M1. Il problema dei due corpi

Il problema ridotto

Il punto di partenza della meccanica celeste è il *problema kepleriano dei due corpi*. Siano M e m le due masse che assumiamo puntiforni o a simmetria sferica; chiamiamo $\vec{r}$ il vettore indicato in fig. M1–1, O il centro di massa: questo definisce i vettori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ tali che $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Le forze che si esercitano sui due corpi, di massa m ed M rispettivamente, (legge di gravitazione) sono:

$$\vec{F}_m = -GMm\,\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{F}_M = GMm\,\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

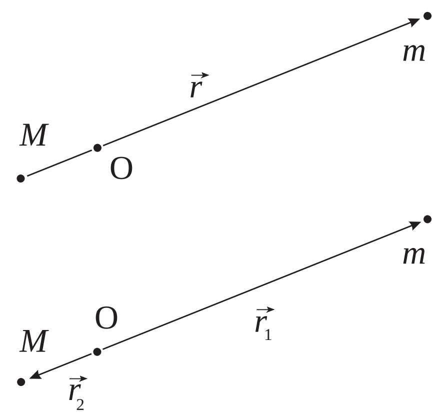

Fig. M1-1

Nel seguito porremo $\gamma = GMm$ (G è la costante di gravitazione universale).

Mettendoci nel riferimento del centro di massa avremo:

$$m\,\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_m = -\gamma\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$M\,\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_M = \gamma\,\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Dividendo per le masse e sottraendo si ha:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

Si perviene così all'equazione fondamentale

$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = -\gamma\,\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{M1.1}$$

che scriveremo anche nella forma

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2\,\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{M1.2}$$

avendo posto

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \qquad (\mu = \text{massa ridotta})$$

$$k^2 = \frac{\gamma}{\mu} \qquad (k = \text{costante di Gauss}).$$

Notare che

$$k^2 = \frac{\gamma}{\mu} = GMm\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) = G\,(M+m).$$

Nella forma (M1.1) il nostro problema è uguale al problema di un solo corpo di massa μ attratto da un centro fisso O, e si chiama *problema ridotto*.

Le costanti del moto

Il nostro obiettivo finale è l'integrazione della (M1.2), cioè la determinazione della legge oraria e della traiettoria del moto; per ora limitiamoci a dedurre qualcosa dalle costanti del moto che si ottengono dalla (M1.1). Poiché la forza è centrale, avremo i due classici integrali primi:

a) Energia:

$$T + V = E = \tfrac{1}{2}\,\mu\,\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 - \frac{\gamma}{r}$$

b) Momento angolare:

$$\vec{J} = \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{M1.3}$$

Si può vedere che questi sono esattamente i valori dell'energia e del momento angolare per il problema dei due corpi riferito al centro di massa.

Dalla (M1.3) segue subito che

1) $\vec{J} \cdot \vec{r} = 0$: $\vec{J}$ è perpendicolare a $\vec{r}$;

2) $\vec{J} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$: $\vec{J}$ è perpendicolare alla velocità.

In questo problema particolare c'è poi un terzo integrale primo:

c) Vettore di Lenz:

$$\vec{L} = \dot{\vec{r}} \times \vec{J} - \gamma\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Deriviamo infatti $\vec{L}$ rispetto al tempo:

$$\dot{\vec{L}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{J} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{J}} - \gamma\,\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \gamma\,\vec{r}\,\frac{d}{dt}\frac{1}{r}$$

dove il secondo termine si annulla perché $\dot{\vec{J}} = 0$. Sviluppando:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \ddot{\vec{r}} \times (\mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \gamma\,\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \gamma\,\vec{r}\,\frac{d}{dt}\frac{1}{r} \\
&= \mu\,(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\,\vec{r} - \mu\,(\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r})\,\dot{\vec{r}} - \gamma\,\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \gamma\,\vec{r}\,\frac{d}{dt}\frac{1}{r} \\
&= \left(\mu\,\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - \gamma\,\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\mu\,\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \frac{\gamma}{r}\right)\dot{\vec{r}} \\
&= \dot{E}\,\vec{r} - \left[\left(\mu\,\ddot{\vec{r}} + \gamma\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \cdot \vec{r}\right]\dot{\vec{r}} = 0.
\end{aligned}$$

Infatti $\dot{E} = 0$, mentre l'espressione in parentesi tonde è nulla per la (M1.1).

