M8. Il problema della Luna

Affronteremo ora il cosiddetto *problema della Luna*, cioè lo studio del moto del satellite della Terra dal punto di vista della meccanica celeste. Si tratta di un problema assai complicato se si vuole raggiungere una precisione confrontabile con le osservazioni; ci limiteremo quindi a indicare i passi necessari per comprendere alcuni degli aspetti più visibili: quelli che abbiamo già descritti, dal punto di vista osservativo, nel Cap. G2.

Per i nostri scopi il problema della Luna si può ridurre al problema dei tre corpi Terra–Luna–Sole, che però non è più un problema ristretto, in quanto la massa della Luna non è trascurabile rispetto a quella della Terra:

$$M_\mathrm{S} : M_\mathrm{T} : M_\mathrm{L} = 3 \cdot 10^5 : 1 : \tfrac{1}{81}.$$

Usando l'approssimazione del problema ristretto come guida, si vede che la Luna è costretta a girare intorno alla Terra a una distanza che non supera mai un certo massimo. Per dimostrarlo, si pensi alle superfici di Hill (fig. M6–1) e si calcoli la posizione di L_1 per il caso Terra–Sole: si trova che dista dalla Terra circa $1.5 \cdot 10^6$ km, cioè 4 volte la distanza della Luna.

Le coordinate baricentriche

Nelle nostre considerazioni ci serviranno i punti S, T, L (Sole, Terra, Luna) e anche G (centro di massa del sistema Terra–Luna) e Q (centro di massa del sistema totale) (fig. M8–1). Rispetto a un'origine arbitraria indicheremo con $\vec r_\mathrm{S}$, $\vec r_\mathrm{T}$, $\vec r_\mathrm{L}$, $\vec r_\mathrm{G}$, $\vec r_\mathrm{Q}$ le varie distanze (vettoriali); porremo inoltre $\vec r_\mathrm{SL} = \vec r_\mathrm{L} - \vec r_\mathrm{S}$ e analogamente le altre ($\vec r_\mathrm{ST}$, $\vec r_\mathrm{TL}$ ...).

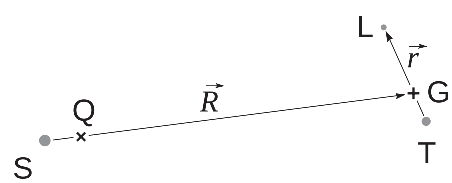

Fig. M8-1

Studieremo le equazioni del moto partendo dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_\mathrm{S}^2}{2M_\mathrm{S}} + \frac{p_\mathrm{T}^2}{2M_\mathrm{T}} + \frac{p_\mathrm{L}^2}{2M_\mathrm{L}} - G\left(\frac{M_\mathrm{S}M_\mathrm{T}}{r_\mathrm{ST}} + \frac{M_\mathrm{S}M_\mathrm{L}}{r_\mathrm{SL}} + \frac{M_\mathrm{T}M_\mathrm{L}}{r_\mathrm{TL}}\right) \tag{M8.1}$$

dalla quale si ricavano subito le equazioni di Hamilton

$$\dot{\vec r}_\mathrm{S} = \frac{\partial H}{\partial \vec p_\mathrm{S}} = \frac{\vec p_\mathrm{S}}{M_\mathrm{S}} \qquad \text{ecc.} \tag{M8.2}$$

$$\dot{\vec p}_\mathrm{S} = -\frac{\partial H}{\partial \vec r_\mathrm{S}} = \frac{GM_\mathrm{S}M_\mathrm{T}}{r_\mathrm{ST}^3}\,\vec r_\mathrm{ST} + \frac{GM_\mathrm{S}M_\mathrm{L}}{r_\mathrm{SL}^3}\,\vec r_\mathrm{SL} \qquad \text{ecc.} \tag{M8.3}$$

