Cap. 6 – Rappresentazioni del gruppo di Poincaré

Gruppi inomogenei

In questo capitolo ci occuperemo in particolare del gruppo di Poincaré e delle sue rappresentazioni.

Iniziamo con un'osservazione sul modo di ottenere, a partire da un gruppo $\mathcal{G}$, un gruppo inomogeneo Γ: si consideri una rappresentazione di $\mathcal{G}$ sullo spazio vettoriale $\mathcal{H}$, realizzata mediante le matrici M:

$$\forall g \in \mathcal{G}, \quad g \mapsto M.$$

Consideriamo ora la coppia (M, a); $(a \in \mathcal{H})$. Definendo la legge di composizione

$$(M_1, a_1) \circ (M_2, a_2) = (M_1 M_2, M_1 a_2 + a_1)$$

l'insieme delle coppie (M, a) con la legge di composizione assegnata sopra formano un gruppo Γ, che si chiama gruppo inomogeneo associato al gruppo $\mathcal{G}$. Possiamo così per ogni rappresentazione di $\mathcal{G}$ costruire un diverso gruppo inomogeneo $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

Il gruppo di Poincaré si ottiene dalla rappresentazione del gruppo di Lorentz sui 4-vettori; se invece consideriamo il gruppo inomogeneo ottenuto a partire dalla rappresentazione sui tensori simmetrici $T^{\lambda\mu}$ a traccia nulla, si ha un gruppo inomogeneo a $6 + 9 = 15$ parametri. Si può anche dimostrare che partendo dalla rappresentazione $(1, 1)$ di SL(2,C) si ottiene un gruppo che coincide (a meno di isomorfismi) con $\tilde{\mathcal{P}}$, com'è da attendersi.

Esiste un omomorfismo naturale $\omega : \Gamma \to \mathcal{G}$, quello che associa alla coppia (M, a) l'elemento M; il cui nucleo H è $(1, a)$ e costituisce un gruppo abeliano, il gruppo additivo H (o delle traslazioni nello spazio vettoriale $\mathcal{H}$). Naturalmente $\mathcal{G} \simeq \Gamma/H$. Ciò si esprime anche (cfr. p. 3–1) dicendo che Γ è il prodotto semidiretto del suo sottogruppo abeliano invariante H e del sottogruppo omogeneo $\mathcal{G}$.

Algebra di Lie di $\mathcal{P}$; gli operatori di Shirokov X^λ e W^μ

Per il gruppo di Poincaré ci limiteremo allo studio del sottogruppo ortocrono proprio $\mathcal{P}_+^\uparrow$, definito analogamente a $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Poiché tale sottogruppo è connesso, ne considereremo le rappresentazioni unitarie (cfr. p. 2–5).

I generatori siano $M^{\lambda\mu}$, P^λ $(\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3)$. $M^{\lambda\mu}$ soddisfano le relazioni di commutazione date a p. 3–7, inoltre

$$[M^{\lambda\mu}, P^\nu] = i\,(G^{\mu\nu} P^\lambda - G^{\lambda\nu} P^\mu) \tag{6–1}$$

$$[P^\lambda, P^\mu] = 0. \tag{6–2}$$

Se consideriamo una rappresentazione dei generatori come operatori hermitiani, tra i quali è definito il prodotto, possiamo introdurre le seguenti X^λ, W^λ:

$$
\begin{aligned}
X^\lambda &= M^{\lambda\mu}P_\mu \\
W^\lambda &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\sigma\varrho}M_{\mu\sigma}P_\varrho .
\end{aligned}
\tag{6–3}
$$

Le 8 quantità X^λ, W^λ formano un insieme ridondante: sussistono infatti le relazioni:

$$X^\varrho P_\varrho = 0 \tag{6–4}$$

$$W^\lambda P_\lambda = 0. \tag{6–4$'$}$$

Si può inoltre provare:

$$P^\eta P_\eta\, M^{\lambda\mu} = X^\lambda P^\mu - X^\mu P^\lambda + \varepsilon^{\lambda\mu\sigma\varrho}W_\sigma P_\varrho \tag{6–3$'$}$$

il che mostra che le (6–3) sono invertibili rispetto a $M^{\lambda\mu}$ solamente quando $P^\eta P_\eta \neq 0$.

