

Verifiche sperimentali
della
Relatività Generale

Relatività ristretta e relatività generale

È noto che la teoria della relatività (denominazione dovuta a Planck) asserisce l'equivalenza di tutti i *referimenti inerziali*.

Einstein si pose subito l'obiettivo di estendere questa equivalenza anche ai rif. non inerziali (accelerati).

Per questo motivo la teoria di partenza ha ricevuto l'attributo “ristretta” (RR), in contrapposizione alla versione estesa, che ha preso il nome di teoria “generale” (brevemente, appunto *relatività generale*, che abbrevieremo RG).

Tuttavia nello sviluppare la teoria E. si rese presto conto che ciò che realmente occorre era una *teoria relativistica della gravitazione*: sebbene il primitivo nome sia rimasto, questo è dunque il reale significato e contenuto della RG.

Le basi della RG (1)

Il primo enunciato della RG (primo anche storicamente) è il *principio di equivalenza* (PE):

un riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale è equivalente a un rif. inerziale

o anche:

un campo gravitazionale è indistinguibile a tutti gli effetti fisici dalla forza apparente in un rif. accelerato

Vedremo nel seguito esempi del valore euristico di questo principio.

Nota: A stretto rigore dovremmo dire che il PE ha valore *locale*, ma qui dobbiamo semplificare...

Le basi della RG (2)

La seconda idea fondamentale della RG è che lo spazio-tempo non ha la struttura lorentziana-minkowskiana della RR:

la materia incurva lo spazio-tempo.

Questo andrebbe precisato in senso matematico, ma non abbiamo tempo.

Gli effetti gravitazionali si manifestano appunto attraverso questa curvatura.

È ciò che si chiama “geometrizzazione della gravità”.

Le basi della RG (3)

Infine: le leggi del moto. Come si muove un corpo nello spazio-tempo curvo?

E. generalizza il principio d'inerzia (valido in RR) nella forma di *principio della geodetica* (PG):

la linea oraria (o linea d'universo) di un corpo di piccola estensione (massa trascurabile) è una geodetica di tipo tempo.

Come definizione di geodetica possiamo accontentarci di questa: una curva di lunghezza *estremale* (secondo la metrica di quello spazio-tempo).

Il PG vale anche per la propagazione della luce, con la sola modifica che la geodetica è di tipo luce (o “nulla”).

Va detto che il PG in realtà non è un principio indipendente: lo si dimostra a partire dalle equazioni della RG (delle quali qui non possiamo parlare).

Esso ha tuttavia un grande valore euristico.

Le “prove classiche” della RG

Fin dagli inizi della sua ricerca E. si preoccupa di trovare fenomeni che possano dare verifiche della teoria. Nei primi anni (fino al 1916) ne fornisce 3, che in ordine cronologico sono:

- 1) il redshift gravitazionale (1911)
- 2) la deflessione gravitazionale della luce (1911–1915)
- 3) la precessione del perielio dei pianeti (1915).

Queste sono appunto conosciute come le “prove classiche” della RG, per distinguerle da altre prove più moderne, delle quali parleremo poi.

La precessione del perielio di Mercurio

Si tratta dell'unico effetto di RG già conosciuto (ma senza spiegazione) ben prima della nascita della teoria.

Prima del 1850 LeVerrier aveva studiato il moto di Mercurio, e aveva dimostrato che la teoria di Newton non rendeva esattamente ragione delle osservazioni: rimaneva un residuo inspiegato nel moto dell'asse maggiore dell'orbita, pari a circa 43" per secolo.

(La figura è **molto** esagerata!)

Si era supposto che la causa fosse la perturbazione di un pianeta più interno, che però non fu mai trovato.



In tempi più recenti si è anche pensato a un piccolo schiacciamento del Sole (che non si vede); ma c'è poi un'altra ragione per escludere queste spiegazioni.

