E. Fabri *agosto 2014*

Trasformazione relativistica delle velocità *

Premessa

La prima versione di questo scritto risale al 2005, e fu motivata da un quesito che mi venne posto a quel tempo da un insegnante. La domanda era: "visto che in varie occasioni hai ribadito il tuo punto di vista, secondo cui le trasformazioni di Lorentz sono inutili per l'insegnamento della relatività nella scuola secondaria, anzi sono addirittura dannose, come puoi arrivare, senza usarle, alla legge di composizione relativistica delle velocità?" L'articolo era appunto una veloce esposizione della mia risposta.

A distanza di nove anni niente si è mosso nell'insegnamento della relatività: le immancabili dilatazioni dei tempi e contrazioni delle lunghezze figurano nelle vigenti "Indicazioni Nazionali" (insieme purtroppo alla "equivalenza massa-energia" usata a sproposito, ma questo è un altro discorso). Gli stessi argomenti, insieme con le trasf. di Lorentz e l'*addizione* [sic] delle velocità compaiono come "irrinunciabili" in una recente proposta di syllabus per il quinto anno del Liceo scientifico riformato [1].

Aggiungo due parole sulle trasf. di Lorentz, e sul perché a mio parere non sarebbero da trattare nella scuola secondaria. Ho esposto le mie vedute in materia in numerose occasioni: ricordo per es. un seminario al Congresso AIF di Chianciano del 1991 [2] e il Quaderno 16 di *La Fisica nella Scuola* [3], dove a pag. 105 si trova una "Parentesi sulle trasformazioni di Lorentz." Si veda anche la discussione alle pag. 118-120, fino al "problema del triangolo."

Detto in breve: se è vero che le trasf. di Lorentz sono uno strumento matematico che permette di ricavare "automaticamente" parecchi risultati della RR (tra cui appunto la "composizione" o "addizione" delle velocità), è non meno vero che — come molti strumenti matematici — presentano un rischio: che lo studente apprenda la meccanica del procedimento ma perda di vista il significato fisico di quello che sta facendo. Per questo motivo caldeggio l'uso di strumenti geometrici "intrinseci," e in parallelo il ricorso sistematico a diagrammi spazio-tempo, dove la peculiare geometria dello spazio-tempo (che rappresenta l'essenza della relatività) viene messa in luce e applicata a problemi concreti. Ne vedremo un esempio nel seguito.

---

* Una prima versione, datata dicembre 2005, è stata pubblicata su *La Fisica nella Scuola* **39** (2006), 163. La presente versione è aggiornata e ampliata in diversi punti.

La cosiddetta “legge di composizione delle velocità”

È ben noto il risultato, dovuto a Galileo, che se un corpo C si muove rispetto a un certo sistema di riferimento (brevemente, rif.) K′ con la velocità v', e il detto rif. si muove rispetto a un altro rif. K di moto traslatorio con la velocità u, allora la velocità di C rispetto a K è

$$v = v' + u. \tag{1}$$

La relazione vale tra le velocità vettoriali (e vale anche, in forma più complicata, per moti non traslatori); ma qui ci limiteremo al caso semplice in cui tutte le velocità hanno la stessa direzione e lo stesso verso, che assumeremo positivo. Supporremo inoltre che tutte le velocità siano costanti; in particolare quindi entrambi i rif. K e K′ saranno inerziali.

La (1) si legge dicendo che la velocità di C rispetto a K′ si somma a quella di K′ rispetto a K per dare la velocità di C rispetto a K: da qui il nome di “legge di addizione”; invece “composizione” sembra ricalcato piuttosto, pensando al caso vettoriale, sulla “composizione delle forze.”

Uno dei più noti effetti relativistici è certamente la modifica della cosiddetta legge di composizione (o addizione) galileiana, che va sostituita con quella “einsteiniana”: in relatività la (1) non è più valida, se non come caso limite a piccole velocità.

Purtroppo la (1) a livello di senso comune (ma non solo!) appare quasi “ovvia,” o addirittura “logicamente” necessaria, per cui metterla in discussione suona paradossale. Il problema si supera per mezzo di un’accurata discussione sul significato dei concetti che intervengono esplicitamente o implicitamente, primo fra tutti quello di tempo assoluto; ma ciò non toglie che la non validità della (1) resta una “stranezza” della relatività. È forse per questo che chiunque s’impegni a trattare di relatività, anche nel modo più ridotto ed elementare possibile, non può fare a meno di giustificarla e di derivare la formula einsteiniana che la sostituisce.