Per dare un'interpretazione fisica alle X e alle W, ricorriamo all'analogo classico di P^λ e $M^{\lambda\mu}$, e consideriamo X^1 nel sistema del baricentro ($\vec{P}=0$). Risulta allora: $X^1 = M^{10}P_0$; per analogia con il caso classico poniamo $M^{10} = x^1P^0 - x^0P^1 = x^1P^0$; dunque nel sistema del baricentro $X^1 = x^1P^0P_0 = x^1m^2$.

Nel sistema del baricentro dunque le X coincidono con le coordinate del baricentro stesso a meno di un fattore m^2.

Coordinate del baricentro e spin

Un esame superficiale della questione porterebbe a interpretare in generale le X^λ come coordinate del baricentro, ma tale interpretazione urta contro numerose difficoltà: infatti le X^λ non commutano tra loro, contrariamente a quanto si richiede nell'ordinaria definizione di coordinate; inoltre la (6–3$'$), scritta nella forma

$$M^{\lambda\mu} = \frac{1}{P^\eta P_\eta}\left((X^\lambda P^\mu - X^\mu P^\lambda) + \varepsilon^{\lambda\mu\sigma\varrho}M_\sigma P_\varrho\right)$$

porterebbe, interpretando le X^λ come coordinate del baricentro, a identificare (a meno del fattore $P^\eta P_\eta$) $X^\lambda P^\mu - X^\mu P^\lambda$ col momento angolare del baricentro (momento angolare orbitale) e $\varepsilon^{\lambda\mu\sigma\varrho}M_\sigma P_\varrho$ col momento angolare rispetto al baricentro, cioè spin. Le componenti dello spin così definito *non* obbediscono però alle relazioni di commutazione per le componenti del momento angolare.

Per una corretta definizione delle coordinate del baricentro $\vec{Q}$ e del momento angolare interno (spin) $\vec{S}$ dobbiamo richiedere [10]

1) detto $\vec{J}$ il momento angolare totale, cioè $J^i = \varepsilon^{ikl} M_{kl}$, deve valere la

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{Q} \times \vec{P} \tag{6–5}$$

2) le componenti delle $\vec{Q}$ debbono commutare tra loro;
3) le $\vec{Q}$ e gli impulsi $\vec{P}$ devono soddisfare le relazioni di commutazione canoniche:

$$[Q^i, P^j] = i\,\delta^{ij}$$

4) le $\vec{S}$ devono commutare con le $\vec{P}$ e le $\vec{Q}$
5) le componenti di $\vec{S}$ devono soddisfare le ordinarie relazioni di commutazione per il momento angolare.

Si può allora eseguire il calcolo ad es. di $\vec{Q}$, che risulta univocamente determinato dai generatori del gruppo di Poincaré, e il risultato è, sugli stati di una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{P}$, con la notazione $K^i = M^{i0}$:

$$\vec{Q} = \tfrac{1}{2}\Big(\vec{K} {P^0}^{-1} + {P^0}^{-1} \vec{K}\Big) + \frac{\vec{J} \times \vec{P}}{m\,(P^0 + m)} - \frac{(\vec{K} \times \vec{P}) \times \vec{P}}{m P^0 (P^0 + m)}.$$

$\vec{S}$ risulta allora definito dalla (6–5).

Da questa definizione di spin, il 4-vettore $W^\lambda = (W^0, \vec{W})$ si può scrivere in termini di $\vec{S}$ e di $\vec{P}$ nel seguente modo:

$$W^\lambda = \left(\vec{S}\cdot\vec{P},\ m\vec{S} + \frac{(\vec{S}\cdot\vec{P})\,\vec{P}}{P^0 + m}\right). \tag{6–6}$$

La componente W^0 si scrive anche

$$W^0 = \vec{S}\cdot\vec{P} = \vec{J}\cdot\vec{P} = \Lambda\,|\vec{P}|;$$

Λ chiamasi elicità o componente dello spin lungo la direzione dell'impulso.

Per le X^λ, che non hanno un'interpretazione fisica diretta, e per altri modi di definire "coordinate del baricentro," si veda [11].

