Cap. 5 – Rappresentazioni irriducibili di gruppi lineari

Rappresentazioni di gruppi lineari

In questo capitolo ci occuperemo delle rappresentazioni dei gruppi lineari in generale, cioè dei gruppi di matrici definite su uno spazio lineare; ciò sarà utile per il fatto che potremo ottenere le rappresentazioni irriducibili dei gruppi che più c'interessano mediante riduzione di rappresentazioni irriducibili dei gruppi lineari generali.

Sia GL(p,C) il gruppo lineare generale sullo spazio vettoriale di dimensione p definito sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Le matrici M che formano il gruppo costituiscono esse stesse una rappresentazione del gruppo, che chiameremo fondamentale.

Per ogni matrice M, consideriamo poi M^*, $(M^+)^{-1}$, $(M^{\mathrm{T}})^{-1}$. È chiaro che le corrispondenze

$$M \mapsto M^*, \quad M \mapsto (M^{\mathrm{T}})^{-1}, \quad M \mapsto (M^+)^{-1}$$

sono degli automorfismi (s'intende che supponiamo M^*, M^{T}, $M^+ \in \mathrm{GL}(p, C)$), e si noti che corrispondenze come $M \mapsto M^{\mathrm{T}}$ o $M \mapsto M^+$ non lo sono. Dunque, oltre alla rappresentazione fondamentale, possiamo considerare altre tre rappresentazioni, di cui diamo la denominazione e la notazione per i vettori degli spazi in cui agiscono nella seguente tabella:

M	fondamentale	x^a
M^*	coniugata	$x^{\dot{a}}$
$(M^{\mathrm{T}})^{-1}$	aggiunta*	x_a
$(M^+)^{-1}$	agg. coniugata	$x_{\dot{a}}$

Nel caso più generale queste rappresentazioni non sono equivalenti; se però invece del gruppo generale considereremo dei sottogruppi otterremo delle equivalenze tra le rappresentazioni. Possiamo classificare le equivalenze nel seguente modo, dove abbiamo denotato ogni rappresentazione mediante un suo elemento M:

1. $\{M\} \sim \{M^*\}$
2. $\{M\} \sim \{(M^{\mathrm{T}})^{-1}\}$
3. $\{M\} \sim \{(M^+)^{-1}\}$
4. $\{M\} \sim \{M^*\} \sim \{(M^{\mathrm{T}})^{-1}\} \sim \{(M^+)^{-1}\}$.

* da non confondere con la rappresentazione aggiunta definita in generale per i gruppi di Lie a pag. 3–7.

Dalla natura delle operazioni di coniugazione hermitiana si vede che con questa classificazione abbiamo esaurito tutte le possibilità di equivalenza.

Rappresentazioni tensoriali irriducibili

Cominciamo ora a considerare i casi in cui queste equivalenze vengono verificate.

Nel caso di un gruppo generale *reale* $\mathrm{GL}(p, R)$, è $M^* = M$ (e, ovviamente, $M^{-1} = (M^*)^{-1}$). Le rappresentazioni $\{M\}$ e $\{M^*\}$ sono non solo equivalenti ma uguali, nel senso che la matrice

$$V : M^* = VMV^{-1} \quad \forall M$$

è realizzata dall'identità.

Non è detto invece che l'equivalenza delle rappresentazioni $\{M\}$, $\{M^*\}$ sia possibile solo per gruppi equivalenti a un gruppo reale, di cui $\{M\}$ e $\{M^*\}$ siano rappresentazioni.

Consideriamo ora il caso in cui $\{M\} \sim \{(M^{\mathrm{T}})^{-1}\}$ o equivalentemente $x_a \sim x^a$. Ciò si esprime con il fatto che $\exists V$:

$$\forall M : (M^{\mathrm{T}})^{-1} = VMV^{-1}$$

o anche: $M^{\mathrm{T}}VM = V$, cioè in termini di componenti:

$$(M^{\mathrm{T}})_{ab} V_{bc} M_{cd} = V_{ad}$$

ossia

$$M_{ba} M_{cd} V_{bc} = V_{ad};$$

ciò significa che V ha la proprietà di trasformazione di un tensore isotropo; esiste allora una forma $V_{ab}\, x^a x^b$ simmetrica invariante. Il fatto che tale forma non è in generale reale o hermitiana non ne permette una riduzione a forma canonica, cioè non è in generale possibile diagonalizzare la matrice V_{ab}.

