CAPITOLO 16

Gli spazi a curvatura costante

Abbiamo già incontrato nel Cap. 13 la metrica

$$d\tau^2 = R^2 \Bigl(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\Bigr).$$

Questo capitolo è dedicato a studiarla a fondo; anzi ne studieremo una generalizzazione:

$$d\tau^2 = R^2 \Bigl(d\eta^2 - d\chi^2 - \Sigma^2 \bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\bigr)\Bigr). \qquad (16\text{–}1)$$

dove

$$R = R(\eta), \qquad \Sigma = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \chi & (1) \\ \sin\chi & (2) \\ \sinh\chi & (3). \end{cases}$$

Supporremo, almeno per ora, $\eta \in \mathbb{R}^+$; ϑ e φ come al solito. Quanto a χ, nei sottocasi (1) e (3) avremo $\chi \in \mathbb{R}^+$, mentre nel sottocaso (2) si pone $\chi \in [0, \pi]$.

La geometria dello spazio-tempo descritta dalla (16–1) si chiama *geometria di Robertson–Walker* (R–W). Come vedremo nel seguito, la sua applicazione più inportante sta nei *modelli cosmologici.* Questo fatto verrà occasionalmente richiamato, ma per il momento vogliamo interessarci soprattutto delle proprietà fisiche dello spazio-tempo così definito, guardando soltanto l'espressione della metrica (16–1).

Abbiamo distinto i tre sottocasi (1), (2), (3) per ragioni che saranno chiare in seguito. In tutti possiamo dire che η è una coordinata temporale, mentre le altre sono spaziali; ne segue che $\eta = \text{cost.}$ individua delle sezioni spaziali, la cui metrica è

$$d\sigma^2 = R^2 \Bigl(d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) \bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\bigr)\Bigr). \qquad (16\text{–}2)$$

Dalla (16–2) si vede che esiste la simmetria sferica (gruppo SO(3) delle rotazioni in ϑ, φ). Non si tratta però in generale di uno spazio euclideo: mentre la lunghezza in direzione χ è data da

$$dl_{\text{rad}} = R \, d\chi,$$

la lunghezza di un cerchio massimo della sfera $\chi = \text{cost.}$ è

$$l_{\text{circ}} = 2\pi R \, \Sigma(\chi)$$

che solo nel sottocaso (1) è quella prevista dalla geometria euclidea. Ci tornerà utile in seguito anche l'espressione dell'elemento di volume:

$$dV = R \, d\chi \cdot R \, \Sigma \, d\vartheta \cdot R \, \Sigma \sin\vartheta \, d\varphi = R^3 \Sigma^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\chi. \qquad (16\text{–}3)$$

Le diverse sezioni spaziali differiscono solo per il valore di R, che appare nella (16–2) come un fattore di scala: passando da una sezione spaziale all'altra, le distanze variano in modo proporzionale a R.

È ovvio che la completa determinazione della metrica richiede la conoscenza della funzione $R(\eta)$, che si ottiene risolvendo le equazioni di Einstein, una volta assegnata la distribuzione e le proprietà fisiche della materia presente. Tuttavia molte cose si possono capire anche lasciando indeterminata $R(\eta)$: nell'applicazione alla cosmologia questa si chiama la *cinematica cosmologica.*

Simmetrie e geodetiche

Vogliamo ora studiare alcune geodetiche semplici, sfruttando le proprietà di simmetria della metrica. Dato che la definizione di geodetica ha carattere intrinseco, possiamo scegliere, a seconda dei casi, il sistema di coordinate che più ci facilita il lavoro.

È chiaro per simmetria che la curva $\chi = 0$ è una geodetica (si noti che per $\chi = 0$ non occorre specificare ϑ e φ); ma vediamone un cenno di dimostrazione. Dato il punto iniziale A di coordinate $(\eta_0, 0, 0, 0)$ e il vettore tangente $\mathbf{u}$ di componenti

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = 1, \qquad \frac{d\chi}{d\lambda} = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$$

la geodetica è determinata univocamente, come abbiamo già visto. Poiché tanto A quanto $\mathbf{u}$ restano invarianti per tutte le rotazioni dello spazio, lo stesso deve accadere per ciascun punto della geodetica, e tale condizione è soddisfatta solo se $\chi = 0$ lungo tutta la curva ($\chi = 0$ è l'unico *punto fisso* del gruppo delle rotazioni).

Sorge allora la domanda: le curve $\chi = \text{cost.} \neq 0$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ sono anch'esse geodetiche? Qui l'argomento basato sulla simmetria SO(3) non si può più usare, ma viene in soccorso la simmetria molto più larga che la metrica (16–1) possiede: non per una $\Sigma(\chi)$ generica, ma solo per quelle indicate.