Derivando le (M8.2) rispetto al tempo e sostituendo nelle (M8.3) si ritorna alle equazioni di Newton

$$M_\mathrm{S}\ddot{\vec r}_\mathrm{S} = \frac{GM_\mathrm{S}M_\mathrm{T}}{r_\mathrm{ST}^3}\,\vec r_\mathrm{ST} + \frac{GM_\mathrm{S}M_\mathrm{L}}{r_\mathrm{SL}^3}\,\vec r_\mathrm{SL} \qquad \text{ecc.}$$

Invece qui trasformeremo opportunamente l'hamiltoniana con un cambiamento di variabili. Poniamo

$$\vec{r}_{\mathrm{TL}} = \vec{r} \qquad \vec{r}_{\mathrm{SG}} = \vec{R}.$$

Possiamo esprimere $\vec{r}_{\mathrm{S}}$, $\vec{r}_{\mathrm{T}}$, $\vec{r}_{\mathrm{L}}$ in termini di $\vec{r}$, $\vec{R}$, $\vec{r}_{\mathrm{Q}}$ come segue:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\mathrm{S}} &= -\frac{M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}}}{M}\,\vec{R} + \vec{r}_{\mathrm{Q}} \\ \vec{r}_{\mathrm{T}} &= \quad \frac{M_{\mathrm{S}}}{M}\,\vec{R} - \frac{M_{\mathrm{L}}}{M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}}}\,\vec{r} + \vec{r}_{\mathrm{Q}} \\ \vec{r}_{\mathrm{L}} &= \quad \frac{M_{\mathrm{S}}}{M}\,\vec{R} + \frac{M_{\mathrm{T}}}{M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}}}\,\vec{r} + \vec{r}_{\mathrm{Q}}. \end{aligned} \tag{M8.4}$$

dove $M = M_{\mathrm{S}} + M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}}$.

Per trovare i momenti coniugati, che chiameremo $\vec{p}$, $\vec{P}$, $\vec{p}_{\mathrm{Q}}$, basta prendere la forma dell'energia cinetica

$$T = \tfrac{1}{2}\Bigl(M_{\mathrm{S}}|\dot{\vec{r}}_{\mathrm{S}}|^2 + M_{\mathrm{T}}|\dot{\vec{r}}_{\mathrm{T}}|^2 + M_{\mathrm{L}}|\dot{\vec{r}}_{\mathrm{L}}|^2\Bigr),$$

sostituire alle $\dot{\vec{r}}$ le espressioni ricavate dalle (M8.4) e derivare, in quanto $p = \partial T/\partial \dot{q}$ (V non dipende dalle q!). Il risultato della sostituzione è semplice:

$$T = \tfrac{1}{2}\Bigl(M\,|\dot{\vec{r}}_{\mathrm{Q}}|^2 + \mathcal{M}\,|\dot{\vec{R}}|^2 + \mu\,|\dot{\vec{r}}|^2\Bigr) \tag{M8.5}$$

dove

$$\mu = \frac{M_{\mathrm{T}} M_{\mathrm{L}}}{M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}}}$$

è la massa ridotta del sistema Terra–Luna e

$$\mathcal{M} = \frac{M_{\mathrm{S}}(M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}})}{M}$$

è la massa ridotta del sistema: Sole–(sistema Terra–Luna, pensato come concentrato in G).

La (M8.5) si poteva ottenere direttamente applicando due volte il teorema di König: l'energia cinetica totale si ottiene come energia del centro di massa in cui sia concentrata tutta la massa ($\frac{1}{2}M|\dot{\vec{r}}_{\mathrm{Q}}|^2$) più quella del moto rispetto al centro di massa. Nel caso nostro questa seconda è l'energia del sistema Sole–(Terra–Luna), data da $\frac{1}{2}\mathcal{M}|\dot{\vec{R}}|^2$, più l'energia del sistema Terra–Luna rispetto al suo centro di massa G, che è $\frac{1}{2}\mu\,|\dot{\vec{r}}|^2$.