La forma $V_{ab}\, x^a x^b$ si può scrivere anche $x^a x_a$, definendo $x_a = V_{ab} x^b$. Chiamiamo allora x_a componenti covarianti, x^a componenti controvarianti, V_{ab} è il tensore metrico che fa passare dalle componenti controvarianti a quelle covarianti.

Nel caso particolare che V_{ab} possa essere diagonalizzato, con un cambiamento di scala può essere portato nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} m \\ \\ n \\ \end{array} \tag{5–1}$$

e il gruppo può essere caratterizzato allora dal lasciare invariante la forma simmetrica

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \cdots - x_p^2.$$

Tale gruppo viene denominato con $\mathrm{O}(m, n, \mathrm{C})$ $(m + n = p)$.

Consideriamo il caso in cui $\{M\} \sim \{(M^+)^{-1}\}$; ciò equivale a dire $M^+ V M = V$: la forma invariante è allora $V_{\dot{a}b}\, x^{\dot{a}} x^b$. Anche in questo caso possiamo introdurre delle coordinate covarianti: $x_b = V_{\dot{a}b}\, x^{\dot{a}}$; poiché la $V_{\dot{a}b}\, x^{\dot{a}} x^b$ è hermitiana, $V_{\dot{a}b}$ si può diagonalizzare, e con un cambiamento di scala portare nella forma (5–1).

Il gruppo potrà allora essere caratterizzato dal lasciare invariante la forma

$$x_1^* x_1 + \cdots + x_m^* x_m - x_{m+1}^*\, x_{m+1} - \cdots - x_p^* x_p$$

e viene indicato con $\mathrm{U}(m, n)$ $(m + n = p)$.

Consideriamo infine il caso in cui la rappresentazione fondamentale, coniugata, aggiunta e coniugata aggiunta siano tutte equivalenti. Con un ragionamento analogo a quello fatto sopra è facile convincersi che viene lasciata invariata una forma quadratica reale (simmetrica). Il gruppo corrispondente chiamasi gruppo ortogonale reale $\mathrm{O}(m, n)$.

Torniamo ora a $\mathrm{GL}(p, C)$: esiste un teorema (cfr. Weyl [7]) secondo il quale le rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{GL}(p, C)$ sono tutte e sole quelle costruite sugli spazi dei tensori nelle x

$$T^{abc\ldots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}_{def\ldots\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots}$$

dove i 4 insiemi di indici $(abc\ldots)$ $(\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots)$ $(def\ldots)$ $(\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots)$ corrispondono ciascuno a una rappresentazione irriducibile del gruppo simmetrico S_p; in altre parole le rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{GL}(p, \mathrm{C})$ sono caratterizzante dalla simmetria di ciascuno dei 4 insiemi di indici.

Ciò si può anche esprimere associando a ogni insieme di indici un diagramma di Young, che evidentemente può avere al massimo p righe.

Se ora invece del gruppo generale $\mathrm{GL}(p, \mathrm{C})$ consideriamo un gruppo reale, oppure di tipo $\mathrm{O}(m, n, \mathrm{C})$ o $\mathrm{U}(m, n)$, le rappresentazioni sono ancora quelle costruite sugli spazi dei tensori nelle x; tali tensori però non dipendono ora da quattro insiemi di indici, ma al più da due insiemi di indici, ciascuno corrispondente a una delle rappresentazioni irriducibili di S_p considerate sopra. Così in luogo di

$$T^{abc\ldots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}_{def\ldots\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots}$$

abbiamo:

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{per } \mathrm{GL}(p, R) & T^{abc\ldots}_{def\ldots} & \text{opp.} & T^{abc\ldots}_{\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots} & \text{opp.} & T^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}_{def\ldots} & \text{opp.} & T^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}_{\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots} \\
\text{per } \mathrm{O}(m, n, C) & T^{abc\ldots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots} & \text{opp.} & T_{def\ldots\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots} & \text{opp.} & T^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}_{def\ldots} & \text{opp.} & T^{abc\ldots}_{\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots} \\
\text{per } \mathrm{U}(m, n) & T^{abc\ldots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots} & \text{opp.} & T_{def\ldots\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots} & \text{opp.} & T^{abc\ldots}_{def\ldots} & \text{opp.} & T^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}_{\dot{d}\dot{e}\dot{f}\ldots}
\end{array}$$

Per i gruppi ortogonali reali $O(m,n)$ i tensori dipendono da un solo insieme di indici, ad es. $T^{abc\dots}$.

Le rappresentazioni che abbiamo così ottenute per i gruppi $O(m,n,C)$, $U(m,n)$, $O(m,n)$ non sono in generale irriducibili (mentre lo sono per $GL(p,R)$).

Prendiamo per esempio $O(m,n,C)$: le sue rappresentazioni si possono caratterizzare, come si è visto sopra, con $T^{abc\dots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dots}$; l'esistenza della forma simmetrica invariante $V_{ab}\,x^a x^b$ permette di contrarre il tensore

$$T^{abc\dots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dots} \mapsto V_{ab}T^{abc\dots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dots} = T^{c\dots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dots}$$

ottenendo un tensore con due indici in meno. È allora evidente che la rappresentazione è irriducibile quando sono nulle tutte le "tracce" ottenute con processo di contrazione col tensore V_{ab}.

Per $U(m,n)$ la situazione è analoga:

$$T^{abc\dots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dots} \mapsto V_{a\dot{a}}T^{abc\dots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dots} = T^{bc\dots\dot{b}\dot{c}\dots}$$

Nella più usuale notazione per i tensori di $U(m,n)$, cioè con un insieme di indici in alto e uno in basso: $T^{abc\dots}_{def\dots}$, la condizione d'irriducibilità è data, come è evidente, dall'annullarsi di tutte le tracce ottenute contraendo gli indici in basso con gli indici in alto.

Per $O(m,n)$ l'irriducibilità si ha quando sono nulle le tracce ottenute per contrazione all'interno dell'(unico) insieme di indici.

Gruppi unimodulari

Consideriamo ora i gruppi unimodulari, cioè i gruppi formati da matrici a determinante = 1. Il gruppo unimodulare generale, cioè il sottogruppo di $GL(p,C)$ formato dalle matrici a determinante 1 si denota con $SL(p,C)$, e analogamente si possono considerare i gruppi $SL(p,R)$, $SO(m,n,C)$, $SU(m,n)$, $SO(m,n)$.

Il tensore di Ricci $\varepsilon_{a_1\dots a_p}$ soddisfa la

$$\varepsilon_{a_1\dots a_p}M^{a_1}_{b_1}\cdots M^{a_p}_{b_p} = (-1)^{P_b}||M||$$

dove P_b è la parità della permutazione degli indici b. Da tale relazione si può dimostrare che $\varepsilon_{a_1\dots a_p}$ si trasforma per $SL(p,C)$ come un tensore isotropo e quindi esiste la forma invariante

$$\varepsilon_{a_1\dots a_p}T^{a_1\dots a_p}.$$

Inoltre, poiché se $q < p$

$$\varepsilon_{a_1\dots a_p}T^{a_1\dots a_q} = T'_{a_{q+1}\dots a_p}$$

si stabilisce l'equivalenza tra la rappresentazione del tensore $T^{a_1\dots a_q}$ e quella del tensore "duale"

$$T'_{b_1\dots b_{p-q}} = \varepsilon_{a_1\dots a_q b_1\dots b_{p-q}} T^{a_1\dots a_q}.$$

Dunque non tutte le rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{GL}(p, \mathrm{C})$ sono irriducibili per $\mathrm{SL}(p, \mathrm{C})$, e alcune divengono equivalenti. Ci occupiamo ora in particolare della riduzione delle rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{O}(m, n)$, $\mathrm{O}(m, n, \mathrm{C})$, $\mathrm{U}(m, n)$ rispettivamente sotto $\mathrm{SO}(m, n)$, $\mathrm{SO}(m, n, \mathrm{C})$, $\mathrm{SU}(m, n)$.

