Cap. 13 – Proprietà dell'algebra dei polinomi $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; irriducibilità

Irriducibilità di un'algebra di operatori

Riprenderemo in questo capitolo l'algebra dei polinomi $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, definita a pag. 11–3, e ne illustreremo ulteriori proprietà.

L'algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ non è in generale irriducibile, nel senso illustrato a pag. 8–5; va notato esplicitamente che l'irriducibilità di un'algebra $\mathcal{A}$ di operatori garantisce che se due operatori A, B sono tali che

$$[A, Q] = C(Q) = [B, Q] \quad \forall Q \in \mathcal{A}$$

allora essi differiscono per una costante; in altre parole l'irriducibilità assicura l'uguaglianza (a meno di una costante) di due operatori a partire dall'uguaglianza delle loro relazioni di commutazione con l'algebra $\mathcal{A}$.

Riducibilità di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ se $\mathcal{O}' \neq \emptyset$

Ricordiamo ora un'altra proprietà di carattere generale, e cioè che un'algebra $\mathcal{A}$ di operatori limitati, definiti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, è irriducibile se e solo se ogni vettore di $\mathcal{H}$ è ciclico. Tale proprietà non è in generale vera per operatori non limitati.

Osserviamo che l'algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ è riducibile se $\mathcal{O}' \neq \emptyset$. Per giustificare questa affermazione basta osservare che se $\mathcal{O}' \neq \emptyset$, ogni operatore di $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ commuta con ogni operatore di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.

Irriducibilità di $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}),\, E_0\}$

Si può ora dimostrare che *l'insieme* $\{\mathcal{P}(\mathcal{O}), E_0\}$, *con* E_0 *proiettore sullo stato di vuoto, è irriducibile.*

Sia C limitato, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$: per provare il teorema basta mostrare che

$$CE_0 = E_0 C, \qquad CP = PC \quad \forall P$$

implicano $C = c$, con c numero complesso. Infatti [1]:

$$CP\,\Omega = PC\,\Omega = PCE_0\,\Omega = PE_0C\,\Omega = P\,\Omega\,(\Omega, C\,\Omega).$$

Si deduce allora che $P\,\Omega$ è autovettore di C allo stesso autovalore $(\Omega, C\,\Omega)$ per ogni P di $\mathcal{P}(\mathcal{O})$; poiché $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{O})} = \mathcal{H}$ (per il teorema di Reeh–Schlieder) e C

[1] La dimostrazione è stata abbreviata; in realtà bisognerebbe provare che $PC\,\Omega$ effettivamente esiste. Il risultato è tuttavia corretto (cfr. [14], pag. 140).

è continuo, segue che C ha per autovettori tutti i vettori di $\mathcal{H}$ allo stesso autovalore, e quindi $C = c$. ■

Irriducibilità di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$

La proprietà dimostrata più sopra, secondo la quale $\mathcal{O}' \neq \emptyset$ garantisce che $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ è riducibile, non ha una proprietà "inversa": più precisamente non è stato dimostrato che $\mathcal{O}' = \emptyset$ implichi $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ irriducibile.

Proveremo invece un teorema più debole, e precisamente dimostreremo che $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ è irriducibile. Tale teorema non è una conseguenza del teorema precedente, poiché $E_0 \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$; la sua importanza dal punto di vista fisico è notevole, poiché $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ è l'algebra degli operatori di campo in una teoria alla Wightman.

Dimostrazione: Sia

$$CP = PC \quad \forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4).$$

Dobbiamo provare che $C = c$. Dall'ipotesi segue immediatamente:

$$(\Omega, CP\,\Omega) = (\Omega, PC\,\Omega). \tag{13–1}$$

Inoltre:

$$(\Omega, CE_0P\,\Omega) = (\Omega, C\,\Omega)\,(\Omega, P\,\Omega) = (\Omega, PE_0C\,\Omega). \tag{13–2}$$

La (13–1), essendo $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$, vale anche con $P \mapsto P_x = U_x\,P\,U_x^{-1}$ (con $U_x = U(x,1)$). La (13–1) si scrive allora nella forma:

$$(\Omega, CU_x\,P\,\Omega) = (\Omega, PU_x^{+}C\,\Omega). \tag{13–1$'$}$$

Sfruttando la proprietà di decomposizione spettrale per gli operatori unitari U_x, U_x^+ si ottiene [1]:

$$\int (\Omega, C\,dE(p)\,P\,\Omega)\,e^{ipx} = \int (\Omega, P\,dE(p)\,C\,\Omega)\,e^{-ipx}$$

e quindi con un cambiamento di variabile d'integrazione al secondo membro:

$$\int (\Omega, C\,dE(p)\,P\,\Omega)\,e^{ipx} = \int (\Omega, P\,dE(-p)\,C\,\Omega)\,e^{ipx}.$$

Poiché le espressioni nei due membri della (13–1$'$) sono distribuzioni temperate, dalla loro uguaglianza segue l'uguaglianza delle trasformate di Fourier, cioè

$$(\Omega, C\,dE(p)\,P\,\Omega) = (\Omega, P\,dE(-p)\,C\,\Omega)$$

[1] Si noti che entrambi gli integrali si possono estendere a tutto $\mathbb{R}^4$: la condizione spettrale resta sottintesa come prescrizione sugli operatori di proiezione stabilita dal III Assioma (pag. 8–2).

per ogni p. Possiamo quindi eseguire l'integrazione dell'ultima relazione ottenuta, che è valida per ogni p, su una regione arbitraria, ad esempio $\bar{V}^+$, ottenendo

$$\int_{\bar{V}^+} (\Omega, C\, dE(p)\, P\,\Omega) = \int_{\bar{V}^+} (\Omega, P\, dE(-p)\, C\,\Omega). \tag{13–3}$$

Per la condizione spettrale, il primo membro fornisce semplicemente $(\Omega, CP\,\Omega)$; al secondo membro dà contributo solo l'origine dello spazio p, che corrisponde all'unico stato a impulso nullo, cioè il vuoto. Si ottiene così

$$(\Omega, CP\,\Omega) = (\Omega, PE_0C\,\Omega). \tag{13–4}$$

In virtù della (13–2) possiamo scrivere allora:

$$(\Omega, CP\,\Omega) = (\Omega, CE_0P\,\Omega)$$

e introducendo il proiettore sugli stati ortogonali al vuoto $E_1 = I - E_0$:

$$(\Omega, CE_1P\,\Omega) = 0 \quad \text{ovvero} \quad (C^+\Omega, E_1P\,\Omega) = 0.$$

$C^+\,\Omega$ risulta dunque ortogonale a ogni vettore ortogonale al vuoto, e pertanto $C^+\,\Omega = c^*\,\Omega$, con c numero complesso.

Inoltre, poiché $C^+P\,\Omega = PC^+\,\Omega = c^*P\,\Omega$, ogni vettore $P\,\Omega$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ è autovettore di C con lo stesso autovalore c^*, cioè $C^+ = c^*$ e $C = c$, come si voleva. ∎

Unicità e ciclicità del vuoto e irriducibilità della teoria

È importante osservare che in questa dimostrazione abbiamo usato in modo essenziale la ciclicità del vuoto: in particolare nel passaggio dalla (13–3) alla (13–4), quando lo stato a impulso nullo è stato senza ambiguità identificato con lo stesso stato di vuoto.

Rimane così giustificata l'affermazione fatta a pag. 8–5, che una teoria alla Wightman è irriducibile una volta assunto che il vuoto sia unico e ciclico.