Possiamo pure calcolare le relazioni di commutazione per gli operatori X e W, tenendo presente che, definito ad esempio $\varepsilon^{0123} = 1$, è

$$\varepsilon_{0123} = -1$$

e di conseguenza la contrazione tra due tensori di Ricci dà il seguente risultato:

$$\varepsilon^{\lambda\mu\varrho\eta} \varepsilon_{\lambda\mu\sigma\pi} = -2\,(\delta^\varrho_\sigma\,\delta^\eta_\pi - \delta^\varrho_\pi\,\delta^\eta_\sigma);$$

otteniamo così:

$$
\begin{aligned}
[X^\lambda, P^\mu] &= i\,(P^\lambda P^\mu - G^{\lambda\mu} P^\sigma P_\sigma) \\
[W^\lambda, P^\mu] &= 0 \\
[X^\lambda, X^\mu] &= i\,M^{\lambda\mu} P^\sigma P_\sigma \\
[X^\lambda, W^\mu] &= i\,W^\lambda P^\mu \\
[W^\lambda, W^\mu] &= i\,\varepsilon^{\lambda\mu\eta\varrho} W_\eta P_\varrho .
\end{aligned}
\tag{6–7}
$$

Invarianti del gruppo di Poincaré

I commutatori (6–7) non definiscono un'algebra di Lie; le W e le X sono tuttavia utili per costruire gli invarianti del gruppo. Poiché gli invarianti del gruppo di Poincaré devono essere anche invarianti per il gruppo di Lorentz, saranno dei prodotti scalari costruiti con i 4-vettori X, P, W. Gli scalari che possiamo costruire sono, oltre a $X^\lambda P_\lambda$ e $W^\lambda P_\lambda$, che sono identicamente nulli (cfr. (6–4), (6–4′)):

$$P^\lambda P_\lambda \quad W^\lambda W_\lambda \quad X^\lambda X_\lambda \quad X^\lambda W_\lambda$$

di questi solamente i primi due: $P^\lambda P_\lambda$ e $W^\lambda W_\lambda$ sono invarianti per il gruppo di Poincaré, come si può verificare dalle (6–7).

Si può anche dimostrare che quando $P^\lambda P_\lambda = 0$, è anche $W^\lambda W_\lambda = 0$; e in tal caso $\Lambda = W^0/|\vec{P}|$ è un invariante addizionale. Inoltre nelle rappresentazioni con $P^\varrho P_\varrho \geq 0$ il segno dell'energia, definito come $\Sigma = P^0/|P^0|$ è un'invariante addizionale, pur di restringersi al gruppo $\mathcal{P}^\uparrow$, come risulta dalla discussione svolta a p. 3–2.

È anche possibile considerare rappresentazioni con $P^\lambda = 0$, $\forall\lambda$, allora il gruppo d'invarianza è il gruppo di Lorentz omogeneo, e gli invarianti sono quelli di $\mathcal{L}$: $M^{\lambda\mu}M_{\lambda\mu}$, $\varepsilon^{\lambda\mu\sigma\varrho}M_{\lambda\mu}M_{\sigma\varrho}$. Bisogna ancora notare che l'invarianza di Λ (nel caso di $P^\lambda P_\lambda = 0$) vale solo considerando il gruppo $\mathcal{P}^\uparrow_+$: nella definizione di W entra una ε, si vede allora che i W^i sono pseudovettori, W^0 è uno pseudoscalare, e perciò Λ è invariante solo in modulo per $\mathcal{P}^\uparrow$.

Cominciamo ora a classificare le rappresentazioni irriducibili unitarie di $\mathcal{P}^\uparrow_+$ in base agli autovalori di $P^\lambda P_\lambda$ e di $W^\lambda W_\lambda$ (e degli eventuali invarianti addizionali). Dal momento che l'unitarietà implica che l'autovalore di $P^\lambda P_\lambda$ sia un numero reale possiamo, seguendo Wigner [6], distinguere le rappresentazioni nelle seguenti classi:

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{I} & P^\varrho P_\varrho > 0 \\
\mathrm{II} & P^\varrho P_\varrho = 0, \quad P^\varrho \neq 0 \\
\mathrm{III} & P^\varrho P_\varrho < 0 \\
\mathrm{IV} & P^\varrho = 0 \quad \forall\varrho.
\end{array}
$$

Le rappresentazioni III e IV non sono d'interesse fisico, e nella nostra trattazione non ce ne occuperemo; sono invece d'interesse fisico le I e II, che discuteremo nel seguito.

Iniziamo con la classe I: in essa le rappresentazioni sono in primo luogo caratterizzate dall'autovalore m^2 di $P^\varrho P_\varrho$ e da quello ε di Σ; la rappresentazione è infine determinata dall'autovalore di $W^\lambda W_\lambda$.