Le rappresentazioni tensoriali irriducibili di $\mathrm{O}(m, n)$ dipendono da un solo insieme di indici al quale corrisponde un diagramma di Young; le tracce ottenute per contrazione all'interno di tale insieme di indici sono nulle. Per ridurre le rappresentazioni di $\mathrm{O}(m, n)$ sotto $\mathrm{SO}(m, n)$ osserviamo che essendo $\varepsilon_{a_1\dots a_p} T^{a_1\dots a_p}$ invariante, la contrazione di T con ε fornisce un tensore con $q - p$ indici (se q era il numero di indici del tensore T). Ciò si può allora descrivere cancellando dal diagramma di Young ogni colonna con esattamente p caselle.

Abbiamo così esaurito le possibilità di ottenere invarianti mediante $\varepsilon_{a_1\dots a_p}$, ma non abbiamo finito di ridurre il tensore, poiché dato un tensore con un insieme di indici in alto possiamo, per applicazione di ε, ottenere tensori duali equivalenti (vedi sopra).

Come esempio preliminare prendiamo un tensore con $q < p$ indici (posti in alto), totalmente antisimmetrico rispetto ai q indici: il suo diagramma di Young è una colonna con q caselle. La contrazione con ε fornisce, com'è facile rendersi conto, un tensore senza indici in alto e con $p - q$ indici in basso, totalmente antisimmetrico rispetto a tali $p - q$ indici: il diagramma di Young è cioè una colonna con $p - q$ caselle. Esempio $(p = 5)$, $(q = 3)$:

$$T^{\ydiagram{1,1,1}} \mapsto \varepsilon_{\ydiagram{1,1,1,1,1}} T^{\ydiagram{1,1,1}} = T_{\ydiagram{1,1}}$$

In generale, a un tensore T caratterizzato da un insieme di indici (posti in alto) a cui corrisponde un generico diagramma di Young, potremmo applicare ε, un numero di volte pari al numero delle sue colonne: lo scopo della riduzione è però quello di ottenere, mediante applicazione di ε, un tensore con un numero totale di indici minore di p; è allora evidente che conviene abbassare gli indici mediante ε solamente per le colonne con più di $p/2$ caselle. Si ottiene così un tensore con un insieme di indici "residuo" in alto (e il diagramma relativo possiede non più di $p/2$ righe) e un insieme di indici in basso, con un diagramma dato dal "prodotto" delle colonne ottenute abbassando mediante $\varepsilon_{a_1\dots a_p}$ le colonne con più di $p/2$ caselle del diagramma originario.

Tale prodotto si riduce secondo le ordinarie regole di calcolo per i diagrammi di Young [8]) e si ha così una prima decomposizione del tensore (cfr. (1) nell'esempio seguente). Possiamo ripetere il procedimento alzando e abbassando indici mediante $\varepsilon^{a_1\dots a_p}$ e $\varepsilon_{a_1\dots a_p}$ rispettivamente, eseguendo i prodotti tra i diagrammi “alzati” e i diagrammi già presenti in alto (e analogamente per i diagrammi abbassati), e riducendo poi tali prodotti.

È chiaro che si può in questo modo arrivare ad avere diagrammi di non più di $p/2$ righe, poiché il processo d'innalzamento e abbassamento degli indici mediante ε fa diminuire sempre il numero di caselle del diagramma alzato o abbassato.