Prima di procedere, vorrei motivare il “cosiddetta” che ho messo nel titolo di questa sezione. Ho inteso dire che il termine “composizione” (come pure “addizione”) è improprio, per più ragioni:

- I termini usati sembrano suggerire un ruolo simmetrico delle due velocità u e v', mentre in partenza tale simmetria non sussiste. Infatti v e v' sono velocità di un corpo generico rispetto a due diversi rif., mentre u è la velocità di K′ rispetto a K.
- Parlare di “composizione” (e ancor peggio di “addizione”) sembra rendere necessaria la forma galileiana, che è appunto una semplice somma.(1)

(1) Il termine “composizione” può in realtà essere … riabilitato a un livello superiore di discussione, se al posto del corpo C pensiamo un terzo rif. K″: allora la legge in esame diventa la legge di composizione, in termini di velocità, del gruppo di trasformazioni (di Lorentz) che fanno passare da un rif. all’altro.

In realtà ciò che si sta facendo è un'operazione ben diversa. Stiamo studiando il moto di un corpo C, e ci chiediamo come le caratteristiche del moto *si trasformano* al variare del rif. dal quale lo si studia. Stiamo insomma cercando la *legge di trasformazione* delle grandezze che descrivono il moto, e in particolare della velocità. In altre parole, cerchiamo la risposta alla seguente domanda: "nota la velocità di C rispetto a K′, quale sarà la sua velocità rispetto a K?"

La stessa domanda potremmo porci per qualsiasi altra grandezza cinematica o dinamica: accelerazione, quantità di moto, forza, energia… Alcune di tali grandezze potranno risultare le stesse in entrambi i rif. (saranno quindi *invarianti*) mentre altre cambieranno da K′ a K: la velocità è ovviamente tra queste.

Detto tutto ciò, è ragionevole la domanda, che mi è stata effettivamente rivolta: perché nella mia trattazione della relatività [3] non c'è traccia della legge di composizione (o addizione, o trasformazione)? Seguita da una seconda domanda: se uno volesse dedurre la legge einsteiniana con l'approccio geometrico da me sostenuto, potrebbe farlo, e come?

La mia risposta alla prima domanda imitava quella famosa di Laplace a Napoleone: "non l'ho trattata perché non ne avevo bisogno." Alla seconda risposi invece: "certamente si può, ma dovrei pensarci." Ci ho pensato, e quest'articolo ha lo scopo di esporre il risultato.(2)

La scena e i personaggi: il riferimento K′

La scena in cui si svolge il fenomeno che dobbiamo esaminare è piuttosto naturale. Consideriamo due punti $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, fermi nel rif. K′ a certe coordinate $x'_\mathcal{P}$, $x'_\mathcal{Q}$ ($x'_\mathcal{Q} > x'_\mathcal{P}$). Il corpo in moto è schematizzato in un punto materiale $\mathcal{R}$, con velocità v'. $\mathcal{R}$ coincide con $\mathcal{P}$ a un certo istante, e con $\mathcal{Q}$ a un istante successivo: queste due coincidenze sono due *eventi*, che indichiamo con A, B e ai quali associamo le coordinate spazio-temporali

$$t'_\mathrm{A}, \quad x'_\mathrm{A} = x'_\mathcal{P} \qquad\qquad t'_\mathrm{B}, \quad x'_\mathrm{B} = x'_\mathcal{Q}.$$

In coincidenza con l'evento A facciamo partire da $\mathcal{P}$ un raggio di luce, che raggiungerà $\mathcal{Q}$ all'evento C, di coordinate

$$t'_\mathrm{C}, \quad x'_\mathrm{C} = x'_\mathcal{Q}.$$

Il tutto è rappresentato nella fig. 1.

(2) Una trattazione non troppo diversa, ma a mio parere più complicata, si trova nel libro di Taylor e Wheeler [4], es. 3.11.