E. nel 1915 calcola l'effetto come previsto dalla RG, e trova la seguente espressione:

$$\dot{\chi} = \frac{3 (GM)^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1 - e^2)}.$$

A parte le costanti universali c e G , nella formula figurano solo grandezze misurabili: la massa M del Sole, il semiasse a dell'orbita, l'eccentricità e .

Nessun parametro arbitrario!

Si noti la dipendenza da a con la potenza $-5/2$: da una parte questa mostra che l'effetto sarà molto più grande per Mercurio che per gli altri pianeti; poi la dipendenza è diversa da quella che risulta con le altre ipotesi: $a^{-7/2}$.

Coi dati di un solo pianeta non è possibile decidere, ma oggi le precessioni sono state misurate anche per altri pianeti:

Venere: 8.62

Terra: 3.84

Marte: 1.35

(sempre secondi d'arco per secolo).

Gli errori di misura sono inferiori a $0.1''/\text{secolo}$.

Solo la formula di E. è in accordo con tutti i dati.

Il redshift gravitazionale

Questo è l'effetto di cui è più semplice fare la teoria: infatti per darne un'espressione approssimata basta il solo PE.

Il ragionamento di E. comincia considerando due riferimenti: K^0 e K^1 , che dobbiamo pensare nello spazio, lontani da qualsiasi azione gravitazionale. K^0 è inerziale, mentre K^1 è accelerato lungo l'asse z , con accelerazione g .

Supponiamo inoltre che all'istante iniziale ($t = 0$) le origini dei due riferimenti coincidano e la velocità relativa sia nulla.

Nell'origine di K^1 si trova un trasmettitore T, e a distanza h sull'asse z un ricevitore R. Al tempo $t = 0$, T invia un segnale a R.

Ragionando nel rif. K^0 si prevede che il ricevitore vedrà una frequenza minore di quella emessa, perché nel tempo h/c in cui il segnale si è propagato da T a R, questo ha acquistato una velocità $v = gh/c$.

La formula dell'effetto Doppler al primo ordine ci dice:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c} = -\frac{gh}{c^2}.$$

Concludiamo dunque che in un rif. accelerato come K^1 , dove T e R sono fermi, c'è una variazione di frequenza tra emissione e ricezione.

Applichiamo ora il PE: K^1 è equivalente a un rif. K fermo sulla superficie della Terra, dove è presente il campo gravitazionale g .

Dunque anche in K si deve vedere lo stesso effetto di redshift.

Le verifiche del redshift gravitazionale (1)

Sono occorsi 50 anni (dal 1911 al 1960) per vedere la prima verifica.

La ragione è che l'effetto sulla Terra è molto piccolo: una variazione relativa di frequenza di 10^{-16} per ogni metro di dislivello.

Con la scoperta dell'effetto Mössbauer (1957) divenne possibile generare e rivelare radiazioni γ con frequenze molto ben definite, e ciò permise il primo esperimento (Pound–Rebka) appunto nel 1960.

L'esperimento fu eseguito su un dislivello di circa 25 metri.

Le verifiche del redshift gravitazionale (2)

Esiste un tipo di verifiche diverse, fatte per mezzo di orologi.

Un esempio tipico è l'esperimento di Briatore–Leschiutta (1975).

L'orologio 1 si trova a Torino, l'orologio 2 sul Plateau Rosà (Cervino).

Si manda un segnale di partenza da 1 a 2, e poi un segnale di stop dopo circa due mesi. Si osserva che l'intervallo di tempo segnato dall'orologio 2 è *più lungo*, per circa $2.4 \mu\text{s}$, di quello segnato da 1.

Data la piccolissima differenza, è ovvio che occorrono orologi molto raffinati.

Infatti esperimenti del genere sono divenuti possibili solo con gli orologi atomici (1955).

Esperimenti dello stesso genere sono stati eseguiti con aerei, con razzi...

L'esperimento a tutt'oggi più preciso è quello di Vessot e coll. (1976) che usando un maser a idrogeno montato su un razzo hanno verificato la previsione teorica con errore relativo 2×10^{-4} .