Dalla (M8.5) si trovano i momenti coniugati alle variabili $\vec{r}_\mathrm{Q}$, $\vec{R}$, $\vec{r}$:

$$\vec{p}_\mathrm{Q} = M\,\dot{\vec{r}}_\mathrm{Q} \qquad \vec{P} = \mathcal{M}\dot{\vec{R}} \qquad \vec{p} = \mu\,\dot{\vec{r}}.$$

In questi termini l'energia cinetica si può scrivere

$$T = \frac{p_\mathrm{Q}^2}{2M} + \frac{P^2}{2\mathcal{M}} + \frac{p^2}{2\mu}.$$

L'approssimazione di quadrupolo

Fin qui il nostro calcolo è esatto, nella sola ipotesi di poter trascurare la presenza di altri corpi. In tale ipotesi il sistema è isolato, dunque il riferimento del centro di massa è inerziale. Conviene allora prendere Q come origine del sistema di coordinate, per cui si ha $\vec{r}_\mathrm{Q} = 0$, $\vec{p}_\mathrm{Q} = 0$, semplificando così il problema. Che questo sia lecito, si vede dal fatto che l'hamiltoniana non contiene $\vec{r}_\mathrm{Q}$, in quanto nell'energia potenziale vi sono solo differenze del tipo $\vec{r}_\mathrm{ST} = \vec{r}_\mathrm{T} - \vec{r}_\mathrm{S}$, dove $\vec{r}_\mathrm{Q}$ non compare. Ciò implica che $\dot{\vec{p}}_\mathrm{Q} = \partial H/\partial\vec{r}_\mathrm{Q} = 0$, cioè che $\vec{p}_\mathrm{Q} = \mathrm{cost.}$, che in particolare possiamo porre uguale a zero scegliendo opportunamente il riferimento.

Per procedere oltre occorre fare delle approssimazioni. La geometria del nostro sistema ci dice che $r_\mathrm{ST} \gg r_\mathrm{LT}$; inoltre

$$\vec{r}_\mathrm{ST} = \vec{r}_\mathrm{T} - \vec{r}_\mathrm{S} = \frac{M_\mathrm{S}}{M}\,\vec{R} - \frac{M_\mathrm{L}}{M_\mathrm{T} + M_\mathrm{L}}\,\vec{r} + \frac{M_\mathrm{T} + M_\mathrm{L}}{M}\,\vec{R} = \vec{R} - \beta\,\vec{r}$$

avendo posto $\beta = M_\mathrm{L}/(M_\mathrm{T} + M_\mathrm{L})$. Dal momento che $r/R \simeq 0.4/150 \simeq 2.7\cdot 10^{-3}$ e inoltre $\beta = 1/82$, possiamo sviluppare in serie il primo termine dell'energia gravitazionale:

$$\frac{1}{r_\mathrm{ST}} = \frac{1}{|\vec{R} - \beta\,\vec{r}|} = \frac{1}{R} + \beta\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} + \tfrac{1}{2}\,\beta^2\,\frac{3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2 r^2}{R^5} + \cdots$$

In modo analogo si trova

$$\vec{r}_\mathrm{SL} = \vec{R} + (1-\beta)\,\vec{r} \qquad \left(1 - \beta = \frac{M_\mathrm{T}}{M_\mathrm{T} + M_\mathrm{L}}\right)$$

$$\frac{1}{r_\mathrm{SL}} = \frac{1}{|\vec{R} + (1-\beta)\,\vec{r}|} = \frac{1}{R} - (1-\beta)\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} + \tfrac{1}{2}(1-\beta)^2\,\frac{3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2 r^2}{R^5} + \cdots$$

