CAPITOLO 10

Varietà piatte e curve

Una varietà $\mathcal{M}$ si dice *piatta* se ammette un atlante tale che i coefficienti di connessione sono nulli in ogni punto. Le coordinate definite dalle carte dell'atlante sono *coordinate cartesiane* (non necessariamente ortogonali). Una varietà che non sia piatta si dice *curva.*

All'inizio del capitolo precedente avevamo asserito che in generale il trasporto parallelo di un vettore da un punto A a un punto B *dipende dalla curva* che si segue. La verifica si può fare su un esempio assai semplice: in fig. 10–1, A e B sono due punti sull'equatore di una sfera, posti a 90° tra loro, e prendiamo come vettore da trasportare il vettore tangente $\mathbf{u}$ all'equatore in A. Dato che l'equatore è una geodetica, il risultato è immediato: il vettore trasportato da A *lungo l'arco di equatore* è ancora il vettore tangente in B.

Ma possiamo decidere di eseguire il trasporto seguendo il percorso ANB, dove N è il polo nord, lungo i due archi di meridiano AN e NB, che sono ancora geodetiche, tra loro ortogonali in N. Il vettore $\mathbf{u}$ è ortogonale in A alla geodetica AN (a rigore, al suo vettore tangente) e così rimane dopo il trasporto in N, vista l'invarianza dell'ortogonalità per trasporto parallelo. Si ottiene quindi il vettore tangente in N alla geodetica NB, e questo trasportato in B risulta ortogonale all'equatore. Dunque il trasporto lungo i due cammini AB e ANB ha dato risultati diversi: addirittura due vettori tra loro ortogonali.

Un altro modo per dire che il risultato del trasporto parallelo dipende dalla curva, è che il trasporto parallelo lungo una curva chiusa in generale non riporta al vettore di partenza. Si può dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente perché una varietà sia piatta è che un vettore risulti invariante per trasporto parallelo lungo ogni curva chiusa.*

La deviazione delle geodetiche

Nella nostra discussione iniziale, nel Cap. 2, avevamo collegato la curvatura col comportamento di due geodetiche parallele (eq. (2–1)). Vogliamo ora riprendere il discorso per dare una formulazione coerente coi concetti sviluppati in questo capitolo.

Iniziamo con un semplice risultato di geometria euclidea. In fig. 10–2 i due punti B, C sono equidistanti da A, da parti opposte sulla stessa retta r; lo stesso vale per B′, C′ rispetto ad A′ sulla retta r'. Dalle relazioni, valide per i segmenti orientati:

$$\mathrm{BA} + \mathrm{AA}' = \mathrm{BB}' + \mathrm{B}'\mathrm{A}' \qquad \mathrm{AC} + \mathrm{CC}' = \mathrm{AA}' + \mathrm{A}'\mathrm{C}'$$

posto

$$\mathrm{BA} = \mathrm{AC} = \mathbf{u}, \quad \mathrm{B'A'} = \mathrm{A'C'} = \mathbf{u'}$$
$$\mathrm{AA'} = \mathbf{v}, \quad \mathrm{BB'} = \mathbf{v'}, \quad \mathrm{CC'} = \mathbf{v''}$$

si ha

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v'} + \mathbf{u'} \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v''} = \mathbf{v} + \mathbf{u'}$$
$$\mathbf{v'} + \mathbf{v''} - 2\mathbf{v} = 0 \tag{10–1}$$

(Si noti che sebbene la figura sia tracciata in un piano, la (10–1) vale anche se le due rette sono sghembe, e quindi in uno spazio euclideo di dimensione qualsiasi.)

In uno spazio euclideo le rette sono geodetiche, e la (10–1) mostra che la separazione fra due geodetiche qualsiasi in generale non resta costante, ma *varia linearmente*: infatti la (10–1) si può anche scrivere $\mathbf{v} - \mathbf{v'} = \mathbf{v''} - \mathbf{v}$.