Cominciamo dal caso (1), che è il più semplice. Poiché le sezioni spaziali sono euclidee, accanto alle rotazioni fanno parte del gruppo di simmetria anche le traslazioni, come si vede passando a coordinate cartesiane:

$$d\tau^2 = R^2 \bigl(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\bigr).$$

Il punto $x = y = z = 0$ nelle sezioni spaziali non è un punto privilegiato; la corrispondente geodetica si trasforma per traslazioni in un'altra, di equazioni $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Il gruppo di simmetria completo ha 6 parametri, ed è il *gruppo euclideo* in 3 dimensioni E_3.

Nel caso (2) la simmetria si rende evidente osservando che le sezioni spaziali sono sottovarietà di un $\mathbb{R}^4$ nelle coordinate cartesiane w, x, y, z che soddisfano l'equazione

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{16–4}$$

Questo si vede con le posizioni

$$\begin{aligned} w &= \cos\chi \\ x &= \sin\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= \sin\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= \sin\chi\,\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{16–5}$$

Si tratta di sfere S^3 (di raggio R e volume $2\pi^2R^3$). Il gruppo di simmetria è dunque SO(4): il gruppo a 6 parametri delle rotazioni in $\mathbb{R}^4$. Il gruppo *agisce transitivamente* sulla sfera: comunque scelti due punti, esiste una rotazione (in realtà sono infinite) che manda il primo nel secondo. Da qui segue di nuovo che tutte le curve con x, y, z costanti (ossia con χ, ϑ, φ costanti) sono geodetiche.

Infine nel caso (3) si procede di nuovo con le coordinate w, x, y, z; ma al posto della (16–4) si deve assumere

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

e occorrono le sostituzioni

$$\begin{aligned} w &= \cosh\chi \\ x &= \sinh\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= \sinh\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= \sinh\chi\,\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Questa volta si tratta di iperboloidi in $\mathbb{R}^4$; (si può ancora parlare di "raggio" R, o più propriamente di "semiasse trasverso," ma il volume è infinito). Il gruppo di simmetria è ancora a 6 parametri, ma è il *gruppo di Lorentz*. Anche in questo caso, per le stesse ragioni del caso precedente, ogni curva $\chi = \text{cost.}$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ è una geodetica.

Libertà nella scelta dell'origine

Quello che accomuna i tre casi è che in tutti ogni punto di una sezione spaziale è equivalente a ogni altro, perché si passa dal primo al secondo mediante un'isometria. Ne segue che le proprietà di curvatura dello spazio sono le stesse in ogni punto: si parla perciò di spazi *a curvatura costante*: nulla nel caso (1), che è euclideo; positiva nel caso (2); negativa nel caso (3).

Attenzione: Non si deve equivocare. Stiamo parlando di curvatura costante delle *sezioni spaziali* fatte a η costante (brevemente *spazio*). Non di curvatura dello spazio-tempo, che non è costante in punti con diverso η.

Ne discende un'utile conseguenza: *ogni punto dello spazio può essere preso come origine delle coordinate* senza che la metrica cambi. Più precisamente, ciò significa si possono assumere nuove coordinate in modo che una qualunque delle geodetiche $\chi = \text{cost.}$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ abbia equazione $\chi = 0$.

Da un punto di vista fisico, il modello di universo così costruito è *omogeneo*, e in particolare la densità di materia, dalla quale dipende la curvatura, dev'essere la stessa in tutti i punti di una sezione spaziale fatta a η costante. Inoltre l'invarianza rispetto al gruppo SO(3) delle rotazioni vale attorno a ogni punto, e questo ci dice che l'universo è anche *isotropo*.

Altre coordinate

Per la geometria di R–W sono in uso altri sistemi di coordinate, che presentano ciascuno dei vantaggi a seconda del problema. Ne descriviamo un paio qui di seguito.

Le geodetiche che abbiamo trovato sopra sono di tipo tempo, e sono perciò possibili linee orarie di punti materiali in caduta libera. Lungo queste geodetiche il tempo proprio è misurato da

$$d\tau = R(\eta)\, d\eta. \qquad (16\text{–}6)$$

Conviene perciò introdurre, in alternativa a η, un'altra coordinata temporale:

$$t = \int R(\eta)\, d\eta \qquad dt = R\, d\eta \qquad (16\text{–}7)$$

ottenendo così per la metrica la forma:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2 \Big(d\chi^2 + \Sigma^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\right)\Big). \qquad (16\text{–}8)$$

La nuova coordinata t viene spesso chiamata *tempo cosmico*, in relazione col fatto di essere il tempo proprio di materia in caduta libera secondo geodetiche radiali. Per distinguere, la coordinata η assume il nome di *tempo conforme*. Il motivo è che la metrica (16–1) nel sottocaso (1) differisce solo per una trasformazione conforme — il fattore moltiplicativo $R(\eta)$ — da quella di uno spazio-tempo piatto.

