Problemi di relatività

Il “paradosso delle due astronavi”

Immaginiamo di avere 2 astronavi, A e B, che viaggiano in direzioni opposte ciascuna a 200.000 Km/sec e che passano davanti all'osservatore Q che è fermo rispetto alle astronavi. Dopo un sec entrambe saranno 200.000 Km lontane da Q.

A vedrà Q a 200.000 Km e, siccome Q vede B a 200.000 Km, vedrà B a tale distanza da Q. In totale dopo un sec A vede B a 400.000 Km il ché vuol dire che si è allontanata a una velocità superiore alla luce (300.000 Km/sec).

Commenti

1. Errori banali: è molto frequente vedere scritto “Km” invece di “km”. Inoltre tanti scrivono “sec” invece di “s”.

2. Un errore meno banale: “Q che è fermo rispetto alle astronavi”.

3. Questione delicata di linguaggio: “A vedrà Q”.

Il verbo “vedere” in questi contesti è pericoloso per due ragioni:

a) Suggerisce un aspetto “soggettivo”, come se i “fatti strani” della relatività fossero “apparenze”.

b) Fa pensare che entri in ballo la velocità finita della luce: noi vediamo le cose lontane con un certo ritardo...

Perciò l'uso di “vedere” è da evitare con la massima cura.

4. L'errore centrale è chiaro: senza neppure accorgersene, chi ha scritto quel “paradosso” ha assunto tempo assoluto e spazio assoluto.

Naturalmente ne segue che la velocità di un corpo può superare c.

In effetti è facile dimostrare che *tempo assoluto e velocità della luce invariante sono incompatibili*.

5. Sulla differenza tra “assoluto” e “invariante”.

“Assoluto” (*ab-solutus*) è un termine filosofico: significa “libero”, “privo di legami”, che “non dipende da altro”.

“Invariante” appartiene al linguaggio della fisica (e della matematica): significa “che non cambia sotto una qualche trasformazione”. Nel nostro caso, cambiando il rif.

I

Perciò sarebbe meglio dire “tempo invariante” (o non-invariante), anche se è difficile cambiare l'uso, che abbiamo preso da Newton:

Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata.

Diagrammi *x–t*

Definizione degli eventi:

E_0 – le astronavi s'incontrano in Q

E_1 – questo evento sta sulla linea oraria di Q, dopo un secondo dell'orologio di Q

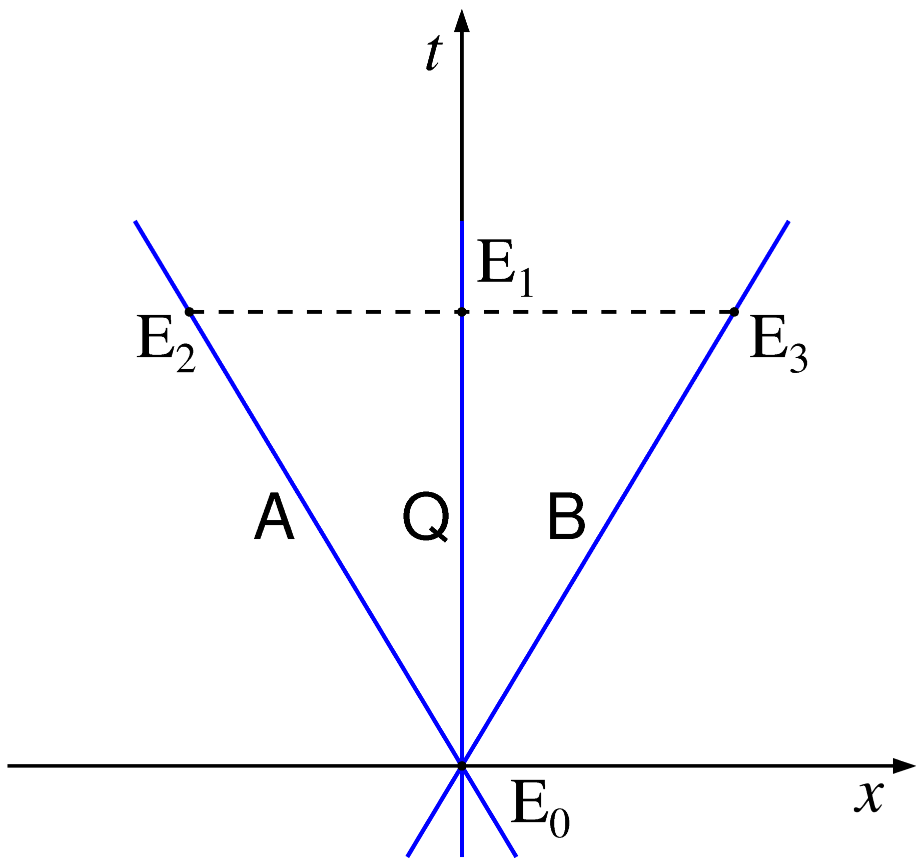
E_2 – sulla linea oraria di A, allo stesso tempo nel rif. solidale a Q

E_3 – come sopra, ma sulla linea oraria di B.

