CAPITOLO 25

Vogliamo concludere il breve cenno alla cosmologia approfondendo l'aspetto osservativo: passeremo perciò in rassegna alcune relazioni fra grandezze osservabili e parametri dei modelli. In primo luogo descriveremo relazioni che ormai hanno più che altro interesse storico; poi descriveremo alla versione moderna del confronto teoria–osservazioni.

Il parametro di decelerazione

Cominciamo riprendendo alcune idee già trattate nel Cap. 8 a proposito della relazione fra redshift e distanza. Avevamo allora introdotto, accanto alla costante di Hubble $H = \dot{R}/R$, anche il *parametro di decelerazione*

$$q = -\frac{R\,\ddot{R}}{\dot{R}^2} = -\frac{\ddot{R}}{H^2 R}.$$

Se teniamo presente la (23–8) vediamo che almeno finché la pressione è trascurabile vale la relazione

$$q = \tfrac{1}{2}\,\Omega - \Omega_\Lambda.$$

Dato che le tre possibilità per k corrispondono, per $\Lambda = 0$, all'essere Ω maggiore uguale o minore di 1, la decisione dipende dal valore di q: a seconda che sia maggiore, uguale o minore di $1/2$.

Sempre al Cap. 8 avevamo visto che la legge di Hubble, al secondo ordine nella distanza, prende la forma (8–13):

$$z = H_0\, l_0 + \tfrac{1}{2}(1 + q_0)\, H_0^2\, l_0^2 \tag{25–1}$$

(nella (25–1) gli indici $_0$ stanno a indicare i valori attuali). Occorre solo precisare il significato di l_0: stiamo considerando una sorgente e un osservatore, che occupano posizioni assegnate rispetto alle coordinate comoventi χ, ϑ, φ, ossia sono fermi rispetto alla materia. Assumiamo che l'osservatore occupi l'origine delle coordinate ($\chi = 0$): allora la loro distanza a un certo t vale $l = R(t)\,\chi$, dove con χ si è indicata la coordinata della sorgente. In particolare, $l_0 = R(t_0)\,\chi$.

La (25–1) permetterebbe in linea di principio di determinare H_0 e q_0; il suo impiego è utile principalmente nel visibile, dove si misura bene z. Sulla difficoltà di determinare H_0 abbiamo già detto alla fine del Cap. 23: va da sé che ne discende anche una grande incertezza per q_0 e non si arriva per questa via a decidere il segno della curvatura.

La relazione flusso-redshift

Si può mettere la relazione tra redshift e distanza in un'altra forma, più direttamente connessa con dati osservabili. Consideriamo una sorgente avente luminosità *assoluta* L (con ciò s'intende la potenza totale irraggiata nel proprio riferimento locale di quiete). Vogliamo conoscere il *flusso* che ci arriva da quella sorgente, supponendo di conoscerne (per ora) la distanza, ossia χ. (Per flusso intendiamo la potenza ricevuta per unità di superficie del rivelatore.)

Dall'espressione (23–1) della metrica di Robertson–Walker si trova l'area della sfera centrata nella sorgente e passante per l'osservatore: $A = 4\pi R^2 \Sigma^2$. Si può dunque calcolare il flusso come L/A? No, perché la radiazione ricevuta è indebolita, a causa dell'espansione, per due effetti: il redshift cosmologico sui singoli fotoni, e il ridotto ritmo di arrivo di questi (si veda la discussione analoga fatta, per la sorgente in caduta libera, al Cap. 5). Entrambi gli effetti riducono il flusso per un fattore $1 + z$; quindi l'espressione corretta è

$$F = \frac{L}{4\pi R_0^2\, \Sigma^2}\, \frac{1}{(1+z)^2}. \tag{25–2}$$

Si può anche esprimere la (25–2) introducendo la *distanza di luminosità* d_L in modo che sia

$$F = \frac{L}{4\pi\, d_\mathrm{L}^2}.$$

ossia intendendo per d_L la distanza come si ricaverebbe, per una sorgente di luminosità L, se valesse la geometria euclidea e la legge $1/r^2$ per l'intensità della luce. Allora la (25–2) implica

