbf{e}_r ; dunque dimostrare $\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = 0$ equivale a dimostrare $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = 0$. Per definizione r ha un massimo sulla geodetica proprio in $\bar{t} = 0$, e dato che le coordinate (t, r) sono ortogonali, questo prova proprio che $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = 0$.

Basterà ora dimostrare che

$$\partial_{\bar{t}}(\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}}) = 0.$$

Partiamo da $\mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = 1$, che discende dal fatto che \bar{t} è il tempo proprio delle geodetiche. Derivando rispetto a \bar{r}

$$\partial_{\bar{r}}(\mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_{\bar{r}}} \mathbf{e}_{\bar{t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_{\bar{t}}} \mathbf{e}_{\bar{r}} = 0$$

(il secondo passaggio è giustificato da $[\mathbf{e}_{\bar{r}}, \mathbf{e}_{\bar{t}}] = 0$). Calcoliamo ora

$$\partial_{\bar{t}}(\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}}) = \nabla_{\mathbf{e}_{\bar{t}}} \mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} + \mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_{\bar{t}}} \mathbf{e}_{\bar{t}}.$$

Abbiamo appena dimostrato che il primo termine si annulla; ma anche il secondo è nullo, grazie all'equazione delle geodetiche. ■

Tornando al collasso, per la geometria interna le formule rilevanti sono

$$r = R \sin \chi, \quad R = R_0 \cos^2 \frac{\eta}{2}, \quad \bar{r} = R_0 \sin \chi, \quad \bar{t} = \frac{1}{2} R_0 (\eta + \sin \eta). \quad (22-16)$$

Ci converrà definire un parametro $x = \bar{t}/R_0$ e una $f(x)$ tale che sia $r/\bar{r} = R/R_0 = f(x)$. Si vede dalle (22-16) che

$$x = \arccos \sqrt{f} + \sqrt{f(1-f)}. \quad (22-17)$$

Il grafico di $f(x)$ è un arco di cicloide: $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$ (fig. 22-1).

Ciò posto, se ricordiamo che \bar{t} non è che la coordinata t introdotta per la geometria di Robertson-Walker nel Cap. 8, la metrica interna ha l'espressione

$$d\tau^2 = d\bar{t}^2 - \frac{R_0^2 f^2}{R_0^2 - \bar{r}^2} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 f^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (\bar{r} \leq \bar{r}_0) \quad (22-18)$$

(basta sostituire \bar{r} a χ mediante la terza delle (22-16)). Le geodetiche radiali hanno per costruzione $\bar{r} = \text{cost.}$ e il tempo di collasso nella singolarità è $\bar{t}_c = \pi R_0/2$, per ogni \bar{r} .

La metrica esterna si scrive in modo analogo: in luogo delle (22-16) abbiamo ora:

$$r = \bar{r} \cos^2 \frac{\eta}{2}, \quad \bar{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{r}^3}{2M}} (\eta + \sin \eta). \quad (22-19)$$

e conviene definire $x = \bar{t} \sqrt{2M/\bar{r}^3}$. Con questa posizione, e con $f(x)$ ancora definita dalla (22-17), troviamo la metrica

$$d\tau^2 = d\bar{t}^2 - \frac{\bar{r}}{\bar{r} - 2M} \left(\frac{3}{2} x \sqrt{1/f - 1} + f \right)^2 d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 f^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (\bar{r} \geq \bar{r}_0). \quad (22-20)$$

(il calcolo è mostrato in appendice, alla fine di questo capitolo). Le geodetiche radiali hanno ancora $\bar{r} = \text{cost.}$, ma il tempo di collasso questa volta dipende da \bar{r} e vale $\bar{t}_c = \pi \sqrt{\bar{r}^3/8M}$.

Come già sappiamo, il raccordo fra le due metriche richiede $\bar{r}_0^3 = 2MR_0^2$; da questa si ricava R_0 se sono dati M ed \bar{r}_0 .

Il tutto è riassunto in fig. 22–2, dove è indicata col tratteggio la singolarità $r = 0$, che per quanto visto corrisponde a $\bar{t} = \text{cost.}$ nella geometria interna, ma non in quella esterna. Le rette verticali sono le godetiche ($\bar{r} = \text{cost.}$): nella parte sinistra della figura sono le linee orarie dei “granelli di polvere,” mentre nella parte destra, corrispondente allo spazio vuoto esterno alla stella, sono le linee orarie di ipotetici “corpi di prova.” Le rette orizzontali $\bar{t} = \text{cost.}$ sono una possibile scelta di sezioni spaziali, delle quali vogliamo ora discutere la geometria.

Osserviamo anzitutto che tale geometria non è statica, come si vede dalle (22–18), (22–20), nelle quali i coefficienti della parte spaziale dipendono da \bar{t} , tanto nella geometria interna quanto in quella esterna. Ciò non contrasta col teorema di Birkhoff, perché esso vale per le sezioni spaziali definite da $t = \text{cost.}$, ovviamente diverse da quelle ora considerate.