Per il calcolo di $W^\lambda W_\lambda$ dalla (6–6) si ha:

$$W^\lambda W_\lambda = -m^2 S^2.$$

A tale risultato si può anche arrivare considerando il caso in cui $\vec{P} = 0$; si ha allora $W^0 = 0$, inoltre le relazioni di commutazione per i W^j sono

$$[W^i, W^j] = i\,\varepsilon^{ijk} m\, W_k.$$

Ciò si può esprimere dicendo che quando le componenti spaziali dell'impulso sono nulle, il vettore $\vec{W}$ è essenzialmente il momento angolare (di spin, essendo $\vec{P} = 0$), e precisamente $W^i = m\, S^i$.

Conseguentemente $W^\lambda W_\lambda = -W^i W^i = -m^2 |\vec{S}|^2$, risultato che vale in generale, a prescindere dalla particolare scelta $\vec{P} = 0$, essendo $W^\lambda W_\lambda$ invariante.

Digressione sui sistemi elementari

Una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré è dunque caratterizzata, oltre che dal segno dell'energia, dagli autovalori della massa e dello spin totale. Seguendo Newton e Wigner [12], definiamo sistema elementare un sistema i cui stati si trasformano secondo una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$, cioè un sistema nel quale $P^\varrho P_\varrho$ e $|\vec{S}|^2$ sono numeri.

Sono sistemi elementari una particella elementare libera, oppure uno stato legato come ad esempio il deutone. Un sistema di più particelle non interagenti non è un sistema elementare; la corrispondente rappresentazione di $\mathcal{P}_+^\uparrow$ è riducibile e i vettori dei sottospazi irriducibili corrispondono a stati a massa e spin definiti. Anche un sistema di particelle interagenti può essere considerato non elementare. Si pensi all'atomo d'idrogeno: ad esso non possiamo associare una massa e uno spin definiti, ma possiamo considerare sistemi elementari i suoi stati stazionari.

Si noti che la definizione di sistema elementare non è relativa a proprietà intrinseche del sistema considerato, ma riguarda piuttosto un modo di trattare il sistema: dire ad esempio che il protone è un sistema elementare non equivale a stabilire se il protone sia una particella elementare o uno stato legato di altre particelle.

Costruzione delle rappresentazioni a spin zero

Ci domandiamo ora su quale spazio di Hilbert la rappresentazione è definita; la presenza del sottogruppo delle traslazioni ci suggerisce di considerare lo spazio di Hilbert delle funzioni $\varphi(p)$ del quadriimpulso. Poiché d'altra parte $P^\varrho P_\varrho = m^2$, possiamo limitarci a considerare funzioni della sola parte spaziale dell'impulso, e cioè $\varphi(\vec{p})$.

Le ipotesi finora fatte equivalgono a supporre che un vettore base generico dello spazio di rappresentazione sia caratterizzato dagli autovalori degli operatori

$$P^\lambda P_\lambda \quad \Sigma \quad W^\lambda W_\lambda \quad P^\lambda \tag{6–8}$$

dove i primi tre operatori caratterizzano la rappresentazione irriducibile (multipletto di $\mathcal{P}_+^\uparrow$), P^λ caratterizza gli stati all'interno di una rappresentazione irriducibile. La caratterizzazione così ottenuta non è però completa: all'insieme (6–8) dobbiamo infatti aggiungere altri operatori per ottenere un insieme massimo di osservabili commutabili. È facile rendersi conto che solamente le W^λ commutano con tutte le osservabili dell'insieme (6–8); dal momento che le componenti di W^λ non commutano tra loro, possiamo sceglierne una sola, ad esempio W^0, oppure Λ: così l'insieme

$$P^\lambda P_\lambda, \quad \Sigma, \quad W^\lambda W_\lambda, \quad P^\lambda, \quad \Lambda \tag{6–8$'$}$$

è un insieme massimo di osservabili commutabili, e gli autovalori degli operatori di (6–8′) forniscono una caratterizzazione completa dei vettori base della rappresentazione. Gli autovalori dell'operatore elicità Λ sono

$$l = s, s-1, \ldots, -s.$$

Dunque le funzioni $\varphi(\vec{p})$ sono in effetti a $2s+1$ componenti:

$$\varphi_l(\vec{p}), \quad l = s, s-1, \ldots, -s.$$

Prendiamo ora in esame le rappresentazioni con $s = 0$, e l'autovalore di Σ, $\varepsilon = 1$. Ci restringiamo così all'analisi delle rappresentazioni irriducibili "scalari" a energia positiva: esse si distinguono tra loro per il diverso valore della massa m.