Se si pone $r = \Sigma(\chi)$, e si mantengono le altre coordinate (t, ϑ, φ) si ottiene

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - R^2 \left(\frac{dr^2}{\Sigma'^2} + r^2\big(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\big)\right) \\ &= dt^2 - R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\big(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\big)\right) \end{aligned}$$

dove $k = 0, 1, -1$ risp. nei casi (1), (2), (3). Si noterà che la coordinata r è simile alla r di Schwarzschild: per es. nel sottocaso (2) le sfere $t = \text{cost.}$, $r = \text{cost.}$ hanno area $4\pi R^2 r^2$.

La propagazione della luce: il redshift cosmologico

Volendo studiare la propagazione della luce, possiamo limitarci alla propagazione "radiale," ossia a ϑ e φ costanti. Per capire questo, basta sfruttare la libertà di scelta dell'origine.

Sia infatti A un punto dello spazio-tempo da cui si farà partire la geodetica di tipo luce: come abbiamo visto, possiamo sempre scegliere le coordinate in modo che in A sia $\chi = 0$. Fatto questo, tutte le direzioni spaziali che escono da A sono radiali, e con le solite considerazioni di simmetria si vede che su una geodetica cha parta da A ($\chi = 0$) variano solo le coordinate η e χ, mentre ϑ e φ restano costanti.

Incidentalmente, questo è vero per qualsiasi geodetica, non solo per quelle di tipo luce. La differenza è che una geodetica di tipo tempo può anche avere $\chi = \text{cost.}$ su tutta la curva (l'abbiamo visto in precedenza) mentre ciò non è possibile per il tipo luce.

Può essere utile considerare in generale su una data geodetica radiale due punti distinti, nessuno dei quali ha $\chi = 0$: porremo quindi un emettitore di luce in $\chi = \chi_{\mathrm{e}}$ e un ricevitore in $\chi = \chi_{\mathrm{r}}$. Diremo η_{e} e η_{r} i valori di η corrispondenti agli eventi di emissione e di ricezione.

Se poniamo nelle (16–1) $d\tau^2 = 0$, e inoltre $d\vartheta = d\varphi = 0$, abbiamo

$$d\eta = \pm d\chi \quad \Rightarrow \quad \eta = \pm\chi + \text{cost.}$$

da cui

$$\eta_{\mathrm{r}} - \eta_{\mathrm{e}} = |\chi_{\mathrm{r}} - \chi_{\mathrm{e}}|.$$

Se sorgente e ricevitore sono fermi (nel senso delle coordinate spaziali usate) per l'emissione di due segnali successivi si ha

$$\Delta\eta_{\mathrm{r}} = \Delta\eta_{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\tau_{\mathrm{r}}}{\Delta\tau_{\mathrm{e}}} = \frac{R_{\mathrm{r}}}{R_{\mathrm{e}}}$$

(per la (16–6)).

Come al solito, se la sorgente emette un'onda monocromatica di lunghezza d'onda λ_{e}, che viene ricevuta come λ_{r}, avremo un effetto di redshift. È tradizionale introdurre il *parametro di redshift* z definito da

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\mathrm{e}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{r}} - \lambda_{\mathrm{e}}}{\lambda_{\mathrm{e}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{\lambda_{\mathrm{e}}} - 1$$

e perciò

$$1 + z = \frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{\lambda_{\mathrm{e}}} = \frac{R_{\mathrm{r}}}{R_{\mathrm{e}}} \qquad z = \frac{R_{\mathrm{r}} - R_{\mathrm{e}}}{R_{\mathrm{e}}}. \tag{16–9}$$

Questo si chiama *redshift cosmologico*, per distinguerlo da quello gravitazionale, e dall'effetto Doppler dovuto ai moti particolari delle sorgenti. S'intende che avremo realmente redshift solo se $R_\mathrm{r} > R_\mathrm{e}$, ossia se R è funzione crescente di η.