Per i calcoli è più semplice prendere $v = 180000$ km/s, che con $c = 1$ dà

$$v = 3/5, \quad \gamma = 5/4.$$

Il diagramma nel rif. in cui Q è fermo è banale.



t
E1
E2
E3
A
Q
B
E0
x

Il diagramma nel rif. di A (assumendo valida la RR) è meno banale.

Sicuramente A è fermo (retta verticale).

Sicuramente Q ha velocità v (retta obliqua di pendenza nota).

Invece la velocità di B non è nota in partenza; la “composizione relativistica” dà v(B) = 15/17, ma non vogliamo usarla.

Preso ancora E_0 come origine, la posizione di E_2 si ottiene dalla “dilatazione del tempo” (che si ricava dall'invarianza della metrica).

Essendo $\gamma = 5/4$, sarà $t'_2 = 4/5$.

Per la stessa ragione, applicando la dilatazione all'inverso, $t'_1 = 5/4$.

È ovvio (per simmetria) che E_1, E_2, E_3 sono allineati, e che E_1 è il punto medio.

Quindi ecco le coordinate dei 3 eventi:

$$E_1 = (3/4,\ 5/4) \quad E_2 = (0,\ 4/5) \quad E_3 = (3/2,\ 17/10).$$

La velocità di B è

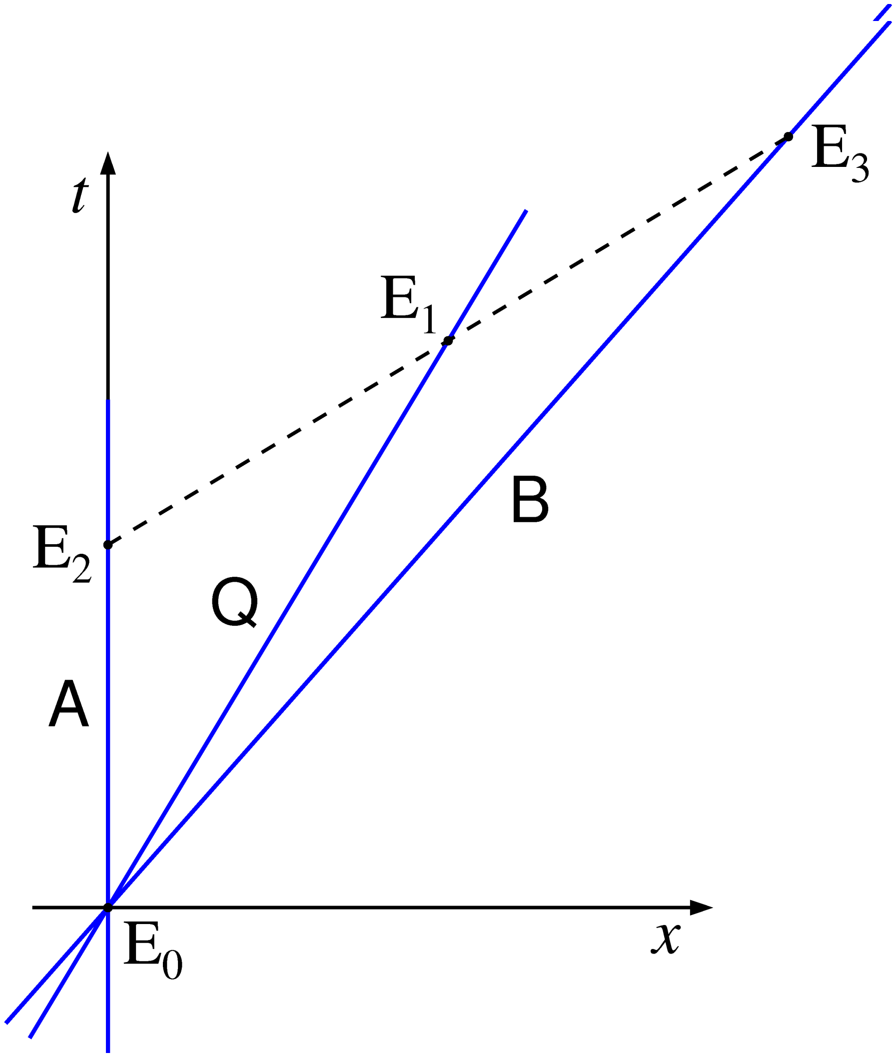
$$v(\mathrm{B}) = x'_3 \,/\, t'_3 = 15/17.$$

Si noterà che E_1, E_2, E_3, che nel rif. di Q erano simultanei, *non lo sono* nel rif. di A.

