18. Grandezze fisiche, unità di misura, sistemi di unità

In questo capitolo vogliamo dare alcune indicazioni circa l'impiego delle grandezze fisiche nella pratica quotidiana; senza nessuna pretesa di completezza e di rigore, trattandosi di un campo tutt'altro che ben sistemato.

L'adozione e l'uso delle grandezze fisiche hanno avuto carattere graduale e per lungo tempo sostanzialmente empirico: come abbiamo già visto nei Capp. 2 e 3, solo alla fine del '700 si è cominciata a porre l'esigenza di una precisa definizione dei campioni e di un sistema coerente di unità. Le prime grandezze fisiche di uso corrente sono state quelle geometriche (aggiungiamo il tempo e la massa, che però originavano più da necessità della vita civile e dei commerci, che non da motivazioni scientifiche). Poi sono apparse quelle cinematiche (velocità, accelerazione); infine, solo fra il '700 e l'800, quelle dinamiche (forza, quantità di moto, energia ...), quelle termiche, quelle elettriche, ecc.

Grandezze omogenee e unità di misura

In una prima fase grandezze *omogenee* sono soltanto quelle con la stessa definizione operativa: così sono fra loro omogenee le lunghezze, oppure le masse, ecc.; mentre non esiste alcuna relazione fra grandezze diverse, anche fra quelle che a noi oggi appaiono strettamente connesse, come ad es. lunghezza e area, oppure lunghezza, tempo e velocità. Fra grandezze omogenee sono definite:

– la somma, che dà per risultato una grandezza della stessa specie

– il rapporto, che è un numero reale (puro).

Questa è sostanzialmente la teoria *euclidea* delle grandezze, su cui non vogliamo soffermarci. Va solo ricordato che la possibilità di rapporti non razionali, e quindi della necessità di *completare* l'insieme dei numeri razionali, è stata una delle grandi scoperte della matematica greca (Pitagora).

Nota: A differenza della teoria euclidea, per gli scopi della fisica conviene ammettere come rapporto anche un reale negativo.

In una classe (di equivalenza) di grandezze omogenee se ne sceglie una u come *unità* di misura; si chiama *misura* di un'altra grandezza g (della stessa classe di u) il rapporto $\gamma = g/u$, e si scrive anche $g = \gamma u$. Ne segue che una classe di grandezze omogenee è uno spazio vettoriale (di dimensione 1) sui reali.

Notazione: Segue da quanto detto sopra che l'espressione "$m = 3\,\mathrm{kg}$" va intesa così: "m" è la grandezza, "3" la misura, "kg" è l'unità.

Fino a questo punto fra le diverse classi di omogeneità non c'è alcuna relazione, e lo stesso vale (a maggior ragione) fra le unità. Allora che cosa significano scritture come $F = ma$, $PV = RT$, ecc.? La questione è stata a lungo controversa (e in una certa misura lo è ancora): per alcuni queste sono solo relazioni fra le *misure*: se $m = 3\,\mathrm{kg}$, $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, allora $F = 6$ (newton, perché occorre un insieme “coerente” di unità). Tuttavia è invalso l’uso di scrivere

$$ma = 3\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{m/s^2} = 6\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2} = 6\,\mathrm{N},$$

ossia d’intendere ma come prodotto delle *grandezze*, non delle misure.

Ormai a favore di questo uso esiste anche una convenzione internazionale: quando si scrive F in un’equazione fisica si deve intendere la *grandezza*, non la misura; *le equazioni fisiche sono relazioni fra grandezze.* Il principale vantaggio è che in tal modo non ci si deve preoccupare delle unità: *le relazioni sono indipendenti dal sistema di unità adottato* (con certe cautele che vedremo fra poco).

Le costanti universali

Per capire il problema, chiediamoci: che differenza c’è fra $F = ma$ e $F = Gm_1m_2/r^2$? Nella seconda compare una *costante universale*: la costante di gravitazione G. Ma se adottassimo come unità di massa “quella che posta a distanza unità da un’altra uguale, produce su di essa un’accelerazione unità” la legge di gravitazione si scriverebbe $F = m_1m_2/r^2$, ossia avremmo posto $G = 1$ (del resto questo è proprio quanto si fa nel sistema CGS elettrostatico per la carica elettrica). Se ci sembrasse opportuno, potremmo anche scrivere $F = m_1m_2/4\pi r^2$, e allora sarebbe $G = 1/4\pi$.