È importante sottolineare un aspetto dei simboli introdotti. In primo luogo, ho usato un carattere diverso per i *punti* e per gli *eventi*: "calligrafico" per i primi, "tondo" per i secondi. Secondo, e più importante: nella fig. 1 i "punti" sono rappresentati da rette, gli eventi da punti. Questo accade perché gli eventi sono effettivemente *punti nello spazio-tempo*, mentre quelli che ho chiamato "punti" sono oggetti fisici di piccole dimensioni (i "punti materiali" della meccanica classica) che nello spazio-tempo hanno una *storia*, e quindi debbono essere rappresentati dal loro *diagramma orario*, detto anche "linea d'universo." Nel nostro caso, trattandosi di punti fermi o in moto uniforme, i diagrammi orari sono rette.

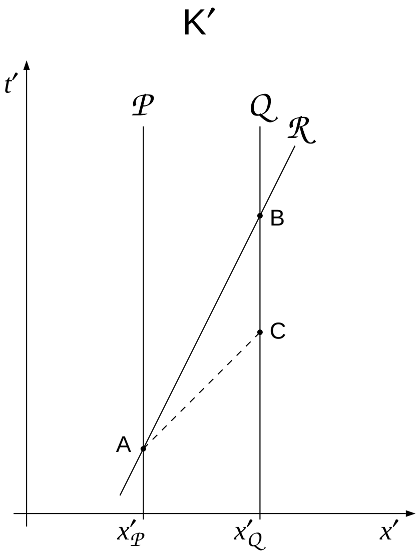

fig. 1

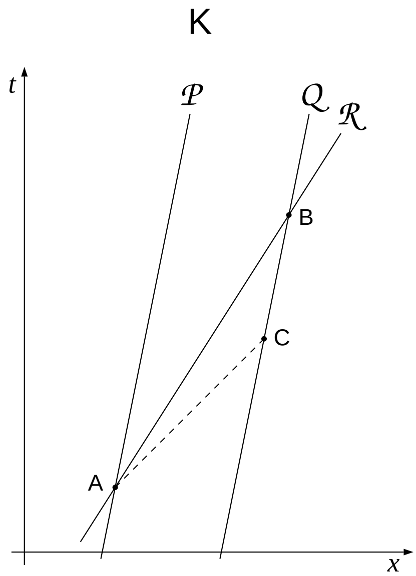

fig. 2

Il fatto che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ siano fermi in K′ (a differenza di $\mathcal{R}$) giustifica una scrittura come $x'_{\mathrm{A}} = x'_{\mathcal{P}}$, a rigore scorretta: ha senso attribuire una coordinata x a un evento, ma non a un punto (in generale). Solo perché $\mathcal{P}$ è fermo in K′, e quindi il suo diagramma orario ha l'equazione $x' = \text{cost.}$, possiamo assegnare una x' anche al punto $\mathcal{P}$.

Fra le coordinate degli eventi A, B, C sussistono delle ovvie relazioni:

$$\begin{gathered} x'_{\mathrm{B}} - x'_{\mathrm{A}} = v'(t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}) \\ x'_{\mathrm{C}} - x'_{\mathrm{A}} = t'_{\mathrm{C}} - t'_{\mathrm{A}} \end{gathered} \tag{2}$$

che esprimono rispettivamente il fatto che il punto $\mathcal{R}$ ha la velocità v', e che la luce ha velocità 1 (poniamo $c = 1$, come d'uso).

Dobbiamo ora calcolare la distanza (nella geometria dello spazio-tempo) fra gli eventi A e B:

$$\Delta\tau^2_{\mathrm{AB}} = (t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}})^2 - (x'_{\mathrm{B}} - x'_{\mathrm{A}})^2 = \bigl(1 - v'^2\bigr)\bigl(\Delta t'_{\mathrm{AB}}\bigr)^2 \tag{3}$$

dove abbiamo abbreviato $t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}$ con $\Delta t'_{\mathrm{AB}}$.