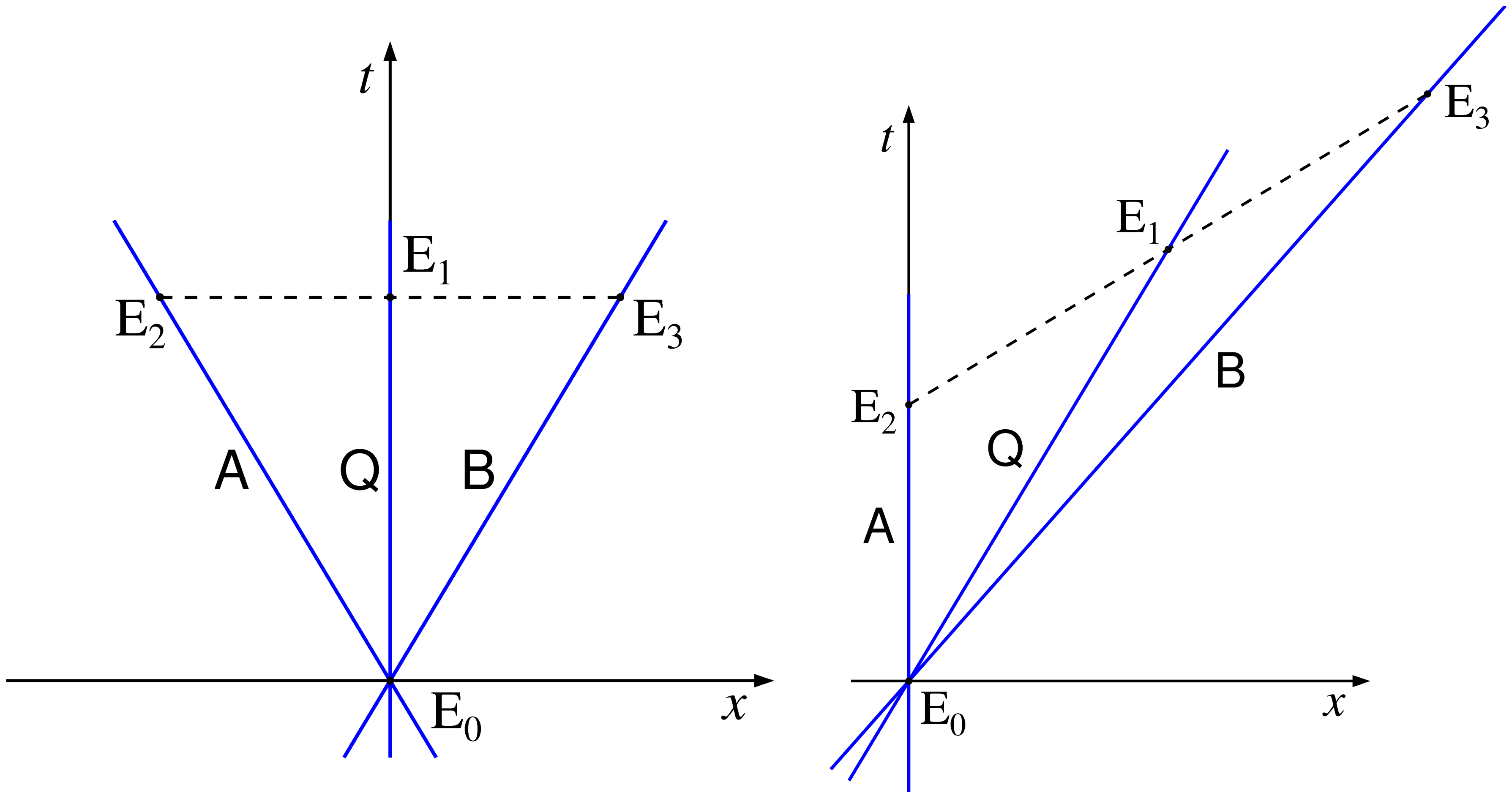
La pendenza della retta che unisce E_2, E_1, E_3 vale

$$(5/4 - 4/5) \,/\, (3/4) = 3/5$$

ossia v: cosa ben nota dalle trasformazioni di Lorentz.



t
E3
E1
B
E2
Q
A
E0
x



t
E1
E2
E3
A
Q
B
E0
x
t
E3
E1
B
E2
Q
A
E0
x

Il “paradosso del treno”

Un treno [lungo 300 m] ha sul suo percorso due passaggi a livello (prima A e poi B) distanti tra loro 300 m.

Nel momento in cui il treno [la testa del treno] raggiunge B partono due raggi di luce che viaggiano in direzione opposta al treno: il raggio Uno viaggia dentro il treno e percorre tutte le carrozze fino ad uscire dalla porta posteriore ed arrivare ad A.

Il raggio Due invece viaggia all'esterno del treno parallelo a Uno. I due raggi dovrebbero arrivare al punto A contemporaneamente.