Avvertenza: è molto facile interpretare gli esperimenti con gli orologi come prova che un orologio *rallenta* quando si trova in un campo gravitazionale.

Talvolta si sente perfino dire che “in un campo gravitazionale il tempo *scorre più lentamente*”.

Sono interpretazioni discutibili, per varie ragioni, ma purtroppo qui non possiamo approfondire.

Importanza pratica del redshift gravitazionale: il GPS

Tutti conoscono il GPS (Global Positioning System): il sistema che permette di localizzare un ricevitore mediante i segnali che arrivano da satelliti.

Pochi sanno però che per funzionare il GPS deve tener conto delle correzioni relativistiche, e in particolare dell'effetto sugli orologi.

Infatti i trasmettitori situati sui satelliti inviano informazioni sulla posizione dei satelliti e *sul tempo di emissione del segnale*; a questo scopo i satelliti portano a bordo degli orologi atomici.

Occorre però tener conto che i satelliti si trovano “in alto” (a circa 20.000 km dalla superficie terrestre. Questo si fa rallentando gli orologi di bordo: la frequenza nominale di 10.23 MHz viene modificata in 10.22999999545 MHz.

La deflessione gravitazionale della luce

L'idea che anche la luce possa risentire di un campo gravitazionale, e che quindi la sua traiettoria possa essere deviata, fu proposta più volte prima di E., ma naturalmente mancavano i mezzi per osservarla.

Nella fisica newtoniana e con un modello corpuscolare della luce non è difficile calcolare la deflessione della luce radente al Sole: il calcolo porta a un'angolo di deflessione pari a $0.88''$.

E. affronta la questione da un punto di vista diverso; in un primo tempo (1911) col PE, e ottiene ancora il risultato newtoniano.

Più avanti (1915), con la versione matura della RG, calcola invece la geodetica percorsa dalla luce nello spazio-tempo incurvato dal Sole e arriva al risultato “giusto”:

$$\vartheta = \frac{4GM}{c^2 R}.$$

Numericamente ne risulta un valore doppio:

$$\vartheta = 1.77''$$

Verifiche della deflessione gravitazionale

Per molto tempo la sola verifica possibile è stata durante le eclissi totali di Sole.

In figura T e T' sono due posizioni della Terra a distanza di 6 mesi. In T si puntano due stelle radenti al Sole (il che è possibile appunto solo durante l'eclisse) e si misura l'angolo α . Dopo 6 mesi si misura l'angolo α' .

Dato che le stelle sono molto lontane, gli angoli β_1 e β_2 sono trascurabili; quindi in assenza di deflessione avremmo $\alpha = \alpha'$. A causa della deflessione invece

$$\alpha = \alpha' + 2\theta.$$

La prima osservazione fu fatta nel 1919 e confermò la previsione di E., ma con incertezze notevoli e possibilità di errori sistematici.

Con gli anni le osservazioni si sono molto raffinate: oggi grazie ai radiointerferometri a grandissima base (VLBI) la deflessione si misura anche quando la luce passa a 1 UA dal Sole e la formula è verificata meglio dell'1 per mille.

Le lenti gravitazionali

Un caso speciale di deflessione gravitazionale sono le *lenti gravitazionali*.

Si presentano tipicamente quando una sorgente lontana (quasar) si trova dietro una galassia, la cui distribuzione continua di materia deflette la luce in modo variabile, formando anche immagini multiple. Il fenomeno ricorda in certo senso quello del *miraggio*.

L'anello di Einstein

Un altro caso speciale di deflessione si ha quando la sorgente sta dietro un oggetto compatto, con allineamento quasi perfetto.

Allora la luce viene deflessa in modo simmetrico e si vede un anello.

Le microlenti

Anche se l'allineamento non è perfetto si può comunque avere un effetto di *amplificazione* della luce della sorgente, che può rendere visibili oggetti che sarebbero altrimenti oltre il limite dello strumento.

In questo modo sono state osservate di recente quasar con redshift (cosmologico) superiore a 10.