Quando si è arrivati ad avere diagrammi con non più di $p/2$ righe, con successive applicazioni dell'ordinario tensore metrico V^{ab} possiamo riportare tutti gli indici in alto; in alto avremo allora il prodotto del diagramma alzato e del diagramma che già si trovava in alto; tale prodotto va ridotto, e tutto il procedimento va ripetuto fino a ottenere tensori irriducibili, caratterizzati cioè da un unico diagramma di Young in alto con non più di $p/2$ righe, oltre che dalla condizione di traccia nulla.

Esaminiamo ora $\mathrm{O}(m,n,\mathrm{C})$; le rappresentazioni tensoriali dipendono da due insiemi di indici ($T^{abc\ldots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}$) e quindi da due diagrammi di Young, poiché il tensore metrico ordinario è sempre del tipo V_{ab} il procedimento di riduzione è uguale a quello indicato sopra: i due insiemi di indici vanno trattati separatamente, esattamente come l'(unico) insieme di indici delle rappresentazioni tensoriali di $\mathrm{O}(m,n)$.

Passiamo ora a $\mathrm{U}(m,n)$: le rappresentazioni tensoriali dipendono da due insiemi di indici ($T^{abc\ldots}_{def\ldots}$). Qui grazie a $\varepsilon_{a_1\ldots a_p}$ si possono abbassare gli indici posti in alto, e grazie a $\varepsilon^{a_1\cdots a_p}$ si possono alzare gli indici posti in basso.

Anche in questo caso il procedimento va ripetuto fino ad avere diagrammi con non più di $p/2$ righe. In questo caso non è però possibile riportare in alto gli indici abbassati con $\varepsilon_{a_1\ldots a_p}$, né riportare in basso gli indici innalzati con $\varepsilon_{a_1\ldots a_p}$, poiché il tensore metrico è di tipo $V_{a\dot{b}}$.

Rappresentazioni irriducibili di SU(3)

Come esempi considereremo ora due gruppi particolarmente semplici, e precisamente $\mathrm{SU}(3)$ e $\mathrm{SU}(2)$.

Esaminiamo $\mathrm{SU}(3)$; per ogni matrice M di $\mathrm{SU}(3)$ si ha $MM^+ = 1$, cioè $M = \left(M^+\right)^{-1}$, e $x_{\dot{a}} = x^a$. La rappresentazione fondamentale e l'aggiunta coniugata sono uguali, come accade in generale per i gruppi unitari.

Tenendo presente quanto detto sopra, essendo qui $p = 3$, si vede che i tensori irriducibili di $\mathrm{SU}(3)$ sono caratterizzati da due insiemi di indici, ciascuno dei quali è *simmetrico* (poiché il corrispondente diagramma di Young ha una sola riga); inoltre sono nulle le tracce ottenute per contrazione di ogni indice di un insieme con ogni indice dell'altro. Si noti che la simmetria degli insiemi di indici nelle rappresentazioni tensoriali irriducibili è caratteristica dei gruppi lineari con $p \leq 3$, come segue da quanto detto sopra.

Rappresentazioni irriducibili di SU(2)

Per il gruppo SU(2) possiamo ripetere gli stessi ragionamenti fatti per SU(3); per SU(2) si verifica il caso particolare in cui il tensore di Ricci ε_{ab}, avendo due indici, è un tensore metrico, cioè permette di stabilire l'equivalenza della rappresentazione fondamentale e di quella aggiunta: $x_a = \varepsilon_{ab}\, x^b$, cosa che non accade in generale per i gruppi $\mathrm{SU}(m,n)$.

I tensori di SU(2) dipendono allora da un solo insieme di indici, e tale insieme è simmetrico per le stesse considerazioni fatte a proposito di SU(3). Tale risultato si può anche ottenere a partire dalla

$$T^a_b \sim U^{ab} = \varepsilon^{ac} T^b_c$$

imponendo sui T^a_b la condizione di traccia nulla.

Infatti

$$T^a_b = \varepsilon_{bc} U^{ac}; \qquad T^a_a = 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{ac} U^{ac} = 0;$$

essendo ε antisimmetrico, ciò implica $U^{ac} - U^{ca} = 0$, come volevasi.