Il problema è che per un osservatore sul treno Uno ha percorso più strada di Due ma nel medesimo tempo. Infatti il treno ha continuato a viaggiare e Uno ha percorso tutto il treno più lo spazio dalla fine del treno ad A che, sebbene di poco, è comunque più di 300 m.

Questo contrasta il principio che la luce ha sempre la stessa velocità qualsiasi sia il sistema di riferimento

Commenti

1. Quanto al linguaggio usato, l'osservazione più importante va fatta sul termine “raggio”, spesso usato in questi contesti.

Qui “raggio” è usato come sinonimo di “lampo di luce”, “impulso luminoso”.

Non di rado si parla, con lo stesso significato, di “fotone”; il che sottintende un'idea ingenua ed errata dei fotoni...

È bene notare che nel linguaggio tecnico della fisica i “raggi” non “viaggiano”, non hanno una velocità...

“Raggio” è un termine dell'ottica geometrica, e sta a significare un *percorso* (rettilineo in un mezzo omogeneo) della luce emessa da una sorgente.

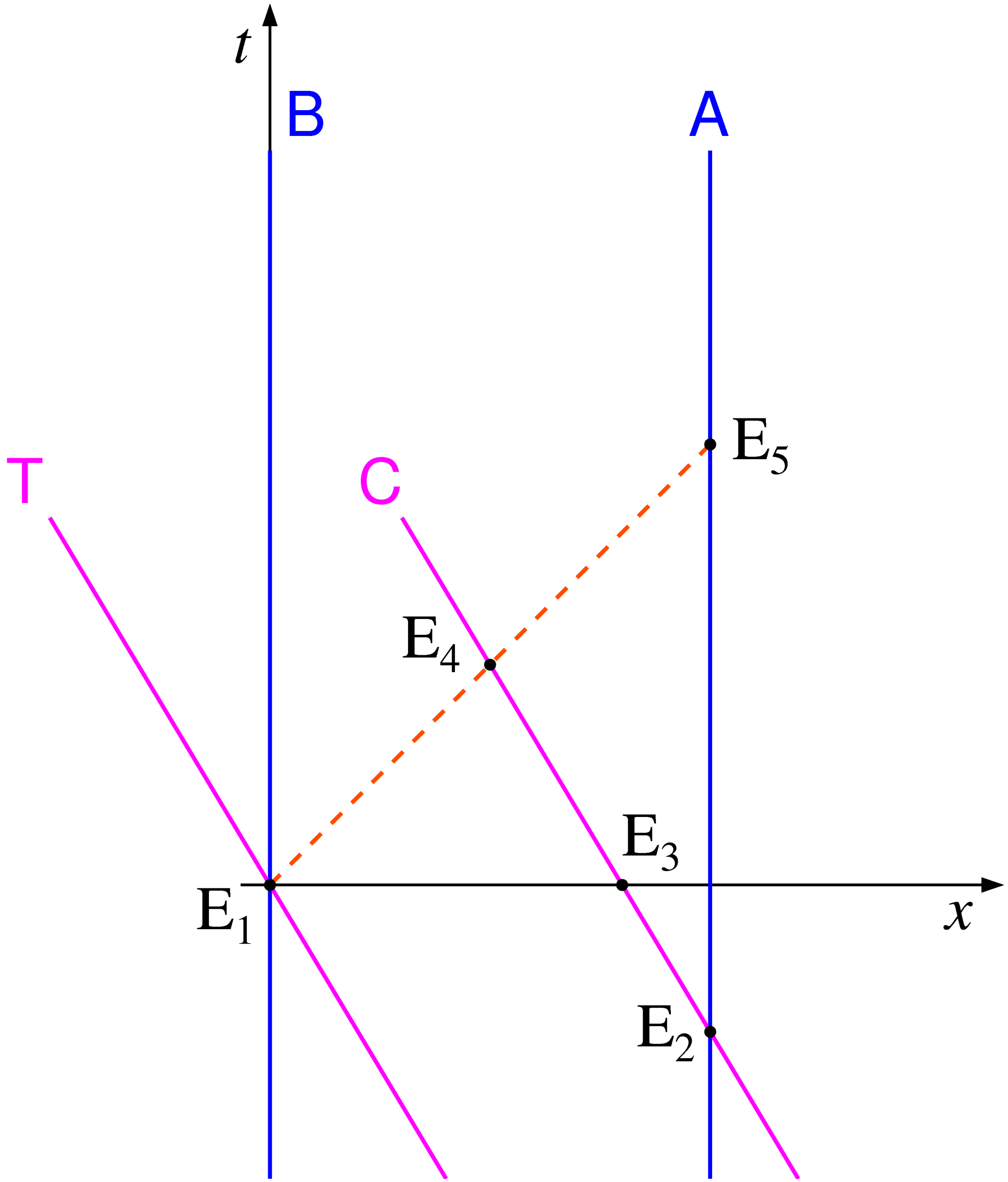
2. Notiamo un altro fraintendimento comune: vengono introdotti *due* raggi, per distinguere quello che accade in due diversi riferimenti.