È importante tener presente l’esatto significato di frasi come: “la geometria della sezioni spaziali è statica.” Alla luce di quello che abbiamo appena visto, è chiaro che la frase va intesa così: “è possibile definire una famiglia di sezioni spaziali (parametrizzate da una coordinata temporale, che nel nostro caso è la t di Schwarzschild) che hanno la stessa geometria, ossia sono tra loro isometriche.”

La tecnica degli “embedding diagrams”

Le sezioni spaziali di cui si tratta hanno una geometria non euclidea, come si vede dalle espressioni della metrica:

$$ds^2 = \frac{R_0^2 f^2}{R_0^2 - \bar{r}^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 f^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (\bar{r} \leq \bar{r}_0). \quad (22-21)$$

$$ds^2 = \frac{\bar{r}}{\bar{r} - 2M} \left(\frac{3}{2} x \sqrt{1/f - 1} + f \right)^2 d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 f^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (\bar{r} \geq \bar{r}_0). \quad (22-22)$$

Riesce spesso utile, per esaminare una metrica non euclidea, sfruttare il fatto che è sempre possibile rappresentare una varietà riemanniana non euclidea come sottovarietà di una euclidea, di dimensione maggiore. Nel nostro caso, grazie alla simmetria sferica, è sufficiente aggiungere una sola coordinata spaziale, che chiameremo z . Inoltre, poiché lavoriamo a \bar{t} assegnato, conviene riprendere come coordinata radiale r anziché \bar{r} . La relazione fra le due è semplice: $r = f\bar{r}$.

Pensando alla geometria interna, si tratta dunque di trovare una $z(r)$ tale che sia identicamente

$$dr^2 + dz^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2$$

(abbiamo usato $R = R_0 f$). La soluzione è $z = \pm \sqrt{R^2 - r^2}$; sceglieremo arbitrariamente il segno negativo.

Otteniamo dunque un cerchio di raggio R , o meglio un arco di cerchio: infatti la materia termina a $r = R \sin \chi_1$ (fig. 22–3). In realtà il risultato non è nuovo: sapevamo già che la geometria di Robertson–Walker è quella di una S^3 immersa in uno spazio euclideo quadridimensionale. Dunque l’arco di cerchio trovato è la sezione, fatta a ϑ e φ assegnati, di una “calotta ipersferica,” di semiapertura χ_1 .

Se cambiamo \bar{t} , e quindi R , otteniamo un’altra sezione spaziale, che è un’altra calotta, di uguale apertura ma di raggio diverso: in fig. 22–3 sono state disegnate concentriche, e le tratteggiate radiali connettono punti corrispondenti allo stesso granello di polvere. Al crescere di \bar{t} il raggio decresce, finché per $\bar{t} = \bar{t}_c$ si riduce a 0: tutta la materia della stella è stata schiacciata in un unico punto. Per $\bar{t} > \bar{t}_c$ la parte interna della geometria cessa di esistere.

Dovremmo anche, per completare lo studio delle sezioni spaziali, esaminare la geometria esterna. Questa però ha la metrica (22–22), assai più complicata della (22–21); la conseguenza è che non si riesce a dare un’espressione analitica per la forma dello embedding diagram. Perciò ci limitiamo a indicarne in fig. 22–3 l’andamento qualitativo.

Modalità del collasso

Supponiamo che la nostra stella emetta luce dalla superficie: dobbiamo aspettarci che accada qualcosa di simile a quello che abbiamo visto al Cap. 6 per la caduta libera di una sorgente puntiforme. Sappiamo che per un osservatore posto a grande distanza l’intensità della luce ricevuta, quando la sorgente si approssima all’orizzonte, non si annulla mai, ma decade esponenzialmente, con costante di tempo M (GM/c^3 in unità ordinarie).

Il calcolo è più complicato per una sorgente estesa, come la stella, perché occorre considerare non solo la luce emessa quasi radialmente, ma anche quella in tutte le altre direzioni. Sappiamo dal Cap. 5 che in vicinanza di $r = 3M$ la luce può fare anche molti giri prima di allontanarsi dalla sorgente; dobbiamo quindi aspettarci un allungamento della costante di tempo. Infatti il risultato è il seguente: il decadimento è ancora esponenziale, ma la costante di tempo è $3\sqrt{3}M$.

Prima di concludere questa discussione occorre ricordare che finora siamo sempre rimasti nel quadro di un modello assai poco realistico: la stella di polvere. Dobbiamo perciò chiederci in che misura i risultati ottenuti dipendano dal modello, o possano venire radicalmente alterati dall’adozione di un’equazione di stato più plausibile. In sostanza: la presenza di una pressione modifica, e come, le modalità del collasso?