Poiché il nostro scopo è costruire una rappresentazione irriducibile *unitaria* nello spazio di Hilbert delle funzioni $\varphi(\vec{p})$, occorrre introdurre una metrica, e quindi un prodotto scalare che induce la metrica stessa. Due definizioni del prodotto scalare sono di uso frequente:

$$1. \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int d\vec{p}\, \varphi_1(\vec{p})\, \varphi_1^*(\vec{p})$$

$$2. \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \int \frac{d\vec{p}}{p^0}\, \varphi_2(\vec{p})\, \varphi_2^*(\vec{p}).$$

Queste due scelte per il prodotto scalare corrispondono a due rappresentazioni diverse ma equivalenti: le funzioni corrispondenti vengono indicate con φ_1 e φ_2 rispettivamente.

La prima scelta ha il vantaggio di consentire per φ_1 l'interpretazione come funzione d'onda nello spazio degli impulsi; la seconda scelta fornisce una metrica relativisticamente invariante a vista: le φ_2 sono cioè degli *scalari.* La relazione tra φ_1 e φ_2 è la seguente:

$$\varphi_2 = \sqrt{p^0}\,\varphi_1.$$

Cerchiamo ora la rappresentazione dei generatori del gruppo di Poincaré nelle rappresentazioni 1 e 2.

Iniziamo con la 2. La rappresentazione degli operatori di traslazione (quadridimensionali) e di rotazione (tridimensionale) è ovvia:

$$P^\lambda \mapsto p^\lambda \qquad \vec{J} \mapsto \vec{x} \times \vec{p}$$

con

$$J^i = \varepsilon^{ijk} M^{jk} = \varepsilon^{ijk} M_{jk}$$
$$\vec{x} = i\vec{\nabla}_p$$

Per i generatori $K^i = M_{i0}$, si ha:

$$\vec{K} \mapsto p^0\,\vec{x}.$$

Ciò si può facilmente verificare tenendo presente che φ_2 è scalare per trasformazioni di Lorentz, cioè

$$\varphi_2'(L\vec{p}) = \varphi_2(\vec{p})$$

oppure

$$\varphi_2'(\vec{p}) = \varphi_2(L^{-1}\vec{p}).$$

Sviluppando $\varphi_2'(\vec{p})$ con l'introduzione del generatore infinitesimo $\vec{K}$ e del parametro velocità $\vec{v}$ relativo alla trasformazione di Lorentz L si ha

$$\varphi_2'(\vec{p}) = (1 + i\,\vec{v}\cdot\vec{K})\,\varphi_2(\vec{p}).$$

D'altra parte l'effetto della trasformazione di Lorentz L sul vettore $\vec{p}$ è, limitandosi al primo ordine nel parametro $\vec{v}$:

$$L\vec{p} = \vec{p} + \vec{v}\,p^0$$

e

$$L^{-1}\vec{p} = \vec{p} - \vec{v}\,p^0.$$

Di conseguenza $\varphi_2(L^{-1}\vec{p})$, sviluppato in serie fino al primo ordine fornisce:

$$\varphi_2(L^{-1}\vec{p}) = \varphi_2(\vec{p}) - \vec{v}\,p^0\,\vec{\nabla}_p\varphi_2(\vec{p}).$$

Ne segue $i\vec{K} = -p^0\vec{\nabla}_p$; $\vec{K} = p^0\vec{x}$, come volevasi.

Si può anche verificare che $p^0\vec{x}$ soddisfa le relazioni di commutazione per $\mathcal{P}_+^\uparrow$; le relazioni di commutazione però non bastano a determinare la forma esplicita di $\vec{K}$ nella rappresentazione; infatti è facile provare che anche $V(|\vec{p}|)\, p^0\vec{x}\, V^{-1}(|\vec{p}|)$ soddisfa le relazioni di commutazione di $\vec{K}$, con V funzione arbitraria del modulo di $\vec{p}$. La forma esplicita dell'operatore dipende essenzialmente dalla metrica adottata: nel caso sopra trattato la forma esplicita di $\vec{K}$ si è trovata sfruttando la proprietà che le φ_2 siano scalari per trasformazioni di Lorentz; ma tale proprietà, come si è già detto, vale solamente con la scelta della metrica 2.