Il raggio Uno viaggia *dentro* il treno, il raggio Due viaggia all'esterno. Come se questo potesse fare qualche differenza...

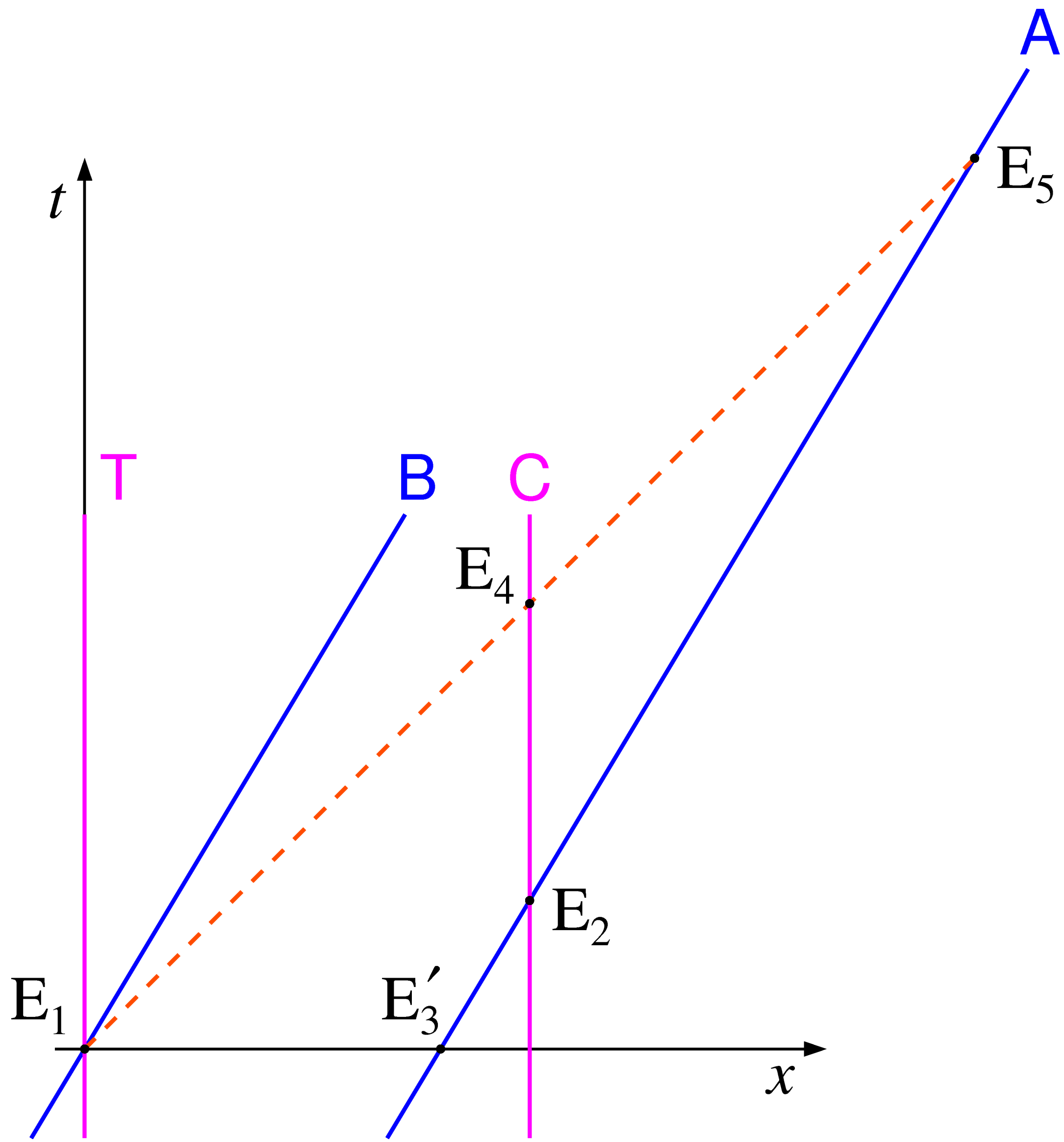
La formulazione del problema mostra una concezione “ingenua” di che cos'è un riferimento: questo è concepito come uno “spazio” a sé, per cui due diversi rif. sono due diversi spazi.

