E. Fabri *dicembre 2012*

Irraggiamento esatto di un oscillatore

Impostazione del problema

Descrivo il calcolo *esatto*, quindi relativistico, della potenza media irraggiata da un oscillatore armonico. Lo scopo è quello di confrontare con lo sviluppo in multipoli.

La formula di partenza è la potenza istantanea data dalla [14.26] di *Jackson*[(1)] adattata al SI:

$$W = \frac{Z_0\, q^2}{6\,\pi\, c^2}\, \gamma^6 a^2 \tag{1}$$

dove γ ha il solito significato, e a è l'accelerazione della carica. La formula generale contiene un termine addizionale, che però si annulla nel caso di moto unidimensionale, in cui velocità e accelerazione sono parallele.

Come legge del moto assumo

$$z = A\,\cos\omega t$$

per cui

$$a = -\omega^2 A\,\cos\omega t. \tag{2}$$

Per comodità definisco

$$\beta = \frac{\omega A}{c} \tag{3}$$

(si tratta della velocità massima) e allora

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2 \sin^2\!\omega t}. \tag{4}$$

Calcolo della potenza media

La potenza media si calcola sostituendo (2) e (4) in (1) e integrando su un periodo:

$$\begin{aligned}
\overline{W} &= \frac{Z_0\, q^2}{6\,\pi\, c^2}\, \frac{1}{T}\, \omega^4 A^2 \int_0^T \frac{\cos^2\!\omega t}{\bigl(1 - \beta^2 \sin^2\!\omega t\bigr)^3}\, dt \\
&= \frac{Z_0\, q^2 \omega^4 A^2}{12\,\pi^2 c^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\!\varphi}{\bigl(1 - \beta^2 \sin^2\!\varphi\bigr)^3}\, d\varphi.
\end{aligned}$$

(1) I riferimenti a Jackson sono intesi per l'ed. italiana Zanichelli 2001.

Tutto è dunque ridotto al calcolo di un integrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \beta^2 \sin^2\varphi\right)^3}\, d\varphi. \tag{5}$$

In App. 1 dimostro che

$$I = \pi\, \frac{1 - \frac{3}{4}\,\beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$$

e di conseguenza

$$\overline{W} = \frac{Z_0}{12\,\pi}\, q^2\omega^2\, \frac{\beta^2\left(1 - \frac{3}{4}\,\beta^2\right)}{(1 - \beta^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Sviluppando la (6) in serie di potenze di β si ottiene

$$\begin{aligned}\overline{W} &= \frac{Z_0}{12\,\pi}\, q^2\omega^2 \sum_0^\infty \frac{(k+2)\,(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2}\,\beta^{2k+2} \\ &= \frac{Z_0}{12\,\pi}\, q^2\omega^2\left(\beta^2 + \tfrac{3}{4}\,\beta^4 + \tfrac{3}{4}\,\beta^6 + \tfrac{25}{32}\,\beta^8 + \cdots\right). \qquad (6')\end{aligned}$$

(Il raggio di convergenza della serie è 1, come ci si doveva aspettare.)

Si verifica facilmente che il primo termine della serie (6′) coincide con la classica espressione della radiazione di dipolo elettrico per il limite di piccola ampiezza ($\beta \ll 1$). Ci si può chiedere se i termini successivi corrispondano ai multipoli di ordine superiore; come vedremo, la risposta è *no*.

Sviluppo in multipoli

Per discutere lo sviluppo in multipoli mi appoggio sulla trattazione di *Jackson*. Nel caso che sto studiando sono presenti solo multipoli elettrici: come si vede dalla [9.168] che non riporto, i coefficienti dei multipoli magnetici sono tutti nulli. Quanto ai multipoli elettrici, i loro coefficienti sono dati dalla [9.167], che riporto in forma semplificata, eliminando il termine che contiene l'intensità di magnetizzazione ($k = \omega/c$):

$$a_E(l, m) = \frac{k^2}{i\,\sqrt{l\,(l+1)}} \int Y_{lm}^* \left(c\,\varrho\, \frac{\partial}{\partial r}[r\, j_l(kr)] + ik\, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})\, j_l(kr) \right) d\mathbf{r}. \tag{7}$$

La potenza irraggiata si ricava dalla [9.155]:

$$\overline{W} = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{l,m} |a_E(l, m)|^2. \tag{8}$$