Potremo allora scrivere per l'energia potenziale:

$$V = -G\left[\frac{M_{\rm T}M_{\rm L}}{r} + M_{\rm S}M_{\rm T}\left(\frac{1}{R} + \beta\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} + \tfrac{1}{2}\beta^2\,\frac{3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2r^2}{R^5} + \cdots\right) + \right.$$
$$\left. M_{\rm S}M_{\rm L}\left(\frac{1}{R} - (1-\beta)\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} + \tfrac{1}{2}(1-\beta)^2\,\frac{3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2r^2}{R^5} + \cdots\right)\right]$$

e raccogliendo i termini con $\vec{R}\cdot\vec{r}$ si trova

$$M_{\rm S}M_{\rm T}\,\beta\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} - M_{\rm S}M_{\rm L}\,(1-\beta)\,\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} = 0$$

per la definizione di β. Dunque con la nostra scelta dell'origine ancora una volta il termine di dipolo scompare e rimane solo quello di quadrupolo; scriveremo infine

$$V = -G\left(\frac{M_{\rm T}M_{\rm L}}{r} + \frac{M_{\rm S}(M_{\rm T}+M_{\rm L})}{R} + \tfrac{1}{2}M_{\rm S}\,\mu\,\frac{3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2r^2}{R^5} + \cdots\right)$$

per cui l'hamiltoniana risulterà:

$$H = \left[\frac{P^2}{2\mathcal{M}} - \frac{GM_{\rm S}(M_{\rm T}+M_{\rm L})}{R}\right] + \left[\frac{p^2}{2\mu} - \frac{GM_{\rm T}M_{\rm L}}{r}\right] -$$
$$\tfrac{1}{2}GM_{\rm S}\,\mu\,\frac{3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2r^2}{R^5} + \cdots \qquad \text{(M8.6)}$$

Discussione

Notiamo che la prima parte in [...] nella (M8.6) ci dà l'hamiltoniana del sistema formato dal Sole e dal sistema Terra–Luna concentrato in G, mentre la seconda parte ci dà l'hamiltoniana del sistema Terra–Luna: fino a questo punto i due sistemi non interagiscono. Se non vi fosse altro si avrebbe così la pura sovrapposizione di due moti perfettamente kepleriani, ciascuno soluzione di un problema dei due corpi: uno per il moto di G attorno al Sole, l'altro per il moto relativo Terra–Luna.

Non è così per la presenza di altri termini: già quello di quadrupolo, il solo che si è considerato, contiene le variabili di entrambi i sistemi suddetti. Questo termine è perciò responsabile dell'interazione tra i due moti e può essere considerato in due modi diversi secondo il punto di vista:

1) perturbazione del Sole sul moto Terra–Luna
2) perturbazione del moto di G attorno al Sole, dovuta al fatto che G non è un effettivo punto materiale, ma è invece il centro di massa di due punti separati.

Spieghiamo meglio questo secondo aspetto. Poiché il campo gravitazionale solare non è uniforme, la risultante delle forze cui sono soggette la Terra e la Luna non coincide con la forza $\vec{F}_{\rm G}$ cui sarebbe soggetto G se fosse un punto materiale di massa $M_{\rm T}+M_{\rm L}$ (fig. M8–2). Tale risultante varia inoltre a seconda della posizione dei due corpi.

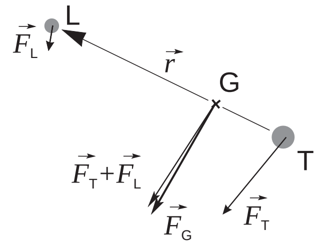

Fig. M8-2

Prima di procedere, occorre provare che il nostro trattamento perturbativo è giustificato:

1) i termini oltre il quadrupolo sono effettivamente trascurabili?

2) il termine di quadrupolo è abbastanza piccolo da ritenersi perturbativo?