Se volessimo trasportare il ragionamento a una varietà curva, verrebbe naturale sostituire alle rette r, r' due geodetiche, di cui $\mathbf{u}$, $\mathbf{u'}$ sono i vettori tangenti. Dovremmo poi interpretare $\mathbf{v}$ come un campo vettoriale, gli archi AA′, BB′, CC′ come geodetiche che hanno $\mathbf{v}$ come vettore tangente in A, B, C, e intendere con $\mathbf{v'}$, $\mathbf{v''}$ non i valori di $\mathbf{v}$ in B, C, bensì i risultati del trasporto parallelo in A (fig. 10–2). Allora la (10–1) sarebbe da interpretare, a meno d'infinitesimi, come la condizione

$$\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 0. \tag{10–2}$$

Nota: A rigore ci sarebbe da porre una condizione sui vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, perché il ragionamento fili. Per semplicità evitiamo di toccarla, e ci limitiamo a questo avviso.

Il tensore di Riemann

Se andiamo a calcolare il primo membro della (10–2), o meglio le sue componenti in un certo SC, troviamo che esso assume la forma

$$u^\beta (u^\gamma v^\alpha{}_{;\gamma})_{;\beta} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, u^\beta u^\gamma v^\delta \tag{10–3}$$

dove $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ è una complicata espressione costruita coi coefficienti di connessione e con le loro derivate prime:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\varrho}\Gamma^\varrho{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\varrho}\Gamma^\varrho{}_{\beta\gamma}. \tag{10–4}$$

Dunque la *deviazione delle geodetiche* di vettore tangente $\mathbf{u}$ e con separazione $\mathbf{v}$ è un vettore funzione di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ costruito mediante il *tensore di Riemann* $\mathbf{R}$ le cui componenti sono date dalla (10–4).

Osservazione 1: Non è evidente che la (10–4) definisca un tensore, visto che i coefficienti di connessione non lo sono. Evitiamo la dimostrazione.

Osservazione 2: Se si lavora in coordinate normali i coefficienti di connessione si annullano, e la (10–4) si semplifica:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta}.$$

Sebbene i Γ siano nulli, non lo sono anche le loro derivate: se così fosse, avremmo $\mathbf{R} = 0$, indipendentemente dalle coordinate scelte.

Si può dare come definizione di varietà piatta quella in cui la deviazione dalla linearità è sempre nulla, il che richiede ovviamente $\mathbf{R} = 0$. La condizione è anche sufficiente, per cui *l'annullarsi del tensore di Riemann caratterizza le varietà piatte*. Allo stesso tempo, le componenti di $\mathbf{R}$ danno una misura della curvatura. Abbiamo così trovata una giustificazione della notazione usata nel Cap. 2 (equazione 2–2)).

Resterebbe da collegare le due definizioni che abbiamo date di varietà piatta:

a) l'esistenza di un SC in cui si annullano i coefficienti di connessione

b) l'annullarsi del tensore di Riemann.

Che *a*) implichi *b*) è ovvio: basta guardare la (10–4). (Si noti che se le componenti di $\mathbf{R}$ si annullano in un SC, si annullano in tutti, trattandosi di un tensore, anche se ciò non accade invece per i Γ.) Il viceversa è meno ovvio e non lo dimostriamo.

Contrazioni del tensore di Riemann; il tensore di Einstein

Il tensore di Riemann gode di una ricca simmetria, che fa sì che il numero di componenti indipendenti sia assai minore di quello che avrebbe un tensore generico. È ovvia dalla (10–4) l'antisimmetria negli ultimi due indici, ma ci sono altre simmetrie meno evidenti e che andrebbero dimostrate, cosa che non faremo. Indichiamo solo, perché ci sarà utile più avanti, che se si scrive $\mathbf{R}$ con tutte componenti covarianti ($R_{\alpha\beta\gamma\delta}$) esso riesce antisimmetrico amnche nella prima coppia.