È interessante studiare il caso in cui χ_r differisce poco da χ_e, e di conseguenza η_r differisce poco da η_e e z è piccolo:

$$z \simeq \frac{1}{R}\,\frac{dR}{d\eta}\,(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e}) = \frac{dR}{dt}\,|\chi_\mathrm{r} - \chi_\mathrm{e}|$$

(nel secondo passaggio si è usata la (16–7)). La distanza l fra sorgente e ricevitore all'istante di emissione (o a quello di ricezione, a meno di termini del secondo ordine) vale circa $R\,|\chi_\mathrm{r} - \chi_\mathrm{e}|$, e si arriva a

$$z \simeq \frac{1}{R}\,\frac{dR}{dt}\,l = Hl \tag{16–10}$$

dove abbiamo posto

$$H = \frac{\dot{R}}{R}\,. \tag{16–11}$$

Questa è la *legge di Hubble*: *il redshift cosmologico è proporzionale alla distanza della sorgente*. H si chiama *costante di Hubble*. Dal modo come ci siamo arrivati si vede si tratta di un'approssimazione, valida per piccole distanze (piccoli redshift).

Nasce qui un problema per le osservazioni: la legge di Hubble è valida se z è piccolo, ma d'altra parte se è piccolo è difficile misurarlo. Per fortuna esiste un intervallo abbastanza ampio in cui le due condizioni sono entrambe soddisfatte.

Infatti le galassie di un ammasso possono avere velocità — rispetto al centro di massa dell'ammasso — anche di 1000 km/s; a velocità di quest'ordine corrisponde un $\Delta\lambda/\lambda = v/c$ (effetto Doppler) pari a $3 \cdot 10^{-3}$. Occorre dunque andare abbastanza lontano perché questo "rumore" sia piccolo rispetto al redshift cosmologico: diciamo che occorre $z \gtrsim 0.01$, che è ancora $\ll 1$.

La legge di Hubble è nata in realtà dalle osservazioni: intorno al 1930 divenne possibile misurare il redshift della luce proveniente da galassie abbastanza lontane. Oggi sono stati misurati z fino a 10, e in tali casi l'approssimazione certamente non vale, e non basta quanto abbiamo visto fin qui per confrontare la teoria con le osservazioni: occorrono ipotesi sulla dipendenza di R da η (o da t). Ne riparleremo quando ci occuperemo di modelli cosmologici.

Orizzonti

Abbiamo visto che nelle coordinate (η, χ) la legge di propagazione della luce riesce assai semplice:

$$\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e} = |\chi_\mathrm{r} - \chi_\mathrm{e}| \tag{16–11}$$

dove il valore assoluto tiene conto dei due casi possibili: $\chi_\mathrm{r} \gtrless \chi_\mathrm{e}$. Possiamo quindi discutere facilmente il fenomeno degli *orizzonti*.

Chiediamoci in primo luogo: da quali regioni dell'Universo possiamo oggi ricevere segnali? Se facciamo $\chi_{\rm r} = 0$ la (16–11) diventa

$$\chi_{\rm e} = \eta_{\rm r} - \eta_{\rm e}$$

perché in tutti i modelli è sempre $\chi \geq 0$. Inoltre $\eta_{\rm r} = \eta_0$ è dato (corrisponde al tempo presente); se perciò esiste un limite inferiore a η, ad es. $\eta \geq 0$, ne segue un limite superiore per $\chi_{\rm e}$, ossia un *orizzonte degli oggetti* o *delle particelle* (fig. 16–1):

$$\chi_{\rm e} \leq \chi_{\rm p} = \eta_0. \tag{16–12}$$

Si noti che la (16–12) vale per la luce; qualunque altra azione causale sarà trasmessa lungo linee orarie di tipo tempo o al più di tipo luce, e perciò la (16–12) sarà soddisfatta a maggior ragione.

A titolo di esempio, consideriamo il *modello di Friedmann* (la cui origine fisica verrà esaminata più avanti): in questo modello la funzione $R(\eta)$ ha l'espressione

$$R = R_0\,(1 - \cos\eta) \qquad \text{con} \qquad \eta \in [0, 2\pi] \tag{16–13}$$

e la curvatura delle sezioni spaziali è positiva:

$$k = 1, \qquad \Sigma = \sin\chi, \qquad \chi \in [0, \pi].$$

Si vede che R cresce per $\eta < \pi$. Dato che le osservazioni mostrano un redshift cosmologico, al tempo presente siamo appunto in questa fase. Ne segue $\chi_{\rm p} < \pi$, e dunque esiste realmente un orizzonte delle particelle: ci sono regioni dell'Universo che non possono ancora aver influito su quella vicina a noi (e ovviamente viceversa).

Si può anche definire un *orizzonte degli eventi*: gli eventi più lontani, fra quelli che hanno luogo *ora* (ossia con $\eta = \eta_0$) e che potranno mai esser visti da noi. Dato che $\eta \leq 2\pi$, abbiamo

$$\chi_{\rm e} = 2\pi - \eta_0 > \pi;$$

ne segue che per il modello di Friedmann ora non esiste un orizzonte degli eventi. Esso può però esistere in altri modelli.