Nella (7) per ϱ e $\mathbf{J}$ si debbono prendere le *componenti di Fourier* delle distribuzioni di cariche e correnti, le cui espressioni per sorgenti in moto periodico ma non sinusoidale sono date nell'Es. 9.1 di *Jackson*:

$$\varrho(\mathbf{r},t) = \varrho_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Re\bigl[2\,\varrho_n(\mathbf{r})\,e^{-in\omega t}\bigr] \tag{9}$$

$$\varrho_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \varrho(\mathbf{r},t)\,e^{in\omega t}\,dt. \tag{9$'$}$$

dove $T = 2\pi/\omega$. Perciò la (7) fornisce in realtà, usando ϱ_n, $\mathbf{J}_n$, dei coefficienti $a_n(l,m)$ (ho soppresso l'indice $_E$, ormai superfluo). Inoltre riscrivendo la (7) per a_n va ricordato che la frequenza è $n\omega$, e quindi al posto di k va sostituito nk. La geometria dell'oscillatore assicura che esistono solo le componenti $m = 0$, per cui d'ora in poi sopprimerò anche l'indice m.

L'espressione di a_n risulta quindi:

$$\begin{aligned} a_{nl} = {} & \frac{n^2k^2}{2\,i}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \\ & \int P_l(z/r)\biggl(c\,\varrho_n\,\frac{\partial}{\partial r}[r\,j_l(nkr)] + ink\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{J}_n)\,j_l(nkr)\biggr)d\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{7$'$}$$

e la (8) andrà riscritta

$$\overline{W} = \frac{2Z_0}{k^2}\sum_{n,l}\frac{1}{n^2}\,|a_{nl}|^2. \tag{8$'$}$$

dove le somme su n, l partono entrambe da 1. Il fattore 4 rispetto alla (8) deriva dal fattore 2 nella (9).

Calcolo delle componenti di Fourier

Per il nostro oscillatore si ha

$$\varrho(x,y,z,t) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - A\,\cos\omega t)$$

e quindi per la (9):

$$\begin{aligned} \varrho_n(x,y,z) &= \frac{q}{T}\,\delta(x)\,\delta(y)\int_0^T \delta(z - A\,\cos\omega t)\,e^{in\omega t}\,dt \\ &= \frac{q\,\delta(x)\,\delta(y)}{\omega\,T\,\sqrt{A^2-z^2}}\,\bigl(e^{in\omega t_1} + e^{in\omega t_2}\bigr) \end{aligned} \tag{10}$$

dove t_1, $t_2 = T - t_1$ sono le due radici (fra 0 e T) di $\cos\omega t = z/A$. (S'intende che la (10) vale per $|z| \le A$; altrimenti $\varrho_n = 0$.)

Proseguendo lo sviluppo:

$$\varrho_n(x,y,z) = \frac{q\,\delta(x)\,\delta(y)}{\pi\,\sqrt{A^2 - z^2}}\,\cos n\omega t_1 = \frac{q\,\delta(x)\,\delta(y)}{\pi\,\sqrt{A^2 - z^2}}\,T_n(z/A) \tag{11}$$

dove T_n è il polinomio di Chebyshev di prima specie.

Passiamo a $\mathbf{J}$. Solo la componente z non si annulla:

$$J_z(x,y,z,t) = -\omega\,A\,q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - A\,\cos\omega t)\,\sin\omega t$$

$$\begin{aligned}
J_{zn}(x,y,z) &= -\frac{\omega\,A\,q}{T}\,\delta(x)\,\delta(y)\int_0^T \delta(z - A\,\cos\omega t)\,\sin\omega t\,e^{in\omega t}\,dt \\
&= -\frac{A\,q\,\delta(x)\,\delta(y)}{T\,\sqrt{A^2 - z^2}}\left(\sin\omega t_1\,e^{in\omega t_1} + \sin\omega t_2\,e^{in\omega t_2}\right) \\
&= -\frac{2i\,A\,q\,\delta(x)\,\delta(y)}{T\,\sqrt{A^2 - z^2}}\,\sin\omega t_1\,\sin n\omega t_1 \\
&= -\frac{i\,q\,\omega}{\pi A}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\sqrt{A^2 - z^2}\,U_{n-1}(z/A)
\end{aligned} \tag{12}$$

dove U_n indica il polinomio di Chebyshev di seconda specie. L'ultima espressione vale solo per $n > 0$, ma d'altra parte la riga sopra mostra che $J_{z0} = 0$.