Si può anche dimostrare che la dimensione di un tensore irriducibile di SU(2) di ordine n è $n+1$. Ciò è in stretto rapporto con la possibilità di descrivere gli stati di spin s con i vettori della rappresentazione tensoriale irriducibile di ordine $n = 2s$.

Essendo vero in generale per i gruppi $\mathrm{U}(m,n)$ che $\{M\} \sim \{(M^+)^{-1}\}$, la $\{M\} \sim \{(M^{\mathrm{T}})^{-1}\}$ implica $\{M\} \sim \{M^*\}$. Ciò significa allora che

$$\forall M \in \mathrm{SU}(2) \quad \exists B : BMB^{-1} = M^*.$$

Poiché (vedi pag. 4–7) ogni $M \in \mathrm{SU}(2)$ si può scrivere nella forma

$$M = \exp(-\tfrac{i}{2}\,\vec\sigma\cdot\vec n\,\varphi)$$

la $BMB^{-1} = M^*$ si traduce in

$$\exp(-\tfrac{i}{2}\,\vec n\cdot\vec\sigma^*\,\varphi) = B\exp(\tfrac{i}{2}\,\vec n\cdot\vec\sigma\,\varphi)\,B^{-1},$$

ossia

$$B\,\vec\sigma B^{-1} = -\vec\sigma^*,$$

ed è facile vedere che per B si può prendere $\varepsilon_{ij} = (i\sigma_2)_{ij}$.

Composizione di due spin 1/2

A titolo di esempio, dati nello spazio $\mathbb{C}^2$ due vettori (detti anche spinori a due componenti) ψ^a, χ^b $(a,b = 1,2)$, consideriamone il prodotto tensoriale.

$\psi^a\chi^b$ è un tensore in generale non simmetrico, non fornisce quindi una rappresentazione irriducibile di SU(2). Scriviamo allora

$$\psi^a\chi^b = \tfrac{1}{2}(\psi^a\chi^b + \psi^b\chi^a) + \tfrac{1}{2}(\psi^a\chi^b - \psi^b\chi^a).$$

Il tensore $\psi^a\chi^b$ risulta così decomposto in una parte simmetrica e una antisimmetrica; la parte antisimmetrica corrisponde alla saturazione di $\psi\chi$ con ε, ed è un invariante; la parte simmetrica, per un ragionamento esposto in precedenza, dà una rappresentazione di SU(2) a dimensione $2+1=3$. Poiché SU(2) e SO(3) sono localmente isomorfi, e la rappresentazione di dimensione 3 di SU(2) coincide con la rappresentazione dei vettori di SO(3), possiamo affermare che $\psi^a\chi^b + \psi^b\chi^a$ si trasforma come un vettore di SO(3). D'altra parte $\psi^a\chi^b - \psi^b\chi^a$ è un invariante per SU(2) e quindi anche per SO(3), cioè è uno scalare di SO(3). Abbiamo così ritrovato il ben noto risultato della composizione di due spin 1/2: ne risulta cioè uno scalare (antisimmetrico) e un vettore (simmetrico rispetto allo scambio).

Si noti che la composizione di ψ^b con $\chi^{\dot{a}}$, che corrisponde fisicamente alla composizione di una particella di spin 1/2 con la sua antiparticella, fornisce un risultato diverso:

$$\psi^{\dot{a}} = V^{\dot{a}c}\psi_c = V^{\dot{a}c}\varepsilon_{cd}\,\psi^d$$
$$\psi^{\dot{a}}\chi^b = V^{\dot{a}c}\varepsilon_{cd}\,\psi^d\chi^b$$

e invertendo

$$\psi^d\chi^b = V_{\dot{a}c}\,\varepsilon^{cd}\psi^{\dot{a}}\chi^b.$$

Se ora sostituiamo al tensore $\psi^d\chi^b$ le componenti del tensore irriducibile, cioè del tensore simmetrico, otteniamo al membro destro le corrispondenti componenti del tensore irriducibile ottenuto dalla composizione di $\psi^{\dot{a}}$ con χ^b; ed analogamente sostituendo per $\psi^d\chi^b$ l'invariante (ottenuto per contrazione con ε) otteniamo al membro destro l'invariante che risulta dalla composizione di $\psi^{\dot{a}}$ con χ^b.