L'amplificazione viene usata anche, restando nell'ambito della Galassia, per identificare *pianeti extrasolari*. Così è stato scoperto il pianeta “simile alla Terra” di cui hanno parlato i giornali pochi giorni fa.

È interessante osservare che a questo punto la deflessione gravitazionale non è più un fenomeno di cui cercare conferma e verifica: è diventato invece uno *strumento per ulteriori scoperte*.

Il ritardo gravitazionale

Quando la luce passa vicino al Sole non viene solo deflessa: si allunga anche il tempo di propagazione.

Però attenzione: non si tratta del fatto banale che se la traiettoria è curva è anche più lunga: proviamo a fare un piccolo calcolo.



Schematizziamo la curva AC in figura con la spezzata ABC, sicuramente più lunga. Abbiamo:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\cos \vartheta/2} \simeq \overline{AC} \left(1 + \frac{1}{8}\vartheta^2\right).$$

Se per es. prendiamo A e C a distanza di 1 UA dal Sole, e usiamo il valore già visto di ϑ , troviamo che la spezzata è più lunga del segmento AC per soli 3 metri, che in termini di tempo di propagazione fanno 10 ns.

Vedremo fra poco che il ritardo reale è molto più lungo.

Il calcolo esatto si fa nel modo già accennato all'inizio: studiando la geodetica dello spazio-tempo descritta dalla luce. Il risultato è che il ritardo supera 130 μs .

Ma come si spiega allora questo ritardo? Forse la velocità della luce lungo il percorso è minore di c ?

La risposta è no: secondo la RG, se andiamo a misurare la velocità (nel vuoto) punto per punto, **troviamo sempre c** .

Bisogna però considerare che ciò vale se nella misura della velocità usiamo, in ogni punto, un orologio *situato nello stesso posto*.

Invece nella misura del tempo di propagazione noi facciamo uso di orologi posti agli estremi A e C, ossia *lontano dal Sole*.

Allora si può intuire la spiegazione: si tratta ancora di *una manifestazione del redshift*. Il tempo misurato è più lungo di quello che ci aspetteremmo in base alla distanza percorsa, perché un orologio *più lontano* dal Sole segna un tempo *maggiore* di uno più vicino.

Il calcolo fornisce il risultato

$$\frac{2GM}{c^3} \ln\left(\frac{2R}{b}\right)$$

dove R è la distanza di A e di C dal Sole, mentre b è il *parametro d'urto*, ossia la distanza minima dal Sole a cui passa l'impulso radar; per propagazione radente, b è uguale al raggio del Sole.

Il ritardo gravitazionale: le misure

È ovvio che non si possono in realtà fare misure con due orologi posti in A e in C; ma si può ricorrere a un *segnale riflesso*.

Si sfrutta la riflessione di un impulso radar da un pianeta, e si misura il tempo di andata e ritorno. Esperimenti di questo tipo sono stati condotti da Shapiro e coll. negli anni '70.

Nella versione finale venne usato un *transponder* depositato su Marte, ossia un ricevitore-amplificatore-trasmettitore.

La situazione geometrica che dà il massimo ritardo è quella in cui la radiazione passa radente al Sole; ma dato che i pianeti si muovono, questa situazione si realizza solo a un certo istante.

Quello che sembra un inconveniente è invece un vantaggio, perché così si può vedere la *variazione del ritardo* nel tempo, il che consente una verifica più completa della teoria.

Anche questi esperimenti confermano la RG entro l'1‰.

Le binarie di neutroni

In astronomia si chiama *stella binaria* un sistema di due stelle legate gravitazionalmente, e che quindi orbitano attorno al centro di massa del sistema.

(La figura rappresenta il caso di due stelle di uguale massa, su orbite ellittiche.)

Se si tratta di stelle di neutroni, si abbrevia in “binaria di neutroni” (neutron binary).

Una stella di neutroni è una delle fasi finali dell'evoluzione stellare: si forma nell'esplosione di una *supernova*, dalla violenta compressione della parte centrale della stella.