Riscriviamo la forma trovata per l'hamiltoniana:

$$H = H_1 + H_2 + H_3$$

(con ovvio significato dei simboli). Vogliamo anzitutto vedere quanto l'ultimo termine perturba il moto di G: possiamo stimare questo effetto calcolando il rapporto dell'ultimo termine rispetto alla parte V_1 di energia potenziale del primo termine:

$$\frac{H_3}{V_1} = \frac{GM_{\rm S}\mu}{R^5}\,R^2 r^2\,\frac{R}{GM_{\rm S}(M_{\rm T}+M_{\rm L})} = \frac{\mu}{M_{\rm T}+M_{\rm L}}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \simeq \frac{1}{80}\left(\frac{1}{400}\right)^2 = 8\cdot 10^{-8}.$$

Si tratta dunque di un effetto osservabile, ma trascurabile in prima approssimazione: il calcolo completo dà uno spostamento del perielio (nel moto di G) di circa $7''$ per secolo.

Vediamo invece in che misura è perturbato il moto della Luna attorno alla Terra:

$$\frac{H_3}{V_2} = \frac{GM_{\rm S}\mu}{R^5}\,R^2 r^2\,\frac{r}{GM_{\rm T}M_{\rm L}} = \frac{M_{\rm S}\,\mu}{M_{\rm T}M_{\rm L}}\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{M_{\rm S}}{M_{\rm T}+M_{\rm L}}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \simeq 3\cdot 10^5\left(\frac{1}{400}\right)^3 = 5\cdot 10^{-3}.$$

L'effetto è abbastanza grande e certo non trascurabile.

Quanto ai termini successivi al quadrupolo, ricordiamo che prevengono da uno sviluppo in serie di r/R: dobbiamo perciò aspettarci che il successivo sia ~ 400 volte minore, e così via. Non possono dunque essere trascurati in un calcolo di precisione, ma la perturbazione principale è comunque dovuta al quadrupolo. Noi ci occuperemo solo di questo.

Concludendo, possiamo dunque supporre che G si muova di moto circolare uniforme e pensare l'hamiltoniana come funzione soltanto di $\vec{r}$, $\vec{p}$. Invece $\vec{R}$ compare nell'hamiltoniana come un vettore noto $\vec{R}(t)$, non costante in direzione: abbiamo dunque una perturbazione che dipende dal tempo. (L'eccentricità nel moto reale di G è minore di 0.0017, per cui non è ingiustificata, per i nostri scopi, la semplificazione del moto circolare uniforme).

Il problema è dunque ridotto a quello dei due corpi, con in più una perturbazione dipendente dal tempo: anche questo problema è risolubile solo facendo altre approssimazioni.

Le perturbazioni secolari

In primo luogo ci occuperemo solo di perturbazioni secolari, per le quali conta solo il valor medio nel tempo (o nell'anomalia media, ad esso proporzionale) del termine perturbativo

$$H' = H_3 = -\frac{GM_S\mu}{2R^5}\left[3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2r^2\right].$$

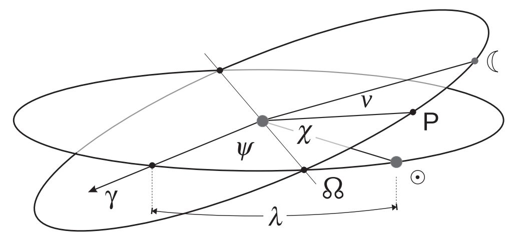

Fig. M8-3

Scrivendo $S = 3\,(\vec{R}\cdot\vec{r})^2 - R^2r^2$ in termini delle variabili solite (elementi dell'orbita, fig. M8–3) si ha:

$$\begin{aligned}S = {} & \tfrac{3}{4}R^2r^2\left[\left(\cos^2 i - \tfrac{1}{3}\right) + \sin^2 i\cos 2(\lambda-\psi)\right] + \\ & \tfrac{3}{4}R^2r^2\cos 2(\chi+v)\left[\sin^2 i + (1+\cos^2 i)\cos 2(\lambda-\psi)\right] + \\ & \tfrac{3}{2}R^2r^2\sin 2(\chi+v)\,\sin 2(\lambda-\psi)\cos i\end{aligned}$$