$$d_\mathrm{L} = R_0\, \Sigma\, (1+z).$$

Per il momento non vogliamo andare oltre il secondo termine in uno sviluppo in z o in χ; quindi possiamo sempre confondere $\Sigma(\chi)$ con χ, perché le differenze si hanno solo nel terzo ordine. Allora $R_0\, \Sigma = R_0\, \chi = l_0$ e

$$F = \frac{L}{4\pi l_0^2}\, (1 - 2z). \tag{25–3}$$

Dobbiamo ora esprimere l_0 in funzione di z, ossia invertire la (25–1): il risultato è

$$H_0 l_0 = z \left[1 - \tfrac{1}{2}(1+q_0)\, z\right]. \tag{25–4}$$

Sostituendo questa nella (25–3), e trascurando i termini di ordine superiore:

$$F = \frac{L\, H_0^2}{4\pi z^2}\, [1 + (q_0 - 1)z]. \tag{25–5}$$

La (25–5) risponde al problema proposto e riesce più utile nell'ambito radioastronomico. La difficoltà nel trarne informazioni sui parametri è sempre la solita: mentre è facile misurare F e z, non è facile avere stime affidabili della luminosità assoluta, tra l'altro a causa di effetti evolutivi, di cui diremo più avanti.

L'effetto lente

Un possibile modo per determinare la distanza di una sorgente si basa sulla misura del suo diametro angolare α. Se infatti è noto il diametro lineare D, avremo $D = l\alpha$, da cui $l = D/\alpha$. Però questa relazione è corretta solo in un universo piatto e statico: vogliamo ora studiare come va modificata se si tiene conto della curvatura e dell'evoluzione.

Formuleremo il problema come segue: diciamo *distanza ottica* d_o quella definita da

$$d_\mathrm{o} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{D}{\alpha}. \tag{25–6}$$

Vogliamo trovare la dipendenza di d_o da z.

Dalla solita espressione della metrica, si vede che

$$D = R\,\Sigma(\chi)\,\alpha \tag{25–7}$$

essendo R, come già detto, il valore all'emissione. Questo è vero perché se ci si mette al tempo di emissione, e si considera la sezione spaziale a quel tempo, la parte spaziale della metrica porta proprio alla (25–7), dato che la propagazione della luce da ogni punto della sorgente all'osservatore sarà radiale. Combinando (25–6) e (25–7) si arriva a

$$d_\mathrm{o} = R(\eta)\,\Sigma(\chi) \tag{25–8}$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza di R da η, per il motivo che vedremo subito.

Ricordando la discussione sulla propagazione radiale della luce, fatta nel Cap. 8, si vede che $\eta = \eta_0 - \chi$. Si può quindi calcolare d_o in funzione di χ per ciascuno dei tre casi $k = 1$, $k = 0$, $k = -1$; e si ha anche parallelamente l'espressione di z. Il problema è quindi risolto (a meno di qualche calcolo). Non interessa qui dare altri dettagli, ma solo le caratterstiche essenziali, che sono comuni ai tre casi:

– Per piccoli z si ritrova $d_\mathrm{o} = z/H_0$, che è quanto ci si doveva aspettare.

– Per $z \to \infty$ ($\chi \to \eta_0$) si trova che $d_\mathrm{o} \to 0$, perché $R \to 0$.

– Ne segue che d_o deve avere un massimo per qualche valore intermedio, e infatti questo accade per $\chi = \frac{1}{3}\eta_0$. Il corrispondente valore di z dipende dal modello: ad es. per $k = 0$ il massimo si ha per $z = 5/4$.

La funzione $N(<z)$

Un genere diverso di dati osservativi si ottiene dal conteggio delle sorgenti in funzione della distanza. Più esattamente: indichiamo con $N(<z)$ il numero di sorgenti con redshift che non supera z (e quindi che non sono più lontane di un certo l). Per confrontare la grandezza misurata con la teoria, occorre ovviamente un'ipotesi, che è suggerita dal principio cosmologico: che a un dato t la distribuzione delle sorgenti sia omogenea. Indicheremo quindi con n il numero di sorgenti per unità di volume in coordinate comoventi. Allora le sorgenti fino a un dato χ sono

$$N = n \cdot 4\pi \int_0^\chi \Sigma^2 d\chi = \tfrac{4}{3}\pi\, n\, \chi^3$$

indipendentemente da k, nel senso che la scelta di k influisce solo su termini dell'ordine di χ^5, che trascuriamo.