Per mettere $G = 1$ abbiamo dovuto “vincolare” l’unità di misura della massa a quelle di lunghezza e di tempo: dunque la presenza o no di costanti universali dipende (in parte) dalla nostra scelta delle unità indipendenti. Quante più unità indipendenti, tante più costanti universali, e viceversa. Al limite, si potrebbe usare un’unità indipendente per ciascuna grandezza fisica, anche per lunghezze e aree: sarebbe estremamente scomodo, ma logicamente possibile.

Tornando all’esempio della legge di gravitazione, la differenza essenziale è che se le unità sono indipendenti, ha senso “misurare” G (per es. con l’esperimento di Cavendish); altrimenti lo stesso esperimento servirà a definire l’unità di massa.

In senso opposto, qual è il numero minimo possibile di unità indipendenti? La risposta è: zero. Se ad es. scegliamo $c = 1$, le unità di lunghezza e di tempo sono legate; se $G = 1$, anche l’unità di massa è legata alle altre; se poi facciamo $\hbar = 1$ (dove $\hbar$ è un’abbreviazione per $h/2\pi$) *non ci sono più unità meccaniche libere.*

Esercizio: Mostrare che in queste condizioni le unità sono:

$$m_* = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.18 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} \qquad l_* = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.62 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}$$

$$t_* = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}.$$

Uscendo dalla meccanica, pensiamo ad es. alla carica elettrica: l'unità q_* di carica si potrà definire (nelle unità m_*, l_*, t_*) come quella che posta a distanza unitaria da un'altra uguale la respinge con la forza unitaria. Lasciamo per esercizio di dimostrare che

$$q_* = \sqrt{\hbar c} = 5.62 \cdot 10^{-9}\,\text{franklin} = 1.87 \cdot 10^{-18}\,\text{coulomb}.$$

Però esiste *un'unità naturale* di carica, la carica dell'elettrone; e si vede che $e = q_*/11.7$. Il fattore numerico 11.7 è un *dato di fatto*, del tutto indipendente da convenzioni (e di cui non si sa ancora spiegare il valore ...). Questa — e altre simili — sono le vere costanti universali, perché non dipendono dalle nostre scelte.

Il Sistema Internazionale di unità

Le grandezze fondamentali del SI sono: *massa* (kg), *lunghezza* (m), *tempo* (s), *temperatura* (K), *quantità di materia* (mol); più altre che non ci serviranno. Della definizione delle unità di lunghezza, di tempo e di massa abbiamo già trattato; quelle di temperatura e di quantità di materia le definiremo al momento opportuno.

Dalla scelta fatta per le grandezze fondamentali segue che G, h (costante di Planck), k (costante di Boltzmann) e N ("numero" di Avogadro) sono costanti universali che possono entrare in certe relazioni fisiche, e che debbono essere oggetto di determinazione sperimentale. Diverso è oggi lo status di c: come abbiamo già visto nel Cap. 3, la velocità della luce è un fattore di conversione fissato per convenzione, il che vuol dire che a rigore lunghezza e tempo non possono essere entrambe grandezze fondamentali (avevamo già detto che siamo in un campo che attende ancora una sistemazione precisa ...).

Fissate le grandezze fondamentali, tutte le altre sono *derivate*, ma non è ancora specificato come. Esempio: se lunghezza e tempo sono fondamentali è quasi inevitabile definire la velocità da $v = ds/dt$ e l'accelerazione da $a = dv/dt$; ma la forza? Possiamo scegliere qualsiasi relazione in cui una forza sia legata a grandezze fondamentali: ad es. $F = ma$, oppure $F = m_1 m_2/r^2$ (la soluzione adottata è la prima, perché più utile; ma bisogna dirlo).

Così l'energia cinetica si definisce da $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2$, e non da $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}T$ (che è il "teorema di equipartizione" della meccanica statistica, scritto con $k = 1$): ci sono ottime ragioni per questo, ma non una necessità logica.