Nel caso di una varietà a 4 dimensioni, come lo spazio-tempo, le simmetrie riducono le $4^4 = 256$ componenti a sole 20 indipendenti. Ciò significa comunque che per caratterizzare completamente la curvatura di uno spazio-tempo occorre conoscere ben 20 funzioni del punto; per fortuna i casi di cui dovremo occuparci sono dotati di simmetrie particolari, per cui le componenti indipendenti e non nulle si riducono di molto, come vedremo.

Si definisce $\tilde{\mathbf{R}}$ *tensore di Ricci* come segue:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}.$$

Sfruttando le simmetrie di $\mathbf{R}$, si dimostra che $\tilde{\mathbf{R}}$ è *simmetrico*.

Indicheremo semplicemente con R la traccia del tensore di Ricci, detta anche *curvatura scalare*:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} R_{\mu\varrho\nu\sigma} \tag{10–5}$$

Nella (10–5) abbiamo fatto uso della consueta tecnica di alzare e abbassare gli indici per mezzo del tensore metrico e del suo inverso. Significato e giustificazione di questa tecnica non differiscono in sostanza da quelle che valgono nell'ambito della RR, per cui possiamo evitare di entrare in detttagli.

Useremo la curvatura scalare per definire il *tensore* $\mathbf{G}$ *di Einstein*:

$$\mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{R}} - \tfrac{1}{2} R\, \mathbf{g} \qquad G_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta}. \tag{10–6}$$

Ovviamente anche $\mathbf{G}$ è simmetrico, e ha pertanto solo 10 componenti indipendenti.

La proprietà più importante di $\mathbf{G}$ è che *la sua divergenza è nulla*:

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0,$$

relazione che in componenti si esprime come segue:

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \qquad g^{\mu\nu} G_{\alpha\mu;\nu} = 0$$

La dimostrazione di questa proprietà è tutt'altro che semplice, e dobbiamo quindi limitarci ad asserirla.

Si può anche dimostrare che $\mathbf{G}$ *è l'unico tensore costruito linearmente dal tensore di Riemann che abbia divergenza nulla.*

Possono riuscire utili le espressioni delle componenti del tensore di Einstein per mezzo di quelle del tensore di Riemann:

$$G^0_0 = -(R^{12}{}_{12} + R^{13}{}_{13} + R^{23}{}_{23})$$
$$G^0_1 = R^{02}{}_{12} + R^{03}{}_{13}$$

(le altre si ottengono permutando gli indici).

Le equazioni di Einstein

Abbiamo visto che nelle coordinate di un RIL i coefficienti di connessione sono nulli; dunque in queste coordinate la derivata covariante si riduce a derivata ordinaria, e perciò l'equazione (10–3) della deviazione delle geodetiche si riduce a

$$u^\beta u^\gamma v^\alpha{}_{,\gamma\beta} + u^\beta u^\gamma{}_{,\beta}\, v^\alpha{}_{,\gamma} + u^\beta u^\gamma\, \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma}\, v^\delta = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, u^\beta u^\gamma v^\delta.$$

Nel RIL l'origine delle coordinate spaziali è la geodetica (di tipo tempo) lungo la quale si annullano i Γ. Dunque $u^i = dx^i/d\tau = 0$, mentre $u^0 = dx^0/d\tau = 1$, perché la coordinata temporale coincide col tempo proprio. Ne segue che possiamo semplificare l'equazione:

$$v^\alpha{}_{,00} + \Gamma^\alpha{}_{0\delta,0}\, v^\delta = R^\alpha{}_{00\delta}\, v^\delta.$$

Ma tutti i Γ hanno derivata nulla rispetto a x^0, e si arriva a

$$v^\alpha{}_{,00} = R^\alpha{}_{00\delta}\, v^\delta. \tag{10–7}$$

Consideriamo, nel nostro RIL, oltre al punto materiale inizialmente ($x^0 = 0$) fermo nell'origine ($x^i = 0$) un altro, anch'esso inizialmente fermo ma nel punto $x^i = \xi^i$. Il moto successivo dei due punti seguirà due geodetiche vicine, i cui vettori tangenti (quadrivelocità) hanno entrambi le componenti $(1, 0, 0, 0)$ per $x^0 = 0$. Il campo $\mathbf{v}$ ha dunque allo stesso tempo le componenti $(0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ e la (10–7) si scrive

$$\xi^i{}_{,00} = R^i{}_{00k}\,\xi^k = -R^i{}_{0k0}\,\xi^k \tag{10–8}$$

(nella (10–8) gli indici i, k a secondo membro non possono essere 0 causa l'antisimmetria di $\mathbf{R}$).