Anche senza calcoli non è difficile dare qualche risposta. È ovvio che in presenza di pressione la materia non segue più le geodetiche, come mostra l’eq. (19–6); più esattamente, dobbiamo aspettarci una forza diretta verso l’esterno, che rallenta la caduta. Si presentano così due alternative:

- la forza di pressione è sufficientemente grande da arrestare la caduta prima del raggio di Schwarzschild; in questo caso il collasso non ha luogo
- la caduta prosegue oltre il raggio di Schwarzschild, anche se rallentata; allora la contrazione di tutta la materia nella singolarità $r = 0$ è inevitabile, e le modalità saranno qualitativamente simili a quelle che abbiamo trovato col nostro modello.

Vogliamo chiudere con un breve cenno a un altro aspetto secondo cui il nostro modello era particolare. Abbiamo sempre supposto l'esatta simmetria sferica. Che si può dire del collasso gravitazionale se si abbandona questa restrizione? Aggiungiamo che anche senza dirlo esplicitamente abbiamo sempre supposto che la materia della stella fosse elettricamente neutra: ipotesi ragionevole, ma in linea di principio non necessaria.

Una carica elettrica modifica la geometria dello spazio-tempo, per la seguente ragione. Intorno alla carica c'è un campo elettrico, che ha un tensore energia-impulso non nullo; dunque non siamo più nel vuoto, e la geometria esterna non è soluzione di $\mathbf{G} = 0$. La soluzione in presenza di carica, e anche di momento angolare, è nota (geometria di Kerr–Newman) ma non la discuteremo qui.

Abbiamo visto al Cap. 18 che la metrica asintotica dipende solo dalla massa e dallo spin del sistema (non dipende invece dalla carica, perché questa produce deviazioni dal caso neutro che vanno a zero come $1/r^2$). È ovvio che lo stesso non può essere vero a piccola distanza; del resto già nella teoria newtoniana il campo gravitazionale è semplice solo a grande distanza, mentre a piccole distanze entrano in gioco i multipoli superiori, che è un altro modo di dire che il campo dipende da tutti i dettagli della distribuzione di materia.

Ciò premesso, è piuttosto sorprendente, ma forse anche comprensibile, che si riesca a dimostrare — sotto ipotesi tecnicamente complesse, ma plausibili — che la geometria esterna di un sistema collassato (nel quale dunque la materia è tutta sotto l'orizzonte) è quella di Kerr–Newman, ossia determinata solo da massa, carica e spin. Tutti gli altri aspetti della distribuzione di materia diventano quindi inosservabili.

Appendice: calcolo della metrica esterna

Per arrivare alla (22–20) si può procedere così: i vettori base delle nuove coordinate, $\mathbf{e}_{\bar{t}}$ ed $\mathbf{e}_{\bar{r}}$ si esprimono in termini dei vecchi mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\bar{t}} &= A \mathbf{e}_t + B \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_{\bar{r}} &= C \mathbf{e}_t + D \mathbf{e}_r.\end{aligned}\tag{22–23}$$

con A, B, C, D funzioni scalari da determinare. I cercati coefficienti della metrica non sono che i prodotti scalari di $\mathbf{e}_{\bar{t}}, \mathbf{e}_{\bar{r}}$. Abbiamo già mostrato che $\mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = 1$, $\mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{r}} = 0$; resta quindi da trovare $\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{r}}$.

Dalle (22–23) segue:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = A^2 \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t + B^2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = A^2 g_{tt} + B^2 g_{rr} \\ 0 &= \mathbf{e}_{\bar{t}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{r}} = AC \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t + BD \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = AC g_{tt} + BD g_{rr} \\ \mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{r}} &= C^2 \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t + D^2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = C^2 g_{tt} + D^2 g_{rr} \end{aligned}$$

(si ricordi che $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_r = g_{tr} = 0$). Ricavando C dalla seconda, sostituendo nella terza, e semplificando per mezzo della prima, si arriva a

$$\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{r}} = \frac{D^2}{A^2} \frac{g_{rr}}{g_{tt}}. \quad (22-24)$$

Occorre ora calcolare A e D . Quanto ad A , dal Cap. 5 (con le notazioni attuali) si ha:

$$A = \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \frac{Er}{r - 2M} = \frac{r}{r - 2M} \sqrt{\frac{\bar{r} - 2M}{\bar{r}}}.$$

Quanto a D , occorre tener presente che

$$r = \bar{r} f(x) \quad \text{con} \quad x = \bar{t} \sqrt{2M/\bar{r}^3}$$

da cui

$$D = \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = f + \bar{r} \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \bar{r}}.$$

Dalla (22–17):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{df} &= -\sqrt{\frac{f}{1-f}} & \frac{df}{dx} &= -\sqrt{\frac{1-f}{f}} \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{r}} &= -\frac{3x}{2\bar{r}} \end{aligned}$$

e infine

$$D = f + \frac{3}{2}x \sqrt{\frac{1-f}{f}}.$$

Possiamo finalmente sostituire nella (22–22) e ottenere:

$$\mathbf{e}_{\bar{r}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{r}} = \frac{\bar{r}}{\bar{r} - 2M} \left(f + \frac{3}{2}x \sqrt{1/f - 1} \right)^2$$

e la (22–20) è giustificata.