Dalla (25–4), tenendo presente che $l_0 = R_0\, \chi$, si ha

$$\chi = \frac{z}{H_0\, R_0} \left[1 - \tfrac{1}{2}(1 + q_0)\, z\right]$$

e infine

$$N(<z) = \tfrac{4}{3}\pi\, n \left(\frac{z}{H_0 R_0}\right)^3 \left[1 - \tfrac{3}{2}(1 + q_0)\, z\right]. \qquad (25\text{–}9)$$

Tanto per cambiare, anche la (25–9) non dà buoni risultati, per varie ragioni. Nel caso di sorgenti visibili si misura bene il redshift, ma è difficile il conteggio, a causa di errori sistematici dovuti all'assorbimento della materia intergalattica e alla possibile sovrapposizione visuale di più sorgenti. Viceversa nel caso di radiosorgenti non ci sono grossi problemi nel conteggio, ma è problematica la determinazione del redshift, per la mancanza di righe spettrali.

La funzione $N(>F)$

Concludiamo questa parte con una relazione che lega il conteggio al flusso incidente. Supponiamo per il momento che tutte le sorgenti abbiano la stessa lunminosità assoluta: allora F e z sono in relazione, come mostra la (25–5).

Partiamo dalla (25–9), e combiniamola con la (25–5), che dobbiamo però invertire:

$$z = H_0 \sqrt{\frac{L}{4\pi\, F}} \left(1 + \tfrac{1}{2}(q_0 - 1)\, H_0 \sqrt{\frac{L}{4\pi\, F}}\right).$$

Il risultato è

$$N(>F) = \tfrac{4}{3}\pi\, n \left(\frac{L}{4\pi R_0^2\, F}\right)^{3/2} \left(1 - 3H_0 \sqrt{\frac{L}{4\pi\, F}}\right). \qquad (25\text{–}10)$$

Ricordiamo che per arrivare alla (25–10) abbiamo fatto l'ipotesi che L sia la stessa per tutte le sorgenti. Ciò non è ovviamente vero, e la correzione implicherà una media sulla distribuzione di L. Fortunatamente questo non altera alcuni aspetti qualitativi e importanti della (25–10):

– il termine principale va come $F^{-3/2}$, che è ciò che ci si aspetterebbe in un universo statico ed euclideo

– il termine correttivo non dipende da q_0 ed è sempre negativo.

La (25–10) è nota come "test di Hubble," perché fornisce un modo per verificare la validità del modello cosmologico senza coinvolgere il parametro q_0, che è il punto debole di tutti questi test. In scala bilogaritmica la (25–10) darà una retta di pendenza $-3/2$ a grandi F (sorgenti vicine), mentre ci si dovrebbe aspettare uno scostamento *verso il basso* a piccoli F, a causa del secondo termine in parentesi. La fig. 25–1 mostra la situazione: oltre alla retta si vede tratteggiata la deviazione attesa, e anche l'andamento delle osservazioni.

Il fatto più evidente è che lo scostamento è dalla parte opposta: N è più grande del previsto a piccoli F. Si vede poi che per F molto piccoli il conteggio comincia a decrescere.

L'interpretazione di questo scostamento è pressoché obbligata. Occorre tener presente che il principio cosmologico richiede un n costante in tutto lo spazio *a un dato* t, ma non dice niente sulla dipendenza da t. Possiamo benissimo aspettarci che le sorgenti abbiano una storia, per es. nel senso che la loro luminosità assoluta vada diminuendo nel tempo. Se così è, dato che le sorgenti più lontane (quelle con F piccolo) sono osservate quando sono più giovani, quindi più luminose, i punti corrispondenti del grafico si spostano verso destra, producendo un apparente innalzamento della curva.

Per spiegare la caduta per F molto piccolo basta supporre che esista un'epoca di formazione delle sorgenti: se si va a distanze troppo grandi si osserva un universo più giovane di quell'epoca, quando le sorgenti ancora non esistono (o sono in numero molto minore).