Una massa poco maggiore di quella del Sole viene compressa in un diametro di qualche decina di km.

Difficile farsi un'idea intuitiva della densità: è grosso modo quella della materia nucleare, attorno a 10^{15} g/cm³.

Il problema è: come si può vedere una stella di neutroni?

La scoperta delle pulsar

Nel 1967 Hewish et al. scoprono una radiosorgente che emette impulsi brevissimi ed estremamente regolari: un impulso ogni 1.33728 secondi.

Il nome *pulsar* significa appunto “pulsating radio source.”

In un primo tempo qualcuno pensò a segnali di extraterrestri ... ma poi le pulsar note si moltiplicarono, sempre con periodi di secondi o anche molto meno.

Infine si arrivò alla spiegazione.

Le stelle di neutroni posseggono un intenso campo magnetico, e come per la Terra, i poli magnetici non stanno sull'asse di rotazione.

Gli elettroni che risultano dal decadimento dei neutroni in superficie risentono del campo magnetico ed emettono *radiazione di sincrotrone*, concentrata nella direzione dell'asse magnetico.

A causa della rotazione della stella, la radiazione “spazza” lo spazio in un cono, come un faro.

Se siamo fortunati, e ci troviamo su quel cono, a ogni giro riceviamo un impulso di radiazione, e vediamo una pulsar.

Data l'alta compattezza del sistema, e la quasi assenza d'interazioni con l'esterno, il periodo di rotazione di una pulsar è *estremamente stabile*.

Il sistema binario B1913+16

Nel 1974 Hulse e Taylor scoprono la prima binaria di neutroni: solo una delle due stelle è una pulsar. Il periodo (medio) misurato è

$$0.059029997929613(7) \text{ s.}$$

Ma come ci si accorge di aver a che fare con un sistema binario, se solo una delle stelle è visibile come pulsar?

Risposta: a causa del moto orbitale della pulsar, il suo periodo non appare esattamente costante, ma oscilla. Nel nostro caso si osserva una variazione relativa attorno a 10^{-3} .

Si può vedere questo come un effetto Doppler, oppure come una variazione nel tempo di propagazione dalla pulsar a noi.

Il periodo orbitale è di circa 8 ore; per l'esattezza:

27906.9807804(6) s.

B1913+16 come “laboratorio” di RG

Fino a questo punto la RG non è entrata in gioco; ma il dato sul periodo orbitale (molto breve, visto che le due stelle dovrebbero avere masse non lontane da quella del Sole) indica che si tratta di un sistema *stretto*, in cui le due stelle si muovono a piccola distanza una dall'altra e con grande velocità.

Questo è anche confermato dall'effetto Doppler sui segnali della pulsar: una variazione relativa di 10^{-3} richiede una velocità orbitale pari a $c/1000$.

Ci si debbono dunque aspettare effetti relativistici importanti: molto più che per Mercurio...

E infatti il moto orbitale della pulsar mostra una precessione del periastro di ben 4.2° per anno: 36000 volte quella di Mercurio!

Ma ci sono altri effetti osservabili; ecco solo due esempi:

- i segnali periodici della pulsar sono soggetti al *redshift* gravitazionale dovuto al campo della compagna non visibile
- c'è anche un effetto di *ritardo* gravitazionale.

È quasi superfluo dire che *tutte le previsioni* che si possono ricavare dalla RG su questo sistema *sono state puntualmente verificate*.

Lo studio dettagliato del moto del sistema ha permesso inoltre di determinare le masse, che risultano circa 1.4 volte quella del Sole, e la loro distanza media: circa 10^6 km (il diametro del Sole è 1.4×10^6 km).

Ma la cosa più interessante che abbiamo potuto imparare da B1913+16 la vedremo fra poco.

Scoperta di una doppia pulsar

Negli anni trascorsi dal 1974 sono state scoperte altre pulsar facenti parte di sistemi binari, che hanno fornito nuovi dati e ulteriori conferme della RG.