Studiamo le proprietà del vettore di Lenz.
Si ha:

$$\vec{J} \cdot \vec{L} = \vec{J} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{J} - \frac{\gamma}{r}\, \vec{r} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{J} \cdot \vec{L} = 0 \qquad \text{(M1.4)}$$

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = \dot{\vec{r}} \times \vec{J} \cdot \vec{r} - \gamma\, \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{J} - \gamma\, r = \frac{1}{\mu}\, J^2 - \gamma\, r$$

$$\vec{L} \cdot \vec{r} + \gamma\, r = \frac{1}{\mu}\, J^2. \qquad \text{(M1.5)}$$

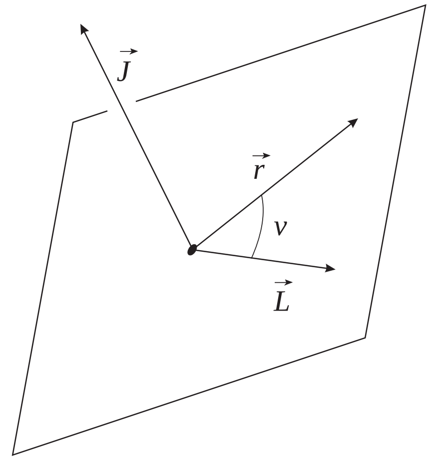

Fig. M1-2

Si vede in modo analogo che

$$L^2 = \gamma^2 + \frac{2}{\mu}\, E J^2. \qquad \text{(M1.6)}$$

Possiamo dunque dire che:

1) esiste un vettore $\vec{J}$, costante del moto, sempre ortogonale a $\vec{r}$: cioè $\vec{r}$ ruota in un piano perpendicolare a $\vec{J}$ (*moto piano*);
2) allora per la (M1.4) $\vec{L}$ è sul piano dell'orbita (fig. M1–2).

La forma dell'orbita

Definiamo *anomalia vera* v l'angolo tra $\vec{L}$ e $\vec{r}$; dalla (M1.5) avremo:

$$L\, r \cos v + \gamma\, r = \frac{1}{\mu}\, J^2$$

$$r = \frac{J^2/\mu}{\gamma + L \cos v}.$$

Ponendo

$$p = \frac{J^2}{\gamma\mu} \qquad e = \frac{L}{\gamma} \qquad \text{(M1.7)}$$

abbiamo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \qquad \text{(M1.8)}$$

che è l'equazione di una conica: iperbole per $e > 1$, parabola per $e = 1$, ellisse per $e < 1$. Si vede inoltre che questa conica ha l'asse lungo $\vec{L}$: infatti per $v = 0$, essendo sempre $e > 0$, r è minimo (mentre è massimo per $v = \pi$). Questo è dunque il significato fisico della direzione di $\vec{L}$ che è quella del *pericentro*; il suo modulo non ci dà altre informazioni, dato che non è indipendente da E e da $|\vec{J}|$. Notiamo ancora che p dipende solo da $|\vec{J}|$, mentre e dipende solo da $|\vec{L}|$.

Vediamo ora la relazione tra la forma dell'orbita e l'energia. Dalla seconda delle (M1.7) e dalla (M1.6) abbiamo che

$$e \gtreqless 1 \iff L \gtreqless \gamma \iff E \gtreqless 0.$$

Dato che l'energia potenziale è negativa e si annulla all'infinito, se $E = T+V > 0$ ($e > 1$, traiettoria iperbolica) il corpo può arrivare all'infinito con una certa energia cinetica e una certa velocità. Per $E = 0$ ($e = 1$, parabola) il corpo può andare all'infinito, ma con velocità tendente a zero. Per $E < 0$ ($e < 1$, ellisse) il corpo non può andare all'infinito, dove si avrebbe $T < 0$.