La (10–8) è esattamente l'equazione che avevamo scritto nel Cap. 2 per l'accelerazione di marea; allora il simbolo R a secondo membro non aveva un significato preciso, ma ora sappiamo che si tratta veramente del tensore di Riemann. Allora abbiamo anche mostrato che in un pozzo scavato dentro la Terra si trova

$$R^i{}_{0k0} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\,\delta^i_k \tag{10–9}$$

e ne segue

$$\tilde{R}_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha0} = 4\pi\varrho. \tag{10–10}$$

L'idea di base della RG è che la materia determina la curvatura dello spaziotempo: dunque il tensore di Riemann dev'essere determinato dalla distribuzione di materia. Il solo oggetto che esprima la distribuzione di materia è il *tensore energia-impulso* $\mathbf{T}$, che in un RIL ha il solito significato della relatività ristretta. Le proprietà di $\mathbf{T}$ di cui abbiamo bisogno sono:

– è un tensore simmetrico
– la sua divergenza è nulla (come espressione delle leggi di conservazione di energia e impulso)

(rimandiamo al cap. seguente per una discussione più approfondita). Dunque in un RIL avremo $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$; la stessa equazione vale in generale, se la si esprime in termini di derivate covarianti.

La richiesta connessione fra $\mathbf{R}$ e $\mathbf{T}$ può dunque essere fatta solo attraverso il tensore di Einstein, postulando

$$\mathbf{G} = \kappa\,\mathbf{T}, \tag{10–11}$$

dove l'unica arbitrarietà rimasta è la costante κ, che dobbiamo ora determinare.

Dalla definizione di $\mathbf{G}$ si vede che $G^\alpha{}_\alpha = R - 2R = -R$, e perciò la (10–11) richiede $-R = \kappa\,T$ (avendo indicato con T la traccia di $\mathbf{T}$). Allora la stessa (10–11), tenendo conto della definizione (10–6) di $\mathbf{G}$, si scrive

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\,\kappa\,T = \kappa\,T_{\alpha\beta}.$$

In particolare:

$$\tilde{R}_{00} = \kappa\,T_{00} - \tfrac{1}{2}\kappa\,T. \tag{10–12}$$

Per materia non relativistica (piccole velocità, pressioni trascurabili) si ha $T_{00} = \varrho$ e anche $T = \varrho$; sostituendo nella (10–12), e usando la (10–10):

$$4\pi\varrho = \tfrac{1}{2}\kappa\varrho \quad \Rightarrow \quad \kappa = 8\pi.$$

Otteniamo quindi la forma finale delle equazioni di Einstein:

$$\mathbf{G} = 8\pi\,\mathbf{T}. \tag{10–13}$$

Commenti

Le (10–13) sono 10 equazioni nelle 10 incognite $g_{\alpha\beta}$, ma non indipendenti: grazie all'annullarsi della divergenza esistono 4 identità, e perciò le equazioni indipendenti sono soltanto 6. Questo è giusto, perché non si può pretendere che tutte le 10 incognite siano determinate: infatti da una certa soluzione possiamo sempre ottenerne un'altra — avente lo stesso significato fisico —con un'arbitraria trasformazione di coordinate. Poiché le coordinate sono 4, nella soluzione dobbiamo avere 4 funzioni arbitrarie, e questo è proprio quanto accade, grazie alle identità.

Osserviamo che la condizione $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ determina (almeno in parte) la dinamica della materia. Poiché $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ segue dalle (10–13), vediamo che queste implicano anche condizioni sulla dinamica della materia, e non solo sulla geometria dello spazio-tempo.