È molto recente (poco più di due anni) la scoperta di una *doppia pulsar*, ossia di una binaria di neutroni in cui entrambe le componenti sono visibili come pulsar.

Anche questo sistema ha confermato la teoria. Un solo dato: la precessione del periastro è di ben $16.9^\circ/\text{anno}$.

Le onde gravitazionali

È ben noto che una carica elettrica accelerata emette radiazione elettromagnetica. Con un'analogia superficiale ma non infondata, possiamo aspettarci che una massa accelerata emetta *radiazione gravitazionale*.

In effetti la prima previsione sull'esistenza di *onde gravitazionali* fu fatta dallo stesso E. nel 1916: egli calcolò anche la potenza irraggiata da un sistema di masse in moto (la famosa “formula del quadrupolo”, che qui non riportiamo).

È però giusto ricordare che la stessa esistenza delle o.g. ha provocato molte discussioni fra i teorici, e che ancora oggi non tutti sono convinti che esistano realmente. Gli argomenti che si portano in queste discussioni sono purtroppo fuori dai nostri limiti...

A maggior ragione, riveste grandissima importanza la rivelazione diretta di tali onde, che però è molto difficile, per vari motivi.

Qui interessa solo notare che un'emissione significativa si può avere solo da sistemi nei quali una grande massa è raccolta in poco spazio, e si muove rapidamente.

In termini quantitativi, la potenza emessa va come $(M/R)^5$, dove M è la massa del sistema, R una sua dimensione tipica.

Ancora B1913+16

Le osservazioni su questo sistema, prolungate per molti anni, hanno mostrato una lenta diminuzione del suo periodo:

$$dP/dt = -2.422(6) \times 10^{-12}.$$

(Il periodo, che è di circa 8 ore, diminuisce di 7 ms ogni secolo.)

Ciò vuol dire che le due stelle si avvicinano e stanno perdendo energia. Il calcolo mostra che l'energia perduta *corrisponde assai bene* (entro il 3‰) a quella prevista dalla formula di E. per *emissione di onde gravitazionali*.

Questa è la *prima evidenza* dell'esistenza delle o.g.

Hulse e Taylor hanno ricevuto nel 1993 il Nobel per la fisica.

Tentativi di rivelazione diretta

Da quasi 40 anni sono in corso tentativi di rivelare direttamente le o.g. sulla Terra, mediante opportune *antenne*.

La prima idea (Weber) faceva uso di sbarre risonanti. È stata migliorata come sensibilità da Amaldi, Pizzella et al. a Roma, ma finora non ha dato risultati, forse perché la massima sensibilità di questo tipo di antenna è a frequenze troppo alte.

Molto più di recente sono entrate in funzione le *antenne interferometriche* (LIGO, VIRGO) che sono più sensibili e rispondono a frequenze più basse (100÷1000 Hz).

Molto più di recente sono entrate in funzione le *antenne interferometriche* (LIGO, VIRGO) che sono più sensibili e rispondono a frequenze più basse (100÷1000 Hz).

Tutte queste antenne possono rivelare soltanto le onde emesse in eventi catastrofici, come le supernovæ, nella nostra galassia o in quelle più vicine.

Fino ad oggi non ci sono stati risultati positivi.

La cosmologia

Non parlerò di cosmologia, e debbo spiegare perché.

È ben noto che la RG ha trasformato la cosmologia da argomento essenzialmente filosofico in un capitolo della fisica (anche se con caratteristiche particolari).

Sono anche largamente noti alcuni risultati fondamentali; basta citarne due:

- *l'espansione dell'Universo* (redshift cosmologico)
- *la radiazione di fondo* a microonde.

Ci sono però due ragioni che sconsigliano di proporre qui un'esposizione di temi cosmologici:

- 1) ciò non sarebbe possibile senza un'adeguata premessa teorica
- 2) le “verifiche” in ambito cosmologico non sono “pure”, nel senso che coinvolgono ipotesi e modelli che andrebbero anch'essi discussi.