Calcolo dei coefficienti di multipolo

Per il calcolo dei coefficienti non c'è che da sostituire nella (7′) le espressioni (11) e (12). Per evitare formule troppo lunghe, calcolerò separatamente il contributo di ϱ e quello di $\mathbf{J}$.

Contributo di ϱ

La sostituzione diretta fornisce

$$a_{nl} = \frac{c\,q\,n^2k^2}{2\pi i}\,\sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}}\int_{-A}^{A} dz\;P_l(z/|z|)\,\frac{T_n(z/A)}{\sqrt{A^2 - z^2}}\left(\frac{d}{dr}[r\,j_l(nkr)]\right)_{r=|z|}.$$

Tenendo conto della parità di P_l e di T_n si vede che il contributo di ϱ ad a_{nl} si annulla se n e l hanno parità opposte. Se invece la parità è la stessa, si può limitare l'integrale fra 0 e A, e allora $P_l(z/|z|) = 1$. Dunque:

$$a_{nl} = \frac{c\,q\,n^2k^2}{\pi i}\,\sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}}\int_0^A dz\,\frac{T_n(z/A)}{\sqrt{A^2 - z^2}}\,\frac{d}{dz}[z\,j_l(nkz)]. \tag{13}$$

Usiamo ora lo sviluppo in serie di j_l:

$$j_l(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \, x^{2s+l}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!}$$

che sostituito nella (13) dà:

$$\begin{aligned}
a_{nl} &= \frac{c\,q\,n^2k^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \int_0^A dz \, \frac{T_n(z/A)}{\sqrt{A^2-z^2}} \\
&\qquad \frac{d}{dz}\left(z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (nkz)^{2s+l}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \right) \\
&= \frac{c\,q\,n^2k^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \int_0^A dz \, \frac{T_n(z/A)}{\sqrt{A^2-z^2}} \\
&\qquad \left(\frac{d}{du} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s u^{2s+l+1}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \right)_{u=nkz} \\
&= \frac{c\,q\,n^2k^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \int_0^A dz \, \frac{T_n(z/A)}{\sqrt{A^2-z^2}} \\
&\qquad \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s+l+1)\, u^{2s+l}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \right)_{u=nkz} \\
&= \frac{c\,q}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \int_0^A dz \, \frac{T_n(z/A)}{\sqrt{A^2-z^2}} \, \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s+l+1)\, (nk)^{2s+l+2}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \, z^{2s+l} \\
&= \frac{c\,q}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s+l+1)\, (nk)^{2s+l+2}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \\
&\qquad \int_0^A dz \, \frac{z^{2s+l}}{\sqrt{A^2-z^2}} \, T_n(z/A) \\
&= \frac{c\,q}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s+l+1)\, (nk)^{2s+l+2}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \, A^{2s+l} \\
&\qquad \int_0^1 dv \, \frac{v^{2s+l}}{\sqrt{1-v^2}} \, T_n(v) \\
&= \frac{c\,q\,n^2k^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\, l\,(l+1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s+l+1)\, (n\beta)^{2s+l}}{2^s s! \, (2s+2l+1)!!} \; K_{n,2s+l} \qquad (14)
\end{aligned}$$

dove ho posto

$$K_{np} = \int_0^1 dv \, \frac{v^p}{\sqrt{1-v^2}} \, T_n(v) \tag{15}$$

e ho tenuto presente che kA coincide col β definito dalla (3). L'integrale (15) è calcolato in App. 2. Sostituendo (A2.1) nella (14) si ottiene

$$a_{nl} = \frac{c\,q\,n^2 k^2}{2i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \, (n\beta)^l$$
$$\sum_{\substack{s\geq 0 \\ 2s\geq n-l}} \left(-\tfrac{1}{4} n^2 \beta^2\right)^s \frac{(s+l)!\,(2s+l+1)!}{s!\,(2s+2l+1)!\,\left[s+\frac{1}{2}(l-n)\right]!\,\left[s+\frac{1}{2}(l+n)\right]!}. \tag{16}$$

Contributo di $\mathbf{J}$

Si procede allo stesso modo, usando la (12). Si ottiene

$$\begin{aligned} a_{nl} &= \frac{c\,q\,n^3 k^4}{2\pi i\,A} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \int_{-A}^{A} z\,dz\; P_l(z/|z|)\, U_{n-1}(z/A)\, \sqrt{A^2-z^2}\, j_l(nk|z|) \\ &= \frac{c\,q\,n^3 k^4}{\pi i\,A} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \int_0^A z\,dz\, U_{n-1}(z/A)\, \sqrt{A^2-z^2}\, j_l(nkz). \end{aligned}$$

(Anche il contributo di $\mathbf{J}$ ad a_{nl} si annulla se n e l hanno parità opposte.)