Il problema dell'isotropia

Riprendiamo il discorso sull'orizzonte delle particelle, dal seguente punto di vista: per η_0 abbastanza piccolo l'orizzonte ha un'estensione spaziale ristretta, e perciò esistono regioni spaziali che non possono essersi influenzate a vicenda (fig. 16–2). Ne segue che a quel tempo non c'è motivo di trovare proprietà fisiche simili in quelle regioni. Invece l'osservazione, attraverso la radiazione di fondo a microonde, mostra una grande omogeneità (l'isotropia della radiazione osservata è migliore di $3 \cdot 10^{-5}$ per angoli fino a 80°). Questo è il *problema dell'isotropia*: uno dei problemi che hanno portato, come tentativo di spiegazione, ai *modelli inflazionari*, di cui qui non possiamo parlare.

Vogliamo invece, a titolo d'esercizio, tradurre in termini quantitativi quanto detto sopra. Il problema s'imposta così: all'epoca attuale ($\eta = \eta_\mathrm{r} = \eta_0$) riceviamo, da tutte le direzioni, radiazione emessa in un'epoca lontana ($\eta = \eta_\mathrm{e}$). Prese due direzioni che formano un angolo α, vogliamo vedere se una delle due regioni può essere stata influenzata dall'altra prima di emettere la radiazione che noi vediamo, ossia per $\eta < \eta_\mathrm{e}$.

Nelle sezioni spaziali dell'Universo abbiamo tre punti importanti: quello R dove siamo noi; quello S che dovrebbe aver influenzato l'altro; infine quest'ultimo, che diremo E. Gli eventi rilevanti si susseguono in questo modo:

– da S parte un segnale che si propaga verso E, dove arriva *prima* che da qui parta, al tempo η_e, la radiazione che arriverà in R al tempo η_r
– successivamente (al tempo η_e) da S parte anche la radiazione che arriva in R, anch'essa al tempo η_r.

Abbiamo quindi il triangolo RSE, del quale sappiamo i seguenti dati:

– i tre lati sono geodetiche dell'ipersfera
– in termini della coordinata χ, i lati SR ed ER valgono $\eta_1 = \eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e}$
– il lato SE vale al più η_e
– l'angolo in R è α.

Vogliamo trovare il massimo di α per dati η_e, η_r.

La soluzione è semplice nel caso $k = 0$ (spazio euclideo): basta guardare la fig. 16–3 per trovare la relazione

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{\eta_\mathrm{e}}{2\,(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e})}. \tag{16–14}$$

Meno ovvio il calcolo nei casi $k = 1$ e $k = -1$, per i quali diamo solo il risultato:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \begin{cases} \dfrac{\sin\eta_\mathrm{e}}{\sin\frac{1}{2}(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e})} & \text{per} \quad k = 1 \\[2ex] \dfrac{\sinh\eta_\mathrm{e}}{\sinh\frac{1}{2}(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e})} & \text{per} \quad k = -1. \end{cases}$$

Sappiamo che η_r è dell'ordine dell'unità, mentre — come vedremo subito — η_e per la radiazione di fondo è piccolo. Dato che siamo interessati solo all'ordine di grandezza, i tre casi non differiscono in modo significativo, e possiamo usare il più semplice, confondendo inoltre nella (16–14) il seno col suo argomento:

$$\alpha \lesssim \eta_\mathrm{e}. \tag{16–15}$$

Resta solo da calcolare η_e. Come vedremo meglio nel cap. che segue, l'approssimazione della (16–13) per η piccoli va bene in tutti i casi, e fornisce $R_\mathrm{e} = \frac{1}{2} R_0 \eta_\mathrm{e}^2$. Dalle (16–8), per $R_\mathrm{r} \gg R_\mathrm{e}$, si ha

$$z \simeq \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} \simeq \frac{R_0}{R_\mathrm{e}} = \frac{2}{\eta_\mathrm{e}^2}$$

e infine, con la (16–15):

$$\alpha \lesssim \sqrt{2/z}.$$

Poiché per la radiazione di fondo $z \gtrsim 10^3$, si arriva a

$$\alpha \lesssim 0.05\,\mathrm{rad} \simeq 3^\circ,$$

che è molto più piccolo del valore osservato.

Aggiungiamo che i dati più recenti (satellite COBE, esperimenti Boomerang e WMAP) hanno mostrato una piccola anisotropia, dell'ordine di 10^{-5}, insufficiente a eliminare il problema.