Una volta definite tutte le grandezze derivate, si hanno diverse conseguenze:

- viene estesa la classe delle grandezze tra loro omogenee: ad es. v^2/r è omogenea a g, ecc.
- in alcune relazioni compaiono le *costanti universali*, es. $F = Gm_1m_2/r^2$, $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}kT$.
- ha senso parlare di *sistema coerente di unità*
- ha senso parlare di *dimensioni*.

Un sistema coerente di unità usa per le grandezze derivate le unità dedotte dalle equazioni di definizione delle grandezze, *senza fattori numerici.* Ad es. nel SI l'unità di velocità *deve* essere m/s, quella di energia cinetica $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ (che si chiama "joule") ecc. Invece nel sistema CGS l'unità di velocità sarà cm/s e quella di energia cinetica $\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ (erg).

Nell'App. 3 abbiamo dato alcune indicazioni per il corretto uso di simboli, abbreviazioni, ecc. relativamente all'argomento di questo capitolo.

19. Dimensioni

Come abbiamo già detto alla fine del cap. prec., una volta scelte le grandezze fondamentali di un sistema di unità, e fissate le definizioni delle grandezze derivate, le unità di quest'ultime discendono automaticamente dalla scelta fatta per le unità delle prime. Di conseguenza, ogni cambiamento nelle unità delle grandezze fondamentali si riflette in un dato modo anche nelle unità delle grandezze derivate. Questo fatto si esprime con il concetto di *dimensione fisica.*

La dimensione fisica di una grandezza indica il *modo di trasformarsi* della sua unità in un sistema coerente, quando si cambiano le unità fondamentali.

Esempi: L'unità di velocità è proporzionale a quella di lunghezza e inversamente proporzionale a quella di tempo: allora si scrive

$$[v] = [l][t]^{-1}$$

L'unità di energia cinetica è proporzionale a quella di massa, al quadrato di quella di lunghezza, inversamente proporzionale al quadrato dell'unità di tempo:

$$[E_{\rm c}] = [m][l]^2[t]^{-2}$$

Nota: Dagli esempi si vede la corretta *notazione dimensionale*: nelle equazioni dimensionali si scrivono, fra parentesi quadre, i simboli delle *grandezze*, non quelli delle unità.

Osservazione: La dimensione fisica di una grandezza è puramente *convenzionale* (non ha alcun significato profondo). Questo per due ragioni:

– in primo luogo perché la scelta delle grandezze fondamentali, da cui dipende la dimensione, è arbitraria

– in secondo luogo perché lo stesso accade per la scelta delle equazioni di definizione delle grandezze derivate.

Si dice *numero puro* (o anche *adimensionale*) una grandezza che ha dimensione $[m]^0[l]^0[t]^0 \ldots$ Ne segue che la misura di un numero puro *non dipende dalla scelta delle unità* (in un dato sistema coerente). Ne segue anche che *non esistono unità di misura per i numeri puri.*

Equazioni, funzioni e controlli dimensionali

Grandezze omogenee si misurano nelle stesse unità, dunque hanno le stesse dimensioni. Si noti che il viceversa non è sempre vero: ne riparleremo più avanti.

I due membri di un'equazione fisica, dovendo essere uguali, sono necessariamente omogenei. Di qui la

Regola 1: *I due membri di un'equazione fisica debbono avere le stesse dimensioni.*

Poiché la somma ha senso solo fra grandezze omogenee, si ha la

Regola 2: *I termini di una somma in un'equazione fisica debbono avere le stesse dimensioni.*

Esempio: L'equazione

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

soddisfa alle due regole, poiché tanto s, quanto $v_0 t$ e $\frac{1}{2} a t^2$ hanno dimensione $[l]$.

Non ci sono invece restrizioni per i prodotti e le potenze: è lecito moltiplicare due grandezze x e y qualsiasi, e la dimensione del prodotto si otterrà con la regola del prodotto delle potenze:

$$[v_0 t] = [v_0][t] = [l][t]^{-1}[t] = [l].$$

In modo analogo si procede col quoziente, e anche con potenze di esponente qualsiasi:

$$\left[\sqrt{l/g}\right] = [l/g]^{1/2} = \bigl([l][l]^{-1}[t]^2\bigr)^{1/2} = [t].$$

Consideriamo ora un'equazione della forma $y = f(x)$, dove la funzione f non è una potenza (può essere un'esponenziale, una funzione circolare, ecc.) Dalla regola 1 sappiamo che y ed $f(x)$ debbono avere le stesse dimensioni; ma quali sono le dimensioni di $f(x)$? Se x è un numero puro, non ci sono problemi: anche $f(x)$ è un numero puro, e perciò lo deve essere anche y. Ma se x non è adimensionale, che significato ha $f(x)$?