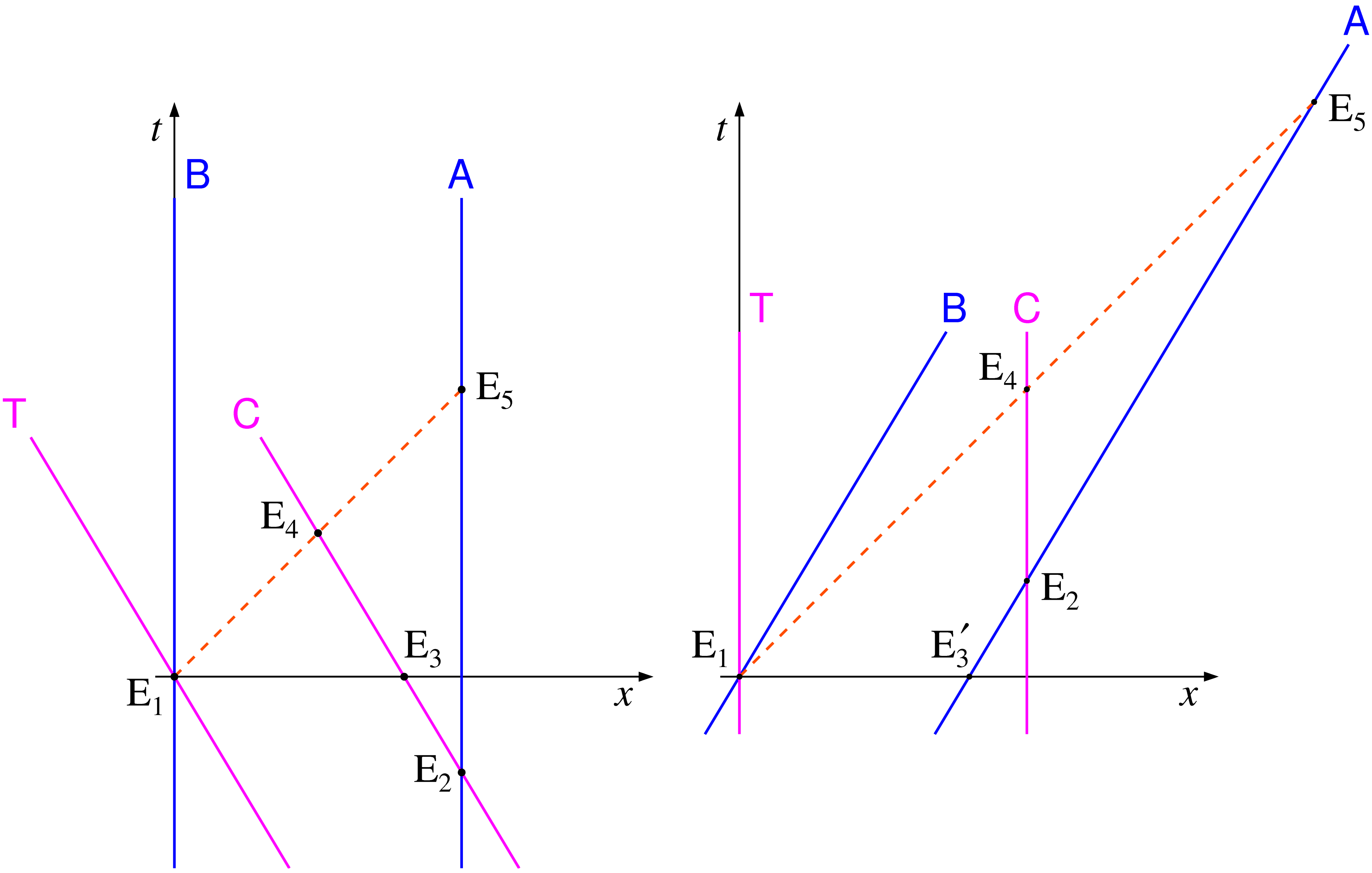
Ecco perché vengono considerati nel “paradosso” *due* “raggi” di luce, che si propagano *ciascuno nel proprio spazio*.

Il modo corretto di presentare la situazione sarebbe stato: *un unico* lampo di luce, emesso dalla testa del treno, *viene osservato* da due diversi rif.: K solidale al terreno, e K' solidale al treno.



t
B
A
T
C
E5
E4
E3
E1
x
E2


A
E5
t
T
B
C
E4
E2
E1
E3′
x



t
B
A
T
C
E5
E4
E3
E1
E2
x
t
A
E5
T
B
C
E4
E2
E1
E3′
x

Altri commenti

3. Anche se non ci fosse la contrazione di Lorentz, il lampo di luce arriverebbe a C prima che a B, in entrambi i rif.

La differenza sta nel tempo impiegato: il tempo tra gli eventi E_1 ed E_5 nel rif. del terreno è uguale a quello tra E_1 ed E_4 nel rif. del treno.

4. È possibile una “verifica” della contrazione di Lorentz, usando la “dilatazione del tempo”.

Consideriamo gli eventi E_2 ed E_4: questi avvengono nella stessa posizione spaziale in K' ma non in K. Quindi l'intervallo di tempo in K sarà “dilatato” di un fattore γ rispetto a quello in K'. Lascio la verifica a chi legge.

Analogo ragionamento, scambiando K e K', si può fare per E_2 ed E_5.

5. La verifica appena vista può essere letta all'inverso: partendo dalla dilatazione del tempo, che si ricava facilmente dall'invarianza della metrica, si può *dimostrare* la contrazione di Lorentz.