Si osservi ancora che $p^0\vec{x}$ è hermitiano nella metrica 2: la condizione di hermiticità per un operatore si esprime:

$$A^+\eta = \eta A$$

con η operatore della metrica, nel nostro caso $\eta = 1/p^0$. Si ha infatti:

$$\left(p^0\vec{x}\right)^+ \frac{1}{p^0} = \vec{x} = \frac{1}{p^0}\left(p^0\vec{x}\right).$$

Esaminiamo ora le rappresentazioni con metrica 1. La rappresentazione degli operatori P^λ è evidentemente ancora la stessa:

$$P^\lambda \mapsto p^\lambda.$$

Anche la rappresentazione degli operatori $\vec{J}$ è la stessa poiché p^0 commuta con $\vec{J}$, essendo invariante per rotazioni. Per quanto riguarda l'operatore $\vec{K}$, che in 2. era rappresentato da $p^0\vec{x}$, è immediato che la sua rappresentazione in 1. è

$$\frac{1}{\sqrt{p^0}}\, p^0\vec{x}\,\sqrt{p^0} = \sqrt{p^0}\,\vec{x}\,\sqrt{p^0},$$

che si può anche scrivere, tenedo conto che $\vec{x} = i\,\vec{\nabla}_p$,

$$\vec{K} \mapsto \tfrac{1}{2}\,(p^0\vec{x} + \vec{x}\,p^0). \tag{6–9}$$

Rappresentazioni sulle funzioni delle coordinate

È pure interessante considerare rappresentazioni nello spazio delle coordinate, cioè definite su spazi di Hilbert di funzioni delle coordinate; ciò si può ottenere considerando "trasformate di Fourier" delle funzioni $\varphi_1(\vec{p})$ e $\varphi_2(\vec{p})$.

Per le funzioni dipendenti dalle coordinate possiamo operare diverse scelte: definiamo in primo luogo

$$\psi_1(x) = (2\pi)^{-3/2}\!\int\! d\vec{p}\; e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - p^0 t)}\varphi_1(\vec{p}).$$

$\psi_1(x)$ è cioè esattamente la trasformata di Fourier della $\varphi_1(\vec{p})$.

Conviene pensare che la $\psi_1(x)$ dipenda anche dal tempo. Poiché $\psi_1(x)$ dipende così da quattro coordinate mentre $\varphi_1(\vec{p})$ da tre, la rappresentazione mediante le $\psi_1(x)$ è sovrabbondante: ci si attende cioè che le $\psi_1(x)$ soddisfino una relazione in modo che la sovrabbondanza sia eliminata.

In effetti, le $\psi_1(x)$ obbediscono all'equazione di Klein–Gordon:

$$(\Box - m^2)\psi_1(x) = 0. \tag{6–10}$$

È anche facile provare che, dall'avere scelto $\varepsilon = 1$ per le funzioni $\varphi_1(\vec{p})$ segue che le corrispondenti trasformate $\psi_1(x)$ sono soluzioni a frequenza positiva dell'equazione di Klein–Gordon, cioè soddisfano la

$$i\,\dot{\psi}_1(x) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\,\psi_1(x). \tag{6–11}$$

Le equazioni (6–10), (6–11) proiettano lo spazio delle funzioni $\psi_1(x)$ sui sottospazi irriducibili rispetto a $\mathcal{P}_+^\uparrow$, poiché fissano rispettivamente il valore della massa e del segno dell'energia $\varepsilon = 1$.

I generatori nella rappresentazione delle funzioni $\psi_1(x)$ sono evidentemente gli operatori trasformati di Fourier degli operatori nella rappresentazione delle $\varphi_1(\vec{p})$; otteniamo allora

$$\begin{aligned} P^\lambda &\mapsto i\,\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \\ \vec{J} &\mapsto \vec{x}\times\vec{p} \qquad \vec{p} = -i\,\vec{\nabla}_x. \end{aligned}$$

Per $\vec{K}$ otterremo:

$$\vec{K} \mapsto \tfrac{1}{2}(\vec{x}\,p^0 + p^0\vec{x}) \qquad p^0 = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}.$$

Tale rappresentazione di $\vec{K}$ sarebbe corretta se la $\psi_1(x)$ fosse indipendente dal tempo; al termine $\frac{1}{2}(\vec{x}\,p^0 + p^0\vec{x})$ è necessario aggiungere un ulteriore termine, in modo che la rappresentazione del generatore che ne risulta descriva trasformazioni rispetto alle quali l'equazione (6–11) sia invariante. Con tale prescrizione per il termine addizionale, si trova che esso è $-\vec{p}\,t$.

La forma corretta per $\vec{K}$ è allora:

$$\vec{K} \mapsto \tfrac{1}{2}(\vec{x}\,p^0 + p^0\vec{x}) - \vec{p}\,t. \tag{6–12}$$

In questa rappresentazione compaiono operatori *non locali* come p^0, a causa della $\sqrt{\ }$. Dall'altra parte, poiché le $\varphi_1(\vec{p})$ sono funzioni d'onda nello spazio degli impulsi, le $\psi_1(x)$, che per definizione sono esattamente le corrispondenti trasformate di Fourier, sono le funzioni d'onda nello spazio delle variabili coniugate.