Studiamo più in dettaglio l'ultimo caso, quello di orbita ellittica. In primo luogo si pone:

$$q = r_{\min} = \frac{p}{1+e}, \quad Q = r_{\max} = \frac{p}{1-e}, \quad (\text{per } v = 0,\ v = \pi \text{ risp.})$$

Calcoliamo il semiasse maggiore:

$$a = \tfrac{1}{2}\left(r_{\max} + r_{\min}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{J^2/\gamma\mu}{1-L^2/\gamma^2} = \frac{\gamma J^2/\mu}{\gamma^2 - L^2} = \frac{\gamma J^2/\mu}{-2EJ^2/\mu} = -\frac{\gamma}{2E}$$

(notare che nel nostro caso $E < 0$). La relazione trovata

$$a = \frac{\gamma}{2|E|}$$

realizza una connessione tra gli aspetti geometrici e dinamici del moto.

Per avere il semiasse minore basta ricordare che $b/a = \sqrt{1-e^2}$ e si trova facilmente

$$b = \frac{J}{\sqrt{2\mu|E|}}\,.$$

Si vede che mentre il semiasse maggiore è inversamente proporzionale all'energia, il semiasse minore dipende da E, ma a parità di E è proporzionale al momento angolare: fissata l'energia, al crescere di J cresce b, cioè l'ellisse tende a un cerchio. Ne segue che per una certa energia E, J non può superare quel valore per il quale $a = b$ (orbita circolare):

$$J_{\max} = \gamma\sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}\,.$$

Possiamo infine calcolare il periodo del moto, ricordando che il momento angolare è proporzionale alla velocità areale $\mathcal{A}$: precisamente è $J = 2\mu\mathcal{A}$. L'area dell'ellisse è πab, e avremo perciò $JT = 2\mu\pi ab$ da cui si ricava T. È interessante mettere tale espressione nella forma seguente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k^2}} \tag{M1.9}$$

in cui interviene la costante gaussiana k. Se si assume $M \gg m$ (k quindi non dipende da m) se ne ricava la relazione $T \propto a^{3/2}$ (*terza legge di Keplero*). Poiché a dipende solo da E, vediamo che anche il periodo dipende solo dall'energia.

Introducendo il moto medio n definito da

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

si ha $n = \sqrt{k^2/a^3}$ da cui si ricava un'altra forma della (M1.9):

$$n^2 a^3 = k^2$$

che prende il nome di *relazione di Keplero.*

Si osservi che l'approssimazione fatta sulle masse è decisamente grossolana, almeno per i pianeti maggiori del sistema solare. Il rapporto M/m vale circa 1000 per Giove e circa 3500 per Saturno, cosicché il valore di k^2 può essere assunto uguale per tutti i pianeti solo entro 10^{-3} mentre sia le osservazioni che i calcoli danno molte più cifre significative.

La legge del moto

Nella fig. M1–3 il punto B si trova sul cerchio circoscritto all'ellisse sulla perpendicolare per A all'asse maggiore. Allora si ha

$$r\cos v = a\cos u - ae$$

dove si è introdotto l'angolo $u = \mathrm{B\hat{C}P}$, detto *anomalia eccentrica.* Usando la (M1.8) è facile verificare che

$$r = a\,(1 - e\cos u). \tag{M1.10}$$

Inoltre, uguagliando la (M1.10) alla (M1.8) si ha:

$$a\,(1 - e\cos u) = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

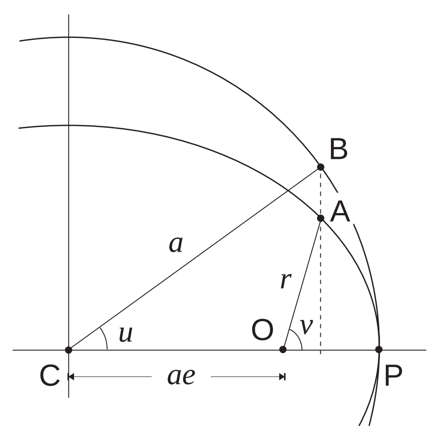

Fig. M1-3

e usando l'identità

$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha/2)}$$

si arriva a questo risultato:

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = f\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} \tag{M1.11}$$

con

$$f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,. \tag{M1.12}$$

In alcuni casi è anche utile la seguente relazione

$$\cos^2\frac{v}{2} = \frac{a}{r}\,(1-e)\cos^2\frac{u}{2} \tag{M1.13}$$

che si ottiene esprimendo $\cos^2(v/2)$ mediante la (M1.11) e usando la (M1.10). Differenziando la (M1.11) si trova

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{dv}{\cos^2(v/2)} = \tfrac{1}{2} f\,\frac{du}{\cos^2(u/2)}.$$

Moltiplicando termine a termine per la (M1.13) e ricordando la forma (M1.12) di f si ha:

$$dv = \frac{a}{r}\,\sqrt{1-e^2}\,du = \frac{b}{r}\,du$$

cioè

$$\dot{v} = \frac{b}{r}\,\dot{u}\,.$$

Moltiplicando per $\frac{1}{2}\,r^2$:

$$\tfrac{1}{2}\,r^2\,\dot{v} = \tfrac{1}{2}\,b\,r\dot{u} = \tfrac{1}{2}\,ab\,(1 - e\cos u)\,\dot{u} = \tfrac{1}{2}\,ab\,\frac{d}{dt}(u - e\sin u).$$

Poiché $\frac{1}{2}\,r^2\,\dot{v}$ è la velocità areale $\mathcal{A} = \pi ab/T = \frac{1}{2}\,nab$, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}(u - e\sin u) = n.$$

Conviene perciò definire l'angolo φ (*anomalia media*) mediante l'*equazione di Keplero*

$$\varphi = u - e\sin u \tag{M1.14}$$

e si ottiene così

$$\dot{\varphi} = n$$

che s'integra in

$$\varphi(t) = \varphi_0 + nt = n\,(t - t_0) \tag{M1.15}$$

dove φ_0 è il valore di φ all'istante $t = 0$ e t_0 è l'istante per cui $\varphi = v = 0$, cioè quando il corpo passa al *pericentro* dell'orbita.

Si è trovata così un'ultima costante arbitraria (φ_0 oppure t_0) e si vede che le costanti del moto indipendenti sono 6: E, J_x, J_y, J_z, $\vec{L}$, t_0. (Per $\vec{L}$ s'intende solo la direzione nel piano dell'orbita, in quanto il modulo dipende da E e da $|\vec{J}|$.) Questo è quanto ci si doveva aspettare, per un problema con tre gradi di libertà. Trattandosi poi di un problema conservativo (autonomo) è chiaro che delle 6 costanti 5 riguardano la geometria del moto, e solo una dà un'informazione temporale.

Il problema del moto dunque è risolto: la (M1.15), noti n e t_0, fornisce $\varphi(t)$ e da qui si trova $u(t)$ invertendo la (M1.14). Con la (M1.10) si ottiene poi $r(t)$, e con la (M1.11)) si ha $v(t)$.

Si noti che la (M1.14) non è invertibile in termini di funzioni elementari: si può però provare che nel nostro caso ($e < 1$) la funzione inversa è ben definita, e si tratta perciò solo di trovare un adeguato procedimento di calcolo.

A proposito degli angoli v, u, φ, notiamo che essi coincidono se $e = 0$; altrimenti, definendoli compresi fra $-\pi$ e π, si ha sempre $|\varphi| < |u| < |v|$.