Per ragioni che saranno chiare in seguito, è preferibile esprimere $\Delta\tau_{\mathrm{AB}}$ in funzione di $\Delta t'_{\mathrm{CB}}$ anziché di $\Delta t'_{\mathrm{AB}}$, e ciò può farsi al modo seguente. Osserviamo che i primi membri delle (2) sono uguali, per cui confrontando

$$t'_{\mathrm{C}} - t'_{\mathrm{A}} = v'(t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}).$$

Allora

$$t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{C}} = (t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}) - (t'_{\mathrm{C}} - t'_{\mathrm{A}}) = (1 - v')\,(t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}})$$

e infine

$$\Delta t'_{\mathrm{AB}} = \frac{\Delta t'_{\mathrm{CB}}}{1 - v'}.$$

Sostituendo questa nella (3) e semplificando si arriva a

$$\Delta\tau^2_{\mathrm{AB}} = \frac{1 + v'}{1 - v'}\,\bigl(\Delta t'_{\mathrm{CB}}\bigr)^2. \tag{4}$$

Secondo atto: nel riferimento K

L'idea centrale della dimostrazione è di esprimere $\Delta\tau_{\mathrm{AB}}$ in termini di grandezze misurate nel rif. K e confrontare, tenendo conto che $\Delta\tau_{\mathrm{AB}}$ *è invariante*: è il tempo proprio di $\mathcal{R}$ tra gli eventi A e B. Si procede come prima, con qualche maggiore complicazione dovuta al fatto che gli eventi B, C non hanno la stessa coordinata x perché il punto $\mathcal{Q}$ si muove, insieme con K$'$, con velocità u (fig. 2).

Al posto delle (2) abbiamo:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} &= v\,(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}) \\ x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}} &= t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{C}} &= u\,(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{C}}) \end{aligned} \tag{5}$$

dove nella prima riga si vede la velocità v di $\mathcal{R}$ rispetto a K (quella che vogliamo determinare) mentre nella seconda riga appare ancora la propagazione della luce, sempre con la stessa velocità pari a 1 nelle nostre unità. La novità è data dalla terza riga, dove è scritto che il punto $\mathcal{Q}$ dove avvengono gli eventi B e C si muove con la velocità u.[3]

Calcoliamo $\Delta\tau_{\mathrm{AB}}$:

$$\Delta\tau^2_{\mathrm{AB}} = (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})^2 - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 = (1 - v^2)\,\Delta t^2_{\mathrm{AB}} \tag{6}$$

---

(3) Le coordinate spazio-temporali degli eventi A, B, C nel rif. K, che abbiamo usato nelle (5), sono ovviamente connesse a quelle degli stessi eventi nel rif. K$'$ dalle trasf di Lorentz; ma noi *non faremo uso di queste relazioni*.

ed esprimiamo Δt_{AB} in funzione di Δt_{CB}. Dalle (5), sommando la seconda e la terza e confrontando con la prima:

$$v\,(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}) = (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}}) + u\,(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{C}}).$$

Usando di nuovo $t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{C}} = (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}) - (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}})$ si trova

$$\Delta t_{\mathrm{AB}} = \frac{1-u}{1-v}\,\Delta t_{\mathrm{CB}}$$

e sostituendo nella (6):

$$\Delta\tau^2_{\mathrm{AB}} = (1-u)^2\,\frac{1+v}{1-v}\,\Delta t^2_{\mathrm{CB}}. \tag{7}$$

Terzo atto: confronto e risultato

Come avevo annunciato, abbiamo ora due espressioni per $\Delta\tau_{\mathrm{AB}}$: una in termini di grandezze relative al rif. K′ (4) e l'altra al rif. K (7). Dato che $\Delta\tau_{\mathrm{AB}}$ è invariante possiamo uguagliarle, e otteniamo

$$\frac{1+v'}{1-v'}\,\left(\Delta t'_{\mathrm{CB}}\right)^2 = (1-u)^2\,\frac{1+v}{1-v}\,\Delta t^2_{\mathrm{CB}}. \tag{8}$$

A questo punto si capisce perché usare Δt_{CB} e $\Delta t'_{\mathrm{CB}}$. In K′ gli eventi C e B avvengono nello stesso punto $\mathcal{Q}$, per cui tra i due intervalli di tempo c'è una relazione semplice e nota (la “dilatazione del tempo”):

$$\Delta t_{\mathrm{CB}} = \frac{\Delta t'_{\mathrm{CB}}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Sostituendo questa nella (8) e semplificando arriviamo al risultato (quasi) finale:

$$\frac{1+v'}{1-v'} = \frac{1-u}{1+u}\,\frac{1+v}{1-v}. \tag{9}$$

Non c'è ormai che da risolvere la (9) rispetto a v per avere

$$v = \frac{v'+u}{1+u\,v'}. \tag{10}$$

Per lo stesso prezzo possiamo anche ottenere la relazione inversa, risolvendo la (9) rispetto a v':