Le funzioni della matematica sono $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ossia tra numeri puri. Sembra perciò possibile intendere che $f(x)$ vada calcolata non su x, ma sulla *misura* di x (che in quanto rapporto di due grandezze omogenee, è certamente un numero puro). Nasce però una difficoltà: se cambiamo l'unità di misura, la misura di x cambia, e perciò cambia $f(x)$, e *non per un fattore di proporzionalità*, perché f non è una potenza. Dunque a $f(x)$ *non si potrebbe attribuire una dimensione definita*, e perciò questa via d'uscita è preclusa.

Non resta dunque che concludere con la

Regola 3: *Ogni espressione che compaia come argomento di una funzione diversa da una potenza, dev'essere un numero puro.*

Su queste tre regole si basano i *controlli dimensionali*: un'equazione fisica che non soddisfi a tutte e tre le regole, è certamente sbagliata. È appena necessario osservare che le regole danno criteri necessari, ma non sufficienti, per più ragioni:

- come abbiamo già osservato, non sempre grandezze con le stesse dimensioni sono veramente omogenee
- spesso con le grandezze fisiche che figurano nell'equazione è possibile costruire numeri puri, e qualunque funzione di un numero puro non altera i controlli dimensionali

– ancora più banalmente, è sempre possibile sbagliare un fattore numerico (per es. "perdere" un fattore 2 in un passaggio) e questo errore sfugge al controllo dimensionale.

Ciò non toglie che i controlli dimensionali sono un aiuto prezioso, *che non bisogna mai trascurare.*

Il problema degli angoli

L'esatto status degli angoli come grandezze fisiche ha sempre costituito un problema. Da un lato, sembra naturale considerarli numeri puri, in quanto rapporti di due lunghezze; dall'altro, come si spiega che esistano diverse unità di misura (radiante, grado, secondo . . .)? Inoltre esistono gli "angoli solidi," che hanno unità di misura proprie (steradiante, grado quadrato . . .).

In realtà nell'ultima convenzione internazionale che ha ridefinito il SI la posizione degli angoli è rimasta "impregiudicata": possono essere intesi a scelta come *numeri puri*, ma anche come *grandezze fondamentali*, ovviamente con propria unità. Purtroppo però se si va a guardare la pratica, la si trova alquanto contraddittoria. Vediamo perciò come si dovrebbe procedere con coerenza nei due casi.

A. *Angoli come grandezze derivate*:

Si definisce l'angolo come rapporto fra la lunghezza dell'arco e il raggio. Allora:

1) Gli angoli sono numeri puri, e non ha senso introdurre unità (neppure il radiante).
2) A maggior ragione non è lecito usare gradi, ecc.
3) Gli argomenti delle funzioni trigonometriche sono direttamente gli angoli.
4) Vi sono grandezze non omogenee, e di significato fisico molto diverso, che hanno le stesse dimensioni: l'esempio più tipico sono energia e momento di una forza, che non è certo corretto sommare insieme!

B. *Angoli come grandezze fondamentali*:

L'angolo viene definito dalla geometria, al modo classico (come parte di piano) o attraverso le rotazioni. Allora:

1) Ha senso introdurre tutte le unità di misura che si vuole.
2) Si aggiunge una nuova dimensione $[\alpha]$.
3) Occorre perciò una nuova "costante universale" — chiamiamola ϱ — di dimensione $[\alpha]$, corrispondente al radiante: $\varrho = 1\,\mathrm{rad}$.
4) La costante ϱ dovrà comparire in molte formule in cui non è abituale introdurla.