Proseguendo:

$$\begin{aligned} a_{nl} &= \frac{c\,q\,n^3 k^2 \beta^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \int_0^1 v\,dv\, U_{n-1}(v)\, \sqrt{1-v^2}\, j_l(n\beta v) \\ &= \frac{c\,q\,n^3 k^2 \beta^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \int_0^1 v\,dv\, U_{n-1}(v) \sqrt{1-v^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (n\beta v)^{2s+l}}{2^s s!\,(2s+2l+1)!!} \\ &= \frac{c\,q\,n^3 k^2 \beta^2}{\pi i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s\,(n\beta)^{2s+l}}{2^s s!\,(2s+2l+1)!!} \\ &\qquad \int_0^1 dv\, U_{n-1}(v) \sqrt{1-v^2}\, v^{2s+l+1} \\ &= \frac{c\,q}{\pi i}\, 2^l n\, k^2 (n\beta)^{l+2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (n\beta)^{2s} (s+l)!}{s!\,(2s+2l+1)!}\, L_{n,2s+l} \end{aligned} \tag{17}$$

dove ho posto

$$L_{np} = \int_0^1 dv\, v^{p+1}\, U_{n-1}(v)\, \sqrt{1-v^2}. \tag{18}$$

Anche l'integrale (18) è calcolato in App. 2. Sostituendo (A2.2) nella (17) si ottiene

$$\begin{aligned}
a_{nl} &= \frac{c\,q\,n^2k^2}{8\,i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}}\,(n\beta)^{l+2} \\
&\qquad \sum_{\substack{s\ge 0\\ 2s\ge n-l-2}} \left(-\tfrac14 n^2\beta^2\right)^s \frac{(s+l)!\,(2s+l+1)!}{s!\,(2s+2l+1)!\,\left[s+\frac12(l-n)+1\right]!\,\left[s+\frac12(l+n)+1\right]!} \\
&= -\frac{c\,q\,n^2k^2}{2i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}}\,(n\beta)^{l} \\
&\qquad \sum_{\substack{s'\ge 1\\ 2s'\ge n-l}} \left(-\tfrac14 n^2\beta^2\right)^{s'} \frac{(s'+l-1)!\,(2s'+l-1)!}{(s'-1)!\,(2s'+2l-1)!\,\left[s'+\frac12(l-n)\right]!\,\left[s'+\frac12(l+n)\right]!} \\
&= -\frac{c\,q\,n^2k^2}{2i} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi\,l\,(l+1)}}\,(n\beta)^{l} \\
&\qquad \sum_{\substack{s\ge 0\\ 2s\ge n-l}} \left(-\tfrac14 n^2\beta^2\right)^{s} \frac{s\,(s+l-1)!\,(2s+l-1)!}{s!\,(2s+2l-1)!\,\left[s+\frac12(l-n)\right]!\,\left[s+\frac12(l+n)\right]!}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Somma dei due contributi

Sommando (16) e (19) si trova

$$\begin{aligned}
a_{nl} &= \frac{c\,q\,n^2k^2}{2\,i\,\sqrt{\pi}} \sqrt{l\,(l+1)\,(2l+1)}\,(n\beta)^{l} \\
&\qquad \sum_{\substack{s\ge 0\\ 2s\ge n-l}} \left(-\tfrac14 n^2\beta^2\right)^{s} \frac{(s+l)!\,(2s+l-1)!}{s!\,(2s+2l+1)!\,\left[s+\frac12(l-n)\right]!\,\left[s+\frac12(l+n)\right]!}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Termini dominanti e casi semplici

Dalla (20) si vede che il termine dominante di a_{nl} va come $k^2\beta^m$, dove $m = \max(n,l)$. I termini successivi crescono per potenze pari di β. Quanto alla potenza irraggiata, la (8′) mostra che i diversi a_{nl} contribuiscono in modo incoerente; il termine dominante per a_{nl} va come $k^2\beta^{2m}$, e i successivi vanno anch'essi per potenze crescenti di β^2.