$$v' = \frac{v-u}{1-u\,v}. \tag{11}$$

Si può osservare che in realtà (10) e (11) sono la stessa formula: basta scambiare i ruoli di K e di K′, e tener presente che la velocità di K rispetto a K′ è $-u$. Però il secondo punto è delicato: non è proprio ovvio che la velocità relativa dei due rif. cambi solo di segno misurandola da K o da K′, e bisognerebbe dimostrarlo. Volendo, sono proprio le (10), (11) a dare la dimostrazione: se $v' = 0$ si ha $v = u$, mentre se $v = 0$ allora $v' = -u$.

Commento e complemento

Le formule finali (10) e (11) sono state ottenute facendo uso esclusivamente di considerazioni cinematiche sulle leggi orarie dei punti $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, che sono facilmente leggibili nei diagrammi delle figure. In più è solo intervenuto un principio fisico fondamentale: l'*invarianza* dell'intervallo (tempo proprio) fra due eventi. In questo consistono gli strumenti geometrici intrinseci, di cui si parla nell'introduzione.

Non è forse superfluo insistere sull'importanza e utilità dei diagrammi spazio-tempo, come quelli delle nostre figure, per trattare diverse questioni di relatività. Un elenco (forse incompleto) di occasioni in cui ne ho mostrato l'uso, a parte il già citato [3], è dato da [5]-[8].

Un complemento che mi pare interessante, anche se non adatto a livello liceale, è il seguente. Partiamo dalla (9), facendo le sostituzioni

$$v = \operatorname{tgh}\vartheta \qquad v' = \operatorname{tgh}\vartheta' \qquad u = \operatorname{tgh}\vartheta_u$$

(il parametro ϑ è comunemente chiamato "rapidità"). Otteniamo successivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{tgh}\vartheta'}{1-\operatorname{tgh}\vartheta'} &= \frac{1-\operatorname{tgh}\vartheta_u}{1+\operatorname{tgh}\vartheta_u}\,\frac{1+\operatorname{tgh}\vartheta}{1-\operatorname{tgh}\vartheta}\\
\frac{\cosh\vartheta'+\sinh\vartheta'}{\cosh\vartheta'-\sinh\vartheta'} &= \frac{\cosh\vartheta_u-\sinh\vartheta_u}{\cosh\vartheta_u+\sinh\vartheta_u}\,\frac{\cosh\vartheta+\sinh\vartheta}{\cosh\vartheta-\sinh\vartheta}\\
\exp(2\,\vartheta') &= \exp(-2\,\vartheta_u)\,\exp(2\,\vartheta)\\
\vartheta &= \vartheta' + \vartheta_u. \qquad (12)
\end{aligned}$$

La (12) mostra che la rapidità *si compone additivamente*, come la velocità galileiana e a differenza della velocità relativistica. Questa composizione additiva diventa particolarmente espressiva se, come accennato nella nota[(1)], interpretiamo il corpo C come un terzo rif. K″: per composizione di trasf. di Lorentz la rapidità è additiva.

Bibliografia

[1] `http://www.istruzionepiemonte.it/wp-content/uploads/2014/07/percorso-curriculare-fisica0001.zip`

[2] E. Fabri: "La relatività: come insegnarla?"; seminario al Congresso AIF, Chianciano 24–10–1991.

[3] E. Fabri: "Insegnare relatività nel XXI secolo"; *La Fisica nella Scuola*, Quaderno 16 (2005).

[4] E.F. Taylor, J.A. Wheeler: *Fisica dello spazio-tempo* (Zanichelli, 1996).

[5] E. Fabri: "Sul volo interstellare relativistico"; lettera al *Giornale di Fisica*, **19** (1978), 75.

[6] E. Fabri: "Dialogo sul tempo relativistico (e sui buchi neri): seconda giornata"; *La Fisica nella Scuola*, **17** (1984), 133.

[7] E. Fabri: "Geometria dello spazio-tempo e paradossi relativistici"; *La Fisica nella Scuola*, **26** (1993), 6.

[8] E. Fabri: "Equivoci accelerati" (titolo mio); lettera a *La Fisica nella Scuola*, **36** (2003), 48.