Da questo risultato e dal fatto che le $\vec{x}$ in questa rappresentazione corrispondono a operatori hermitiani, segue che le $\vec{x}$ possono venir interpretate correttamente come operatori di posizione. Si vede allora per quanto si è detto sopra, che le funzioni d'onda delle variabili di posizione non si trasformano localmente.

Possiamo poi definire

$$\psi_2(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d\vec{p}}{p^0}\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - p^0 t)} \varphi_2(\vec{p}).$$

In questo modo otteniamo una rappresentazione in cui le funzioni d'onda ψ_2 sono degli scalari (grazie alla presenza dell'elemento di volume invariante $d\vec{p}/p^0$ nell'integrale). La funzioni $\psi_2(x)$ soddisfano la (6–10) e, per energie positive, la (6–11). Mentre la forma per gli operatori P^λ e $\vec{J}$ è la stessa che per la rappresentazione delle funzioni $\psi_1(x)$, l'operatore $\vec{K}$ è rappresentato da

$$\vec{x}\, p^0 - \vec{p}\, t,$$

come si può facilmente provare tenendo conto che le $\psi_2(x)$ sono degli scalari per trasformazioni di Lorentz, con un ragionamento analogo a quello seguito per $\varphi_2(\vec{p})$.

Allo stesso risultato si può arrivare introducendo delle funzioni $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(\vec{p}) = \varphi_2(\vec{p})/p^0;$$

ψ_2 risulta allora la trasformata di $\tilde{\varphi}(\vec{p})$. Poiché nella rappresentazione $\tilde{\varphi}$ l'operatore $\vec{K}$ ha la forma

$$\frac{1}{p^0}\, p^0 \vec{x}\, p^0 = \vec{x}\, p^0$$

nella rappresentazione ψ_2 l'operatore $\vec{K}$ sarà il corrispondente operatore trasformato, cioè $\vec{x}\, p^0$, con $p^0 = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}$. Al termine $\vec{x}\, p^0$, corretto solo nel caso che $\psi_2(x)$ sia indipendente dal tempo, bisogna aggiungere il termine $-\vec{p}\, t$, analogamente al caso di $\psi_1(x)$.

Per l'espressione della metrica nella rappresentazione $\tilde{\varphi}$ si ha subito:

$$\int \frac{d\vec{p}}{p^0}\, \varphi_2^* \varphi_2 = \int d\vec{p}\, \tilde{\varphi}^* p^0 \tilde{\varphi};$$

la trasformata di Fourier fornisce allora l'espressione della metrica nella rappresentazione $\psi_2(x)$, cioè

$$\int d\vec{x}\, \psi_2^* p^0 \psi_2.$$

Tenendo conto del fatto che $p^0 \psi_2 = i\, \dot{\psi}_2$ e $\psi_2^* p^0 = -i\, \dot{\psi}_2^*$, l'espressione della metrica si può scrivere nella familiare forma

$$\frac{i}{2} \int d\vec{x}\, (\psi_2^* \dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_2^* \psi_2).$$

ψ_2 può essere definita ancora come

$$\psi_2(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{p^0}}\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-p^0 t)}\varphi_1(\vec{p}).$$

In questo modo $\psi_2(x)$ è espressa in termini delle φ_1, che come sappiamo sono interpretabili come densità di probabilità nello spazio degli impulsi.

Esercizio: Si considerino le funzioni ψ_3, definite da

$$\psi_3(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\vec{p}\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-p^0 t)}\varphi_1(\vec{p}).$$

Si determini la forma dei generatori in tale rappresentazione, e si dimostri la seguente proprietà: se ψ_3 è una funzione tale che

$$\psi_3(\vec{x},0) = \delta(\vec{x})$$

allora anche la funzione ψ_3' ottenuta applicando a ψ_3 un'arbitraria trasformazione di Lorentz, soddisfa la

$$\psi_3'(\vec{x},0) = \delta(\vec{x}).$$

Soluzione: La forma degli operatori di traslazione e rotazione è ancora la stessa che per le rappresentazioni delle funzioni ψ_1 e ψ_2; l'operatore $\vec{K}$ è rappresentato dall'operatore trasformato di Fourier dell'operatore $p^0\vec{x}$ (corrispondente a $\vec{K}$ nella rappresentazione φ_2). $\vec{K}$ è dunque rappresentato da $p^0\vec{x}$, con $p^0 = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}$: anche in questo caso questo risultato è corretto solo se ψ_3 è indipendente dal tempo; nel caso generale si ha

$$\vec{K} \mapsto p^0\vec{x} - \vec{p}\,t,$$

richiedendo anche in questo caso l'invarianza dell'equazione (6–11).