Cioè per il tensore irriducibile otteniamo:

$$\begin{aligned}\psi^1\chi^1 &\sim -\psi^{\dot{2}}\chi^1\\ \psi^2\chi^2 &\sim \quad\psi^{\dot{1}}\chi^1\\ \psi^1\chi^2+\psi^2\chi^1 &\sim -\psi^{\dot{2}}\chi^2+\psi^{\dot{1}}\chi^1\end{aligned}$$

e per l'invariante otteniamo:

$$\psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1 \sim -(\psi^{\dot{2}}\chi^2 + \psi^{\dot{1}}\chi^1).$$

Da questo risultato si vede che dalla composizione di χ^b con $\psi^{\dot{a}}$ otteniamo una parte che si trasforma come un vettore e un invariante, ma in questo caso non possiamo parlare di simmetria rispetto allo scambio.

Nel caso del gruppo SL(2, C), il tensore di Ricci ε_{ab} stabilisce, come per SU(2), l'equivalenza di x^a con x_a. I tensori irriducibili sono del tipo $T^{abc\ldots\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}$, con $(abc\ldots)$, $(\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots)$ simmetrici.

Rappresentazioni "vere" di $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Ci domandiamo ora quali siano le rappresentazioni vere per $\mathcal{L}_+^\uparrow$ tra tutte le rappresentazioni di SL(2,C). La risposta è immediata, se si osserva che se in una rappresentazione di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ una trasformazione è descritta dalla matrice M, la stessa trasformazione è descritta anche dalla matrice $-M$. La trasformazione indotta da M è in generale

$$T^{\overbrace{abc\ldots}^{j}\,\overbrace{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\ldots}^{j'}} \mapsto M^a_{\ a'}\, M^b_{\ b'} \cdots M^{\dot{a}}_{\ \dot{a}'}\, M^{\dot{b}}_{\ \dot{b}'} \cdots T^{\overbrace{a'b'c'\ldots}^{j}\,\overbrace{\dot{a}'\dot{b}'\dot{c}'\ldots}^{j'}}.$$

La trasformazione indotta da $-M$ è la stessa a meno di un fattore $(-1)^{j+j'}$, dal che si vede che le rappresentazioni per $\mathcal{L}_+^\uparrow$ si ottengono quando $j+j'$ è pari.

Consideriamo in particolare:

T^{ab}: esso ha 3 componenti (infatti è un tensore simmetrico del II ordine)

$T^{a\dot{b}}$: esso ha 4 componenti (a e $\dot{b}$ appartengono a due *diversi* insiemi di indici).

Si noti inoltre che $T^{a\dot{b}}$ è reale, mentre non lo è T^{ab}. Da ciò si può dedurre che $T^{a\dot{b}}$ fornisce la rappresentazione sullo spazio dei 4-vettori (reali). Si può anche dimostrare che T^{ab}, scritto nella forma $w^k = u^k + iv^k$ $(k = 1,2,3)$ fornisce, insieme al tensore coniugato, la rappresentazione sullo spazio dei tensori antisimmetrici, con $T^{0k} = u^k$, $T^{ij} = \varepsilon^{hij} v_h$. Notiamo infine che le rappresentazioni di SL(2,C) non sono unitarie: ciò non è casuale; poiché (cfr. pag. 4–1,2) il gruppo ha solo il sottogruppo invariante discreto $\mathcal{N} = \{E, -E\}$, le sue rappresentazioni sono fedeli a meno del segno; se supponiamo che siano anche unitarie, si otterrebbe come rappresentazione un gruppo di matrici unitarie, cioè un gruppo compatto il che è impossibile, dovendo tale gruppo essere isomorfo a SL(2,C) oppure a $\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathrm{SL(2,C)}/\mathcal{N}$, che non sono compatti. In generale si può dimostrare che un gruppo non compatto non ammette rappresentazioni unitarie a dimensione finita.