Approssimazione per piccola eccentricità

È utile vedere come si semplificano alcune delle formule se l'eccentricità è piccola. Al primo ordine in e avremo $f \simeq 1 + e$, e dalla (M1.11)

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{u}{2} = e\,\operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

D'altra parte

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{v-u}{2}\right) \simeq \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \frac{(v-u)/2}{\cos^2(u/2)}$$

e confrontando risulta

$$v - u \simeq e\sin u \simeq e\sin\varphi. \tag{M1.16}$$

La (M1.14) si approssima con

$$u \simeq \varphi + e\sin\varphi \tag{M1.17}$$

e infine

$$v \simeq \varphi + 2e\,\sin\varphi.$$

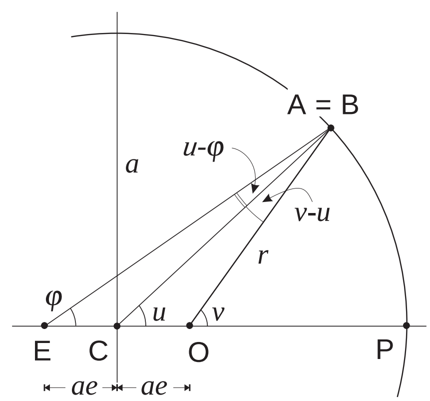

Fig. M1-4

Nella fig. M1–3 i punti A e B in questa approssimazione coincidono (l'ellisse si confonde col cerchio); perciò riferendosi alla fig. M1–4 si ottiene l'interpretazione geometrica (approssimata) di φ che giustifica l'equante di Tolomeo. Infatti preso E tale che $\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{CO}}$, gli angoli E$\hat{\mathrm{A}}$C e C$\hat{\mathrm{A}}$O sono uguali a meno di e^2; il secondo vale $v-u$ per costruzione, ma vale anche $u-\varphi$ per le (M1.16), (M1.17). Allora il triangolo AEC mostra che l'angolo in E, nella solita approssimazione, è proprio φ.

Gli elementi dell'orbita

Vediamo adesso quali sono i parametri usuali per la determinazione dell'orbita di un pianeta. Il piano dell'orbita è individuato dalla sua inclinazione i sul piano dell'eclittica e dalla posizione del ☊, cioè dalla sua longitudine eclittica, che indicheremo con ψ. La posizione del pericentro è data dall'angolo χ (fig. M1–5), oppure dall'angolo $\bar{\chi} = \psi + \chi$ detto impropriamente "longitudine" del pericentro. Per fissare poi la forma dell'orbita occorre dare il semiasse maggiore a e l'eccentricità e. Spesso per orbite molto eccentriche, come quelle delle comete, invece di a si dà la distanza q al perielio.

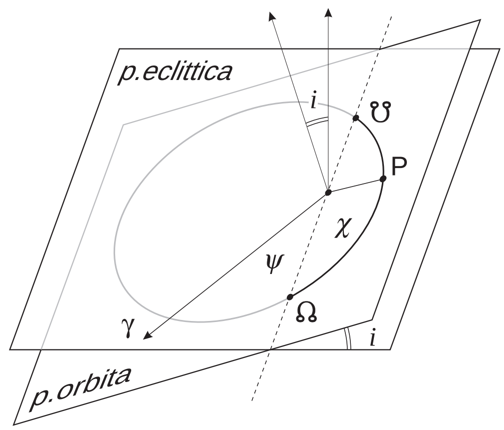

Fig. M1-5

Infine l'ultimo dato sarà t_0 oppure φ_0, anomalia media all'origine dei tempi (questo è il più usato; l'origine dei tempi viene chiamata "epoca"). Talvolta, in luogo di φ_0, si trova usato $\bar{\lambda}_0 = \bar{\chi} + \varphi_0$, chiamato "longitudine media all'epoca."

Riassumendo: l'orbita è caratterizzata da:

$$i,\ \psi,\ \chi,\ (\text{oppure } \bar{\chi}),\ a\ (\text{oppure } q),\ e,\ \varphi_0\ (\text{oppure } \bar{\lambda}_0).$$