Approccio moderno ai test cosmologici

Negli ultimi anni le osservazioni interessano sempre più sorgenti ad alto redshift (fino a 4 e più), mentre allo stesso tempo si sono escogitati tutta una serie di possibili confronti fra teoria e osservazione. La situazione è piuttosto complicata e in continua evoluzione, per cui non ha senso descriverla in dettaglio: dedicheremo la parte finale di questo capitolo all'impostazione generale comune a diversi metodi, e alla descrizione più dettagliata di due di questi.

In primo luogo conviene introdurre, per semplificare le notazioni, il *parametro di scala* $a = R/R_0$ (rapporto fra il raggio a un tempo generico e quello attuale (al tempo presente $a = 1$). La relazione (8–8) col redshift diventa allora

$$1 + z = \frac{1}{a}. \tag{25–11}$$

Passiamo poi a dare una diversa forma alla (23–10), facendo uso dei parametri Ω, Ω_k, Ω_Λ introdotti alla fine del Cap. 23. Anzi, ci converrà distinguere due contributi a Ω: quello Ω_m dovuto alla materia fredda e quello Ω_r dovuto alle particelle ultrarelativistiche. La ragione è che, come sappiamo, è diversa la loro evoluzione in funzione di R. Sopprimeremo poi, per brevità, l'indice $_0$, restando inteso che tutti gli Ω indicano i valori attuali. Ovviamente

$$\Omega_\mathrm{r} + \Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{k} + \Omega_\Lambda = 1. \tag{25–12}$$

È allora facile vedere che la (23–10) si può scrivere

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_\mathrm{r} a^{-4} + \Omega_\mathrm{m} a^{-3} + \Omega_\mathrm{k} a^{-2} + \Omega_\Lambda\right)$$

ossia

$$\frac{\dot a}{a} = H_0\, E(a) \tag{25–13}$$

dove la funzione $E(a)$ è definita da

$$E(a) = \left(\Omega_\mathrm{r} a^{-4} + \Omega_\mathrm{m} a^{-3} + \Omega_\mathrm{k} a^{-2} + \Omega_\Lambda\right)^{1/2}.$$

La (25–12) mostra che $E(1) = 1$. Dalla (25–13) si ricava

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{da}{a\, E(a)}.$$

Nella propagazione radiale della luce (che, come sappiamo, non è una restrizione) vale $dt = R\, d\chi = R_0\, a\, d\chi$; quindi la distanza attuale l_0 di una sorgente è

$$l_0 = R_0\, \chi = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{H_0} \int_a^1 \frac{da'}{a'^2\, E(a')}.$$

Ma possiamo anche usare come variabile indipendente z, grazie alla (25–11):

$$l_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \tag{25–14}$$

Questa è la relazione generale redshift–distanza, che sostituisce la (25–1). Invece la (25–2) è esatta, purché si tenga presente che in essa $\Sigma(\chi)$ va espressa come funzione di z, tramite la

$$\chi = \frac{1}{H_0\, R_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \tag{25–15}$$

che deriva immediatamente dalla (25–14). Otteniamo così la *relazione flusso–redshift* valida in generale. Purtroppo non è possibile darne una forma analitica comoda, perché l'integrale che appare in (25–14) non si esprime con funzioni elementari (è un integrale ellittico). Ciò non impedisce, naturalmente, un calcolo numerico accurato quanto occorre.

La relazione magnitudine–redshift

Alla relazione flusso–redshift si dà spesso la forma di una *relazione magnitudine–redshift*, procedendo come segue. La definizione di *magnitudine apparente* usata in astronomia è

$$m = -2.5 \log(F/F_0)$$

dove F_0 è il flusso che arriva da una sorgente di riferimento (log è il logaritmo decimale). Si definisce poi *magnitudine assoluta* M la magnitudine apparente che l'oggetto avrebbe se si trovasse alla distanza convenzionale di 10 pc. Allora dalla definizione di d_{L} segue

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d_{\mathrm{L}}}{10\,\mathrm{pc}} \right) = 5 \log \left(\frac{d_{\mathrm{L}}}{1\,\mathrm{Mpc}} \right) + 25. \tag{25–15}$$

La (25–15) viene applicata, esprimendo d_{L} in funzione di z, per il confronto tra sorgenti di cui sia nota la magnitudine assoluta: per es. supernovæ di un dato tipo. Allora le osservazioni danno per ciascuna sorgente m e z; l'espressione teorica (25–15) contiene i 4 parametri Ω_{m}, Ω_{r}, Ω_{k}, Ω_{Λ} che è possibile ricavare (ovviamente con un certo errore, più o meno grande) dal fit sui dati osservati.