Tutto ciò serve a mostrare che *tutti i fatti essenziali* della relatività si possono ottenere *senza far uso delle trasformazioni di Lorentz*.

Problema 12.6 del Q16

In un certo RI, che diremo K, un fotone ha energia ε. Si chiede che energia avrà il fotone in un secondo RI, diciamo K', che si muove rispetto a K nella stessa direzione e verso del fotone, con velocità *v*.

Non si debbono supporre note le leggi di trasformazione dell'energia e dell'impulso, né le trasformazioni di Lorentz; usare solo l'invarianza di

$$E^2 - c^2 p^2. \qquad (*)$$

Suggerimento: Introdurre una "particella ausiliaria", di massa data *m*, ferma in K' e che non interagisce col fotone. Lo scopo di questa particella è solo di considerare l'invarianza di (*) per il sistema formato dal fotone e dalla particella.

Osserviamo anzitutto che chiedere come cambia l'energia del fotone equivale a chiedere come cambia la frequenza: stiamo quindi cercando la formula dell'*effetto Doppler relativistico*. Di solito a questa formula si arriva con le trasformazioni di Lorentz: lo scopo di questo problema è di mostrare come si può arrivare al risultato senza conoscerle.

Occorre però un artificio (lecito, ma non naturale): aggiungere al fotone una particella di massa non nulla, che si muove con velocità v nel rif. K ed è quindi ferma in K′. Fotone e particella non interagiscono, ma le pensiamo come un unico sistema.

Dobbiamo poi tener presente che l'invarianza di $E^2 - c^2p^2$ non vale solo per una particella, ma per qualsiasi sistema fisico; per es. nel nostro caso per il sistema composto del fotone e della particella ausiliaria che abbiamo aggiunto.

Indichiamo dunque con ε, ε' le energie del fotone nei due rif.; sappiamo che i rispettivi impulsi sono ε/c, ε'/c. Siano poi E, p energia e q. di moto della particella in K; in K$'$ l'energia della particella si ridurrà a mc^2, e la sua q. di moto sarà nulla. Quindi

$$(\varepsilon + E)^2 - (\varepsilon + cp)^2 = \left(\varepsilon' + mc^2\right)^2 - {\varepsilon'}^2.$$

Semplificando e facendo uso di $E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$ si arriva a

$$\varepsilon' = \varepsilon \, \frac{E - cp}{mc^2}.$$

Ma $E = mc^2\gamma$, $p = mv\gamma$, e infine

$$\varepsilon' = \varepsilon\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \varepsilon \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}.$$

Come si vede, m (e quindi la particella ausiliaria) non figura nel risultato.

Problema 13.2 del Q16

Spiegare perché un elettrone libero non può assorbire un fotone.

Supponiamo l'elettrone inizialmente fermo. Questa non è una restrizione, perché esiste sempre un RI in cui ciò accade, e d'altra parte che l'assorbimento sia possibile o no non dipende dal rif. scelto per il calcolo: si tratta di un fatto *invariante.*

Sia ε l'energia del fotone; E, p energia e impulso dell'elettrone dopo aver assorbito il fotone: la conservazione di energia e impulso dice

$$mc^2 + \varepsilon = E \qquad \varepsilon/c = p.$$

Basta moltiplicare la seconda per c, quadrare e sottrarre: dopo le semplificazioni si trova

$$2\,mc^2\varepsilon = 0$$

che è falsa. Dunque il processo è impossibile.

Si può anche fare il calcolo in un RI qualsiasi, nel quale l'elettrone non è fermo. È un po' più complicato, ma è istruttivo vedere come porta allo stesso risultato.

Siano ora E, $\vec{P}$ energia e impulso *iniziali* dell'elettrone; $\vec{p}$ l'impulso del fotone. L'energia del fotone sarà cp. Indicherò poi con E', $\vec{P}'$ energia e impulso *finali* dell'elettrone. Usando sempre le leggi di conservazione:

$$E + cp = E' \qquad \vec{P} + \vec{p} = \vec{P}'.$$

Prendendo il quadrato del modulo dei due membri della seconda si ha

$$P^2 + p^2 + 2\,\vec{P}\cdot\vec{p} = {P'}^2 \tag{1}$$

mentre quadrando la prima:

$$E^2 + c^2p^2 + 2\,c\,E\,p = {E'}^2. \tag{2}$$

Moltiplicando la (1) per c^2 e sottraendo dalla (2) abbiamo

$$E\,p = c\,\vec{P}\cdot\vec{p}.$$

Ma questa è impossibile, perché $\vec{P}\cdot\vec{p} \le Pp$ mentre $E > cP$.

Problema 13.4 del Q16

Un atomo inizialmente fermo, che si trova in uno stato eccitato, emette un fotone.

a) Calcolare la relazione tra l'energia del fotone e la variazione di massa dell'atomo.

b) Considerare in particolare il caso di un atomo d'idrogeno nel livello $n = 2$.