Per quanto riguarda la proprietà suesposta, dall'ipotesi $\psi_3(\vec{x},0) = \delta(\vec{x})$ segue che la funzione $\varphi_2(\vec{p})$ corrispondente è una costante, e precisamente $\varphi_2(\vec{p}) = (2\pi)^{-3/2}$.

La funzione $\psi_3'(\vec{x},0)$ si ottiene d'altra parte prendendo la trasformata di Fourier di $\varphi_2'(\vec{p})$; poiché le φ_2 sono scalari, $\varphi_2'(\vec{p}) = \varphi_2(L^{-1}\vec{p})$, ma essendo

$$\varphi_2(\vec{p}) = \text{cost.} = (2\pi)^{-3/2},$$

segue che $\varphi_2'(\vec{p}) = (2\pi)^{-3/2}$, e quindi $\psi_3'(\vec{x},0) = \delta(\vec{x})$, come volevasi.

Rappresentazioni a spin diverso da zero

Passiamo ora allo studio delle rappresentazioni a spin diverso da zero: per quanto si è detto più sopra, le funzioni della rappresentazione sono a $2s + 1$ componenti:

$$\varphi_l(\vec{p}), \quad l = s, s-1, \ldots, -s.$$

Anche in questo caso in analogia con la metrica

$$\int \varphi_2^*(\vec{p})\, \varphi_2(\vec{p})\, \frac{d\vec{p}}{p^0}$$

possiamo introdurre una metrica nel seguente modo

$$\int \varphi_j^*(\vec{p})\, \varphi_j(\vec{p})\, \frac{d\vec{p}}{p^0}. \tag{6–12}$$

A questo punto può sorgere il dubbio che tale metrica non sia invariante a vista: lo sarebbe banalmente se l'elicità fosse invariante, poiché l'integrale si ridurrebbe a una somma di termini ciascuno di quali invariante a vista; poiché però l'elicità non è invariante, cioè in generale *non vale* la $\varphi_j(\vec{p}\,') = \varphi_j(\vec{p})$, occorre chiedersi anzitutto come si trasforma lo spin per trasformazioni di Lorentz.

Senza seguire una via del tutto rigorosa possiamo renderci conto che lo spin per trasformazioni di Lorentz subisce solamente una rotazione. Dato infatti un riferimento R, per definire lo spin in tale riferimento è necessario con una trasformazione di Lorentz η^0 portarsi nel sistema del baricentro R^0, e considerare il momento angolare in tale sistema R^0.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \overset{\eta^0}{\rightarrow} & \mathrm{R}^0 \\ \eta'\downarrow & \nearrow\bar{\eta} & \\ \mathrm{R}' & & \end{array}$$

Se ora passiamo dal sistema R al sistema R' mediante una trasformazione di Lorentz η', lo spin in R' può essere definito passando con una terza trasformazione di Lorentz $\bar{\eta}$ nuovamente al sistema del baricentro R^0. Abbiamo così un "ciclo" di trasformazioni di Lorentz $\bar{\eta}\eta'{\eta^0}^{-1}$ che inizia e termina in R^0, e da noti risultati della teoria delle trasformazioni di Lorentz, l'effetto di un tale ciclo su un vettore si riduce a una pura rotazione, dipendente dalle trasformazioni del ciclo stesso. Lo spin in R' differisce dunque dallo spin in R per una pura rotazione, cioè

$$\vec{S} \mapsto e^{i\vec{\varrho}\cdot\vec{S}}\,\vec{S}\,e^{-i\vec{\varrho}\cdot\vec{S}},$$

e

$$\varphi'_j(\vec{p}') = \varphi_k(\vec{p}) D^s{}_{kj}(\vec{p}).$$

Le matrici D^s dipendono dalla trasformazione di Lorentz e pertanto non formano gruppo, l'indice ^{s} si riferisce allo spin del sistema. Poiché le D, che corrispondono a rotazioni, si possono scegliere *unitarie*, cioè $D^*_{jk} D_{jr} = \delta_{kr}$, la metrica (6–12) è effettivamente invariante a vista.