Come abbiamo già accennato in precedenza, il punto delicato di queste misure è sempre la stima della distanza, che nel caso della relazione magnitudine–redshift risale alla difficoltà di stimare la magnitudine assoluta degli oggetti osservati.

Il test d'isotropia

Supponiamo di osservare un oggetto isotropo, ossia avente simmetria sferica. Possiamo misurare direttamente due cose:

a) la differenza di redshift Δz tra la parti più vicine e quelle più lontane dell'oggetto

b) il suo diametro angolare $\Delta\vartheta$.

Vogliamo vedere che relazione prevede la teoria tra queste due grandezze.

Per quanto riguarda $\Delta\vartheta$ la risposta è semplice, ed è già contenuta nella definizione (25–6) di distanza ottica d_{o}:

$$\Delta\vartheta = \frac{D}{d_{\mathrm{o}}} = \frac{D}{R\,\Sigma} = D\,\frac{1+z}{R_0\,\Sigma}. \tag{25–16}$$

Quanto a Δz, differenziando la (25–14) troviamo

$$\frac{dz}{d\chi} = H_0\, R_0\, E(z)$$

e quindi al primo ordine

$$\Delta z = H_0\, R_0\, E(z)\, \Delta\chi = H_0\, R\, (1+z)\, E(z)\, \Delta\chi = H_0\, D\, (1+z)\, E(z) \qquad (25\text{–}17)$$

perché all'epoca di emissione $D = R\, \Delta\chi$.

Confrontando (25–16) e (25–17) si trova

$$\frac{\Delta z}{\Delta\vartheta} = H_0\, R_0\, E(z)\, \Sigma(\chi) \qquad (25\text{–}18)$$

dove il secondo membro è esprimibile in termini di z e dei parametri Ω del modello. Pertanto la (25–18) fornisce una relazione fra la grandezza osservabile a primo membro e quella teorica a secondo membro.

Situazione attuale dei parametri cosmologici

È assai difficile riassumere la situazione attuale, sia perché rapidamente variabile man mano che le osservazioni si raffinano e altre se ne aggiungono, sia perché sussistono comunque molte incertezze, e i dati ammettono diverse interpretazioni. Cercando di dare un quadro schematico, si può dire che dalle osservazioni più recenti — principalmente dalla relazione magnitudine–redshift di supernovæ e dalle fluttuazioni della radiazione di fondo — si ricava:

a) Il valore presente di $\Omega_{\rm r}$ è trascurabile, come già detto.

b) Il valore di $\Omega_{\rm m}$ sembra decisamente minore di 1, forse intorno a 0.3.

c) I dati sono compatibili con $\Omega_{\rm k} = 0$ (spazio piatto).

d) Sembra necessario un $\Omega_\Lambda > 0$, attorno a 0.7.

Un problema è fornito proprio dal valore non nullo di Ω_Λ; non per le ragioni estetiche che disturbavano Einstein, ma per il fatto che non si sa dare un'origine plausibile di questo termine cosmologico. Paradossalmente, dalla teoria delle interazioni fondamentali si potrebbe dedurre un contributo che si comporta come un termine cosmologico, ma qualsiasi stima ragionevole porta a valutarlo troppo grande, per oltre 50 ordini di grandezza! Quindi: mentre non sarebbe strano che il termine cosmologico sia nullo (si potrebbero cercare ragioni per cui la previsione teorica non vale) è invece preoccupante un termine non nullo, ma così piccolo che riesce impossibile vederlo come risultato di una cancellazione quasi completa, ma non proprio.

Si è perciò proposto che esista della materia sconosciuta, con proprietà del tutto diverse da quella ordinaria, e che potrebbe produrre un effetto analogo a quello del termine cosmologico. Ma si tratta di speculazioni prive di una base solida, per cui il problema rimane aperto.