Se si scrivono esplicitamente le (10–13) calcolando il tensore di Einstein in funzione del tensore metrico, si ottengono per le $g_{\alpha\beta}$ equazioni a derivate parziali di secondo ordine, ma fortemente non lineari: questa è la ragione fondamentale per cui la matematica della relatività generale è complicata, e soluzioni esatte sono note solo in pochi casi (in genere con grande simmetria). Si tratta poi di equazioni *iperboliche*: in questo senso analoghe a quelle dell'elettrodinamica. Una soluzione determinata si ottiene (detto in termini piuttosto imprecisi) fissando la metrica di un'ipersuperficie spaziale e la sua variazione in direzione normale. Si rimanda ad es. a *Gravitation* per un formulazione rigorosa.

Visto che la (10–13) ha anche contenuto dinamico per la materia, non è corretto leggerla come un'equazione in cui $\mathbf{T}$ è dato, e la metrica $\mathbf{g}$ incognita. In generale sono incognite entrambe; è solo nota l'espressione di $\mathbf{T}$ in funzione di grandezze caratteristiche della materia: densità, pressione, eventuali campi... Ne segue che le 10 equazioni (10–13) determinano tanto la metrica (con l'arbitrarietà già detta) quanto l'evoluzione della materia. La questione apparirà più chiara discutendo qualche esempio (stelle, cosmologia ...).

La gravitazione newtoniana come caso limite: moto dei gravi

Ora che abbiamo una precisa formulazione teorica della gravitazione einsteiniana, dobbiamo convincerci che essa riproduce, come caso limite, la teoria di Newton. Il problema va visto sotto due aspetti:

– dal punto di vista *passivo*, occorre mostrare che il moto di un corpo soddisfa, nelle opportune ipotesi, le leggi della meccanica newtoniana
– dal punto di vista *attivo*, che una distribuzione di materia, sempre nelle opportune ipotesi limite, genera un campo gravitazionale newtoniano.

Cominciamo dal primo aspetto. Il moto di un corpo di prova è determinato da una geodetica di tipo tempo, che — nota la metrica — si calcola integrando l'equazione (9–22) delle geodetiche:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \qquad (10\text{–}14)$$

La (10–14) differisce dalla (9–22) solo per l'uso di τ (tempo proprio) al posto del generico parametro affine λ. I coefficienti di connessione che compaiono nella (10–14) sono dati dalla (9–23):

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\, g^{\gamma\mu}\,(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}). \qquad (10\text{–}15)$$

Dobbiamo ora precisare le condizioni limite nelle quali ci aspettiamo di riprodurre la gravitazione newtoniana. Esse sono:

a) *Campo debole*, il che vuol dire che esiste un SC in cui le componenti del tensore metrico differiscono poco da quelle della metrica di Lorentz–Minkowski:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad (10\text{–}16)$$

con $h_{\alpha\beta}$ piccolo.

b) *Moto lento*: le componenti spaziali u^i della 4-velocità sono $\ll 1$ (e di conseguenza $u^0 = 1$ a meno di termini di second'ordine nella velocità).

Per chiarire la condizione *a*), si noti che se le coordinate hanno dimensioni di una lunghezza, le componenti del tensore metrico sono numeri puri; quindi dire $h_{\alpha\beta}$ piccolo vuol dire proprio $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Per esempio se consideriamo la metrica di Schwarzschild per il sistema solare, troviamo che le deviazioni da 1 per g_{tt} e g_{rr} sono $2M/r$, che anche alla superficie del Sole è minore di $5 \cdot 10^{-6}$. Quindi trascurando termini di second'ordine negli h si commette un errore sulla sesta cifra significativa.

Per la condizione *b*) non c'è molto da aggiungere: è la solita condizione dell'approssimazione non relativistica, già usata in RR. Ad es. per la Terra $v/c \simeq 10^{-4}$.