(λ longitudine del Sole). Usando la relazione $r\,du = a\,d\varphi$ e mediando su φ otteniamo:

$$\begin{aligned}\langle S\rangle_\varphi = {} & \tfrac{3}{4}R^2a^2\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\right)\left[\left(\cos^2 i - \tfrac{1}{3}\right) + \sin^2 i\,\cos 2(\lambda-\psi)\right] + \\ & \tfrac{15}{8}R^2a^2e^2\cos 2\chi\,\left[\sin^2 i + \left(1+\cos^2 i\right)\cos 2(\lambda-\psi)\right] + \\ & \tfrac{15}{4}R^2a^2e^2\sin 2\chi\,\sin 2(\lambda-\psi)\cos i.\end{aligned}$$

Quest'espressione è ancora dipendente dal tempo tramite λ. Se supponiamo che gli effetti secolari sull'orbita (retrogradazione dei nodi, rotazione del perigeo) abbiano un periodo molto maggiore di un anno, possiamo mediare S anche sul periodo di λ. Si ottiene:

$$\langle S\rangle_{\varphi,\lambda} = \tfrac{1}{4}R^2a^2\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\right)\left(3\cos^2 i - 1\right) + \tfrac{15}{8}R^2a^2e^2\cos 2\chi\,\sin^2 i. \qquad \text{(M8.7)}$$

Nella (M8.7) compare J_φ tramite a, J_χ tramite e, J_ψ tramite i; compare inoltre solo χ, ma non φ né ψ. Ne segue $\dot{J}_\varphi = \dot{J}_\psi = 0$, da cui $J_\varphi = \text{cost.}$, $J_\psi = \text{cost.}$

Invece J_χ sarà funzione periodica di χ, con periodo metà del periodo del perigeo; questo perchè χ figura solo in $\cos 2\chi$. Ricordiamo che questo periodo è stato supposto lungo.

J_χ dovrà sempre soddisfare la relazione $J_\psi \le J_\chi \le J_\varphi$; ma l'orbita della Luna è poco ellittica, per cui

$$\frac{J_\chi}{J_\varphi} = \sqrt{1-e^2} \simeq 1 \qquad \Rightarrow \qquad J_\chi \simeq J_\varphi .$$

Inoltre essa è poco inclinata sull'eclittica (i è piccolo) per cui

$$\frac{J_\psi}{J_\chi} = \cos i \simeq 1 \qquad \Rightarrow \qquad J_\psi \simeq J_\chi .$$

Dunque se pure J_χ non è costante, varia di poco tra i due valori di J_φ e J_ψ, e possiamo ritenerlo anch'esso costante, trascurando quindi il secondo termine nella (M8.7).

Quest'ulteriore semplificazione porta a scrivere l'hamiltoniana come segue:

$$H' = -\tfrac{1}{8}\,\frac{GM_{\rm S}\mu}{R^3}\,a^2\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\right)\left(3\cos^2 i - 1\right)$$

e introducendo le variabili canoniche

$$H' = -\tfrac{1}{16}\,A\,\frac{J_\varphi^2}{J_\chi^2}\left(5J_\varphi^2 - 3J_\chi^2\right)\left(3J_\psi^2 - J_\chi^2\right)$$

avendo posto

$$A = \frac{1}{n_1^2\,\mu^3 R^6}\left(\frac{M_{\rm S}}{M_{\rm T}+M_{\rm L}}\right)^2 \qquad n_1^2 = \frac{GM_{\rm S}}{R^3}$$

(si noti che n_1 è approssimativamente il moto medio del Sole).