Esempi: la relazione fra arco, raggio e angolo (fig. 19–1):

$$s = r\,\frac{\vartheta}{\varrho}$$

la velocità angolare:

$$\omega = \varrho\, v/r \qquad [\omega] = [\alpha][t]^{-1}$$

il momento di una forza:

$$M = \frac{rF}{\varrho} \qquad [M] = [l][F][\alpha]^{-1} = [E][\alpha]^{-1} \neq [E].$$

5) Gli argomenti delle funzioni trigonometriche debbono essere sempre numeri puri: es. $\sin(\vartheta/\varrho)$.
6) Gli angoli solidi hanno dimensione $[\alpha]^2$ e le unità sono i quadrati di quelle usate per gli angoli (ster = rad^2).
7) Nelle formule che contengono angoli solidi, figurerà di solito ϱ^2.

Purtroppo la pratica è tutt'altro che coerente con l'una o con l'altra delle due posizioni:

– si dice che gli angoli sono numeri puri
– si usano varie unità
– non si usa mai la costante ϱ.

Non resta perciò che affidarsi, come *extrema ratio*, al "sano intuito fisico"!

La deduzione "dimensionale" delle leggi fisiche

Accade spesso che sia possibile, con sole considerazioni dimensionali, prevedere la forma di certe leggi fisiche (ovviamente a meno di numeri puri). Vediamo un esempio canonico: il periodo di un pendolo.

Facciamo l'ipotesi che nell'espressione del periodo possano intervenire soltanto:

– la massa m
– la lunghezza l
– l'accelerazione di gravità g
– l'ampiezza ϑ delle oscillazioni.

Vediamo in primo luogo se con queste grandezze si può costruire un numero puro. Se trattiamo gli angoli come numeri puri, ovviamente lo è ogni $f(\vartheta)$; poi, essendo $[g] = [l][t]^{-2}$:

$$[m]^a\,[l]^b\,[g]^c = [m]^a\,[l]^{b+c}\,[t]^{-2c}$$

e perciò si otterrà un numero puro solo se $a = 0$, $b + c = 0$, $c = 0$. Dunque nessuna combinazione monomia di m, l, g è un numero puro.

Cerchiamo poi di costruire un tempo: dovrà essere $a = 0$, $b+c = 0$, $-2c = 1$ cioè $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$. Dunque l'unico tempo che si può ottenere è $\sqrt{l/g}$. Riassumendo, la formula più generale per il periodo è

$$T = f(\vartheta)\sqrt{l/g}.$$

Resta completamente indeterminata la dipendenza dall'ampiezza, e in particolare il fatto che $f(0) = 2\pi$.

Questo è tutto quanto si può ottenere nel nostro esempio con considerazioni dimensionali. Non si ottiene la formula esatta, e nemmeno quella approssimata per le piccole oscillazioni, ma può colpire che risulti dimostrata l'indipendenza del periodo dalla massa. Il fatto è che nelle nostre ipotesi era già contenuta molta fisica:

– l'identità di massa inerziale e gravitazionale (abbiamo usato una sola massa)
– il fatto che tutti gli effetti gravitazionali sulla Terra sono riassunti nell'unico parametro g
– il non intervento di costanti universali (c, G, k ...).

Dunque l'argomento dimensionale è tutt'altro che "ingenuo"! Di conseguenza, è anche tutt'altro che semplice applicarlo correttamente, perché bisogna saper bene quali sono le ipotesi ragionevoli da fare.

Controesempio: Non si può calcolare l'energia di ionizzazione di un atomo di H se non si sa che interviene la costante di Planck. Ma se si tiene conto di ciò, con le grandezze disponibili si possono costruire due numeri puri: uno è e/q_* (v. al cap. prec.), l'altro $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{p}$. Essi rendono del tutto indeterminato il problema senza ipotesi ulteriori:

– che c non deve entrare, almeno in prima approssimazione, perché il moto dell'elettrone è lento (non relativistico)
– lo stesso per m_p, perché il protone, avendo massa molto maggiore dell'elettrone, è sostanzialmente fermo.

Con queste ipotesi si arriva alla formula giusta (a parte un fattore 2); ma è chiaro che il ragionamento non può essere più definito "puramente dimensionale." Ecco il motivo delle virgolette nel titolo. Resta il fatto che sapendoli usare gli argomenti dimensionali hanno grande valore euristico (dal greco $\varepsilon\upsilon\varrho\iota\sigma\kappa\omega$ = "trovo").