Sostituendo le (10–16) nella (10–15), si vede intanto che tutti i termini con le derivate dipendono soltanto dagli h; di conseguenza si può approssimare $g^{\gamma\mu}$ con $\eta^{\gamma\mu}$ commettendo solo un errore di second'ordine, e si ha

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(h^\gamma{}_{\beta,\alpha} + h^\gamma{}_{\alpha,\beta} - \eta^{\gamma\mu}\,h_{\alpha\beta,\mu}). \qquad (10\text{–}17)$$

(Nella (10–17) gli indici di h vengono portati da covarianti a controvarianti usando η al posto di g, con la solita approssimazione.)

Prendiamo ora in esame l'equazione delle geodetiche (10–14) nell'ipotesi di moto lento: ciò vuol dire che nel secondo termine conta solo $dx^0/d\tau = u^0 = 1$, mentre gli altri addendi della somma su α e β vengono trascurati. Inoltre il tempo proprio coincide (nella stessa approssimazione) con la coordinata $x^0 = t$, e perciò per le componenti spaziali x^i abbiamo:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{00} = 0.$$

Calcolando $\Gamma^i{}_{00}$ dalla (10–17)

$$\Gamma^i{}_{00} = -\tfrac{1}{2}\,\eta^{ij}\,h_{00,j} = \tfrac{1}{2}\,h_{00,i}$$

si arriva a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}.$$

Questa coincide con $\vec{F} = m\vec{a}$ se si prende come potenziale gravitazionale (per unità di massa del corpo di prova) $V = \frac{1}{2}\,h_{00}$, il che è quanto dire

$$g_{00} = 1 + 2V. \qquad (10\text{–}18)$$

La metrica di Schwarzschild, dove $g_{tt} = 1 - 2M/r$, ci fornisce un'immediata verifica del *principio di corrispondenza* espresso dalla (10–18): otteniamo infatti $V = -M/r$, che è proprio l'espressione newtoniana, se ricordiamo che $G = 1$.

L'equazione del potenziale

Vogliamo ora mostrare che nel solito caso limite le equazioni di Einstein si riducono all'equazione per il potenziale gravitazionale newtoniano (equazione di Poisson). A questo scopo partiamo dalla (10–10), che equivale alla componente $_{00}$ delle equazioni di Einstein. Che questo sia vero, lo si capisce ripercorrendo all'indietro il cammino fatto per ricavare dalla (10–10) il valore di κ nella (10–11).

Dobbiamo solo esprimere $\tilde{R}_{00}$ per mezzo del tensore metrico, e a ciò si arriva come segue. Dalla definizione di $\tilde{\mathbf{R}}$ si ha

$$\tilde{R}_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha 0} = R^i{}_{0i0}$$

(α non può essere 0, per l'antisimmetria di $\mathbf{R}$). In secondo luogo, l'espressione (10–4) del tensore di Riemann si semplifica in

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta}$$

perché le Γ sono piccole di prim'ordine in h. Dunque

$$\tilde{R}_{00} = \Gamma^i{}_{00,i} - \Gamma^i{}_{0i,0}. \qquad (10\text{–}19)$$

Se supponiamo che la geometria sia *statica*, le h e quindi anche le Γ non dipendono da x^0, e la (10–19) si riduce a

$$\tilde{R}_{00} = \Gamma^i{}_{00,i}.$$

Basta usare la (10–17) nell'ipotesi di geometria statica per trovare

$$\Gamma^i{}_{00} = \tfrac{1}{2}\, h_{00,i}$$

e quindi

$$\tilde{R}_{00} = \tfrac{1}{2}\, h_{00,ii} = V_{,ii}$$

dove è sottintesa una somma su i. Non resta ora che confrontare con la (10–10), per avere

$$\nabla^2 V = 4\pi\varrho$$

che è l'equazione di Poisson, come ci aspettavamo.

Si potrebbe obiettare che nella gravitazione newtoniana l'equazione di Poisson si assume valida anche nel caso non statico: per es. quando si studia la perturbazione tra i pianeti. Per giustificare l'equazione di Poisson come conseguenza delle equazioni di Einstein anche in condizioni non statiche (purché sempre per moti lenti) occorre un argomento un po' più complesso, che qui preferiamo non affrontare.