Tenendo conto anche dell'hamiltoniana imperturbata si avranno le equazioni del moto

$$\begin{aligned}
\dot\varphi &= n_0 - \tfrac{1}{8}\,A\,\frac{J_\varphi}{J_\chi^2}\left(3J_\psi^2 - J_\chi^2\right)\left(10J_\varphi^2 - 3J_\chi^2\right)\\
\dot\chi &= \tfrac{3}{8}\,A\,\frac{J_\varphi^2}{J_\chi^3}\left(5J_\varphi^2 J_\psi^2 - J_\chi^4\right)\\
\dot\psi &= -\tfrac{3}{8}\,A\,\frac{J_\varphi^2 J_\psi}{J_\chi^2}\left(5J_\varphi^2 - 3J_\chi^2\right)
\end{aligned}$$

dalle quali con l'ulteriore approssimazione $J_\varphi \simeq J_\chi \simeq J_\psi$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\dot\varphi &= n_0 - \tfrac{7}{4}A\,J_\varphi^3\\
\dot\chi &= \tfrac{3}{2}A\,J_\varphi^3\\
\dot\psi &= -\tfrac{3}{4}A\,J_\varphi^3 .
\end{aligned} \tag{M8.8}$$

Passiamo ora ai numeri. Conviene definire il parametro $m = n_1/n_0$, rapporto tra il moto medio del Sole e quello della Luna; il suo valore è

$$m = 0.0748 \qquad 1/m \simeq 13$$

cioè la Luna fa circa 13 giri mentre il Sole ne fa uno. Dalla relazione di Keplero $n_0^2\, a^3 = G\,(M_\mathrm{T} + M_\mathrm{L})$ si ottiene subito

$$m = \left(\frac{M_\mathrm{S}}{M_\mathrm{T} + M_\mathrm{L}}\,\frac{a^3}{R^3}\right)^{1/2}$$

e inoltre

$$A\,J_\varphi^3 = n_1 m. \tag{M8.9}$$

Dalle (M8.8) e dalla (M8.9) risulta così che i moti di χ e ψ hanno un periodo dell'ordine di 13 anni. Facendo il calcolo otteniamo (in gradi per anno):

	osservati	calcolati	
$\dot\chi$		$+40.6$	
$\dot\psi$	-19.3	-20.3	(buono al 5%)
$\dot\chi + \dot\psi$	$+40.6$	$+20.3$	(errato per un fattore 2).

Dunque la teoria spiega abbastanza bene la retrogradazione dei nodi, ma sbaglia di un fattore 2 il moto del perigeo.

La causa principale dell'errore sta nell'aver fatto la media su λ, considerando un anno come molto minore del periodo di questi moti (~ 13 anni). Si può fare un calcolo esatto, che fornisce una serie in m (noi ci siamo fermati al primo termine): i risultati si vedono nella tabella che segue.

Moto del nodo		Moto del perigeo	
1° termine	-0.00419	1° termine	0.00420
2° termine	0.00011	2° termine	0.00294
3° termine	0.00006	3° termine	0.00099
	....	4° termine	0.00030
		5° termine	0.00009
somma	0.00857	6° termine	0.00003
			....
		somma	-0.00400

Mentre nel caso dei nodi la somma differisce solo del 5% dal primo termine, nel caso del perigeo considerare solo il primo termine significa sbagliare di un fattore 2 rispetto alla somma completa: questo spiega perfettamente i dati di osservazione.

Va ricordato che il calcolo al prim'ordine si trova già nei *Principia* di Newton (anche se il metodo è diverso da quello qui esposto). Newton però lascia quasi nascosto il fatto che il secondo risultato dev'essere moltiplicato per 2 per avere buon accordo con le osservazioni. Per un certo periodo la difficoltà a spiegare il moto della Luna rischiò di mettere in crisi la teoria di Newton; solo a metà dell'800, dopo che i maggiori astronomi e matematici si erano cimentati nel problema, Delaunay riuscì a calcolare la serie e dimostrare così che l'unica causa del disaccordo con le osservazioni era la sua lenta convergenza.