Indichiamo con M_1 la massa dell'atomo nello stato fondamentale; quella nello stato eccitato sarà maggiore, e la indichiamo con M_2. Siano poi: E_1 l'energia dell'atomo dopo emesso il fotone; ε l'energia del fotone, $p = \varepsilon/c$ il suo impulso. Converrà definire

$$\Delta = (M_2 - M_1)\, c^2.$$

L'impulso dell'atomo sarà opposto a quello del fotone, ma di uguale modulo.

a) La conservazione dell'energia ci dice

$$M_2\, c^2 = E_1 + \varepsilon$$

e al solito

$$E_1^2 = M_1^2 c^4 + c^2 p^2 = M_1^2 c^4 + \varepsilon^2.$$

Eliminando E_1:

$$\varepsilon = \frac{\left(M_2^2 - M_1^2\right) c^2}{2\, M_2} < \Delta.$$

La ragione è che parte dell'energia Δ si ritrova come energia cinetica dell'atomo. Infatti

$$E_1 - M_1\, c^2 = \Delta - \varepsilon = \frac{\Delta^2}{2\, M_2\, c^2}.$$

Si vede che $\Delta - \varepsilon$ è di secondo ordine in Δ.

b) I dati per un atomo d'idrogeno sono: $M_1\, c^2 = 0.94\,\mathrm{GeV}$, $\Delta = 10.2\,\mathrm{eV}$. Perciò la differenza relativa $(\Delta - \varepsilon)/\Delta$ vale circa 10^{-8} e per atomi più pesanti è ancora minore. Tuttavia non è priva di applicazioni pratiche, per es. nel "raffreddamento laser" di fasci atomici.

Problema 14.1 del Q16

Calcolare la velocità dei pioni emessi nel decadimento

$$K^0 \to \pi^+ + \pi^- \text{ } (K^0 \text{ fermo}).$$

Nel rif. in cui il π^+ è fermo, quali sono le velocità di π^- e K^0?

(Si richiede di non usare la legge di trasformazione della velocità, ma solo le leggi di conservazione di energia e impulso.)

Massa del K^0: 498 MeV/c^2.

Massa del π^+ e del π^-: 140 MeV/c^2.

Nel decadimento la somma delle masse (invarianti) diminuisce, mentre l'energia totale si conserva. L'energia iniziale era $m_{\mathrm{K}}c^2$; quella finale sarà $2\,m_\pi c^2\gamma$ (2 volte perché i due pioni hanno la stessa velocità). Abbiamo quindi:

$$m_{\mathrm{K}} = 2\,m_\pi\gamma$$

dove $\gamma > 1$, perché i pioni si muovono; anzi questa relazione ci permette di calcolare γ:

$$\gamma = \frac{m_{\mathrm{K}}}{2\,m_\pi} \quad \text{da cui} \quad v = c\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_{\mathrm{K}}^2}} = 0.83\,c.$$

Nel rif. del π^+, ovviamente il K^0 ha velocità v (in modulo). Quanto alla velocità del π^-, il modo più diretto per calcolarla sarebbe la legge di trasformazione delle velocità, ma il problema chiede di non usarla. Possiamo comunque arrivarci per via indiretta, come segue.

Scriviamo le solite leggi di conservazione:

$$E_{\mathrm{K}} = E_{+} + E_{-} \qquad \vec{p}_{\mathrm{K}} = \vec{p}_{+} + \vec{p}_{-}$$

(il significato dei simboli è ovvio). Nel rif. del π^{+} abbiamo

$$\vec{p}_{+} = 0 \qquad E_{+} = m_{\pi} c^{2}$$

mentre

$$v_{-} = c^{2}\,\frac{p_{-}}{E_{-}} = c^{2}\,\frac{p_{\mathrm{K}}}{E_{\mathrm{K}} - E_{+}} = \frac{E_{\mathrm{K}}\,v}{E_{\mathrm{K}} - m_{\pi}c^{2}} = \frac{m_{\mathrm{K}}\gamma\,v}{m_{\mathrm{K}}\gamma - m_{\pi}}.$$

Non resta che sostituire per v e per γ le espressioni già trovate, per ottenere

$$v_{-} = c\,\frac{m_{\mathrm{K}}\sqrt{m_{\mathrm{K}}^{2} - 4\,m_{\pi}^{2}}}{m_{\mathrm{K}}^{2} - 2\,m_{\pi}^{2}} = 0.98\,c.$$

Il bilancio dell'energia è stato già scritto: c'è solo da osservare che in questo rif. il π^{-} ha tutta l'energia cinetica, che proviene in parte da quella del K^{0}, in parte dai 218 MeV della differenza di massa tra il K^{0} e i due pioni.

Una versione pdf di questa discussione apparirà in

http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/varie/bologna-2013b.pdf

Invito a controllare fra qualche tempo per eventuali aggiornamenti.