Proviamo a studiare i termini più bassi della potenza, fino a β^6. Questi si otterranno dai primi tre termini di a_{11}, dai primi due di a_{22}, e dal primo di a_{31}, di a_{13} e di a_{33}. Ponendo per brevità

$$Q = \frac{c\,q}{2i\sqrt{\pi}}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{Q}{\sqrt{6}}\,k^2\beta\left(1 - \tfrac{1}{40}\,\beta^2 + \tfrac{1}{2240}\,\beta^4 + \cdots\right)\\
a_{22} &= \frac{4\,Q}{\sqrt{30}}\,k^2\beta^2\left(1 - \tfrac{1}{7}\,\beta^2 + \cdots\right)\\
a_{31} &= -\frac{27\sqrt{6}}{80}\,Q\,k^2\beta^3 + \cdots\\
a_{13} &= \frac{Q\,\sqrt{21}}{420}\,k^2\beta^3 + \cdots\\
a_{33} &= \frac{27\sqrt{21}}{140}\,Q\,k^2\beta^3 + \cdots\\
\overline{W}_{11} &= \tfrac{1}{3}\,Z_0\,|Q|^2\,k^2\beta^2\left(1 - \tfrac{1}{20}\,\beta^2 + \frac{17}{7\cdot 1600}\,\beta^4 + \cdots\right)\\
\overline{W}_{22} &= \tfrac{4}{15}\,Z_0\,|Q|^2\,k^2\beta^4\left(1 - \tfrac{2}{7}\,\beta^2 + \cdots\right)\\
\overline{W}_{31} &= \tfrac{243}{1600}\,Z_0\,|Q|^2\,k^2\beta^6 + \cdots\\
\overline{W}_{13} &= \tfrac{1}{4200}\,Z_0\,|Q|^2\,k^2\beta^6 + \cdots\\
\overline{W}_{33} &= \tfrac{243}{1400}\,Z_0\,|Q|^2\,k^2\beta^6 + \cdots
\end{aligned}$$

e si vede che nella radiazione di dipolo ci sono termini dello stesso ordine del quadrupolo e seguenti.

È dunque dimostrato che lo sviluppo in potenze di β *non corrisponde* allo sviluppo in multipoli: ogni termine di multipolo (per una data armonica) è una serie di potenze in β, mentre a ogni termine di dato ordine in β contribuiscono più multipoli e più armoniche.

Sommando tutte le potenze parziali, e semplificando:

$$\overline{W} = \frac{Z_0}{12\,\pi}\,q^2\omega^2\beta^2\left(1 + \tfrac{3}{4}\,\beta^2 + \tfrac{3}{4}\,\beta^4 + \cdots\right)$$

che concorda con la $(6')$ in tutti gli ordini calcolati.

Appendice 1: calcolo dell'integrale (5)

Per prima cosa pongo $\psi = 2\varphi$:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)}{\left[1 - \frac{1}{2}\beta^2(1-\cos 2\varphi)\right]^3}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{\frac{1}{2}(1+\cos\psi)}{\left[1 - \frac{1}{2}\beta^2(1-\cos\psi)\right]^3}\, d\psi =$$

$$4\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\psi}{\left[2-\beta^2(1-\cos\psi)\right]^3}\, d\psi = \frac{4}{\beta^6}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\psi}{(\mu+\cos\psi)^3}\, d\psi.$$

dove

$$\mu = \frac{2}{\beta^2} - 1 \tag{A1.1}$$

(osserviamo che $\mu > 1$).

Per calcolare l'integrale conviene partire da quest'altro:

$$F(\mu) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\mu + \cos\psi}. \tag{A1.2}$$

Infatti

$$F'(\mu) = -\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(\mu+\cos\psi)^2}$$

$$F''(\mu) = 2\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(\mu+\cos\psi)^3}$$

e di conseguenza

$$I = -\frac{2}{\beta^6}\,[2\,F'(\mu) + (\mu-1)\,F''(\mu)]. \tag{A1.3}$$

L'integrale (A1.2) si calcola col metodo dei residui, previa sostituzione $z = e^{i\psi}$:

$$F(\mu) = -\,2i \oint_{\mathrm{K}} \frac{dz}{z^2 + 2\mu z + 1}$$

dove K è la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Il denominatore ha due zeri, dei quali solo uno è interno a K e vale $-\mu + \sqrt{\mu^2-1}$; si trova così

$$F(\mu) = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu^2-1}}.$$

Calcolando le derivate e sostituendo nella (A1.3) arrivo infine a

$$I = \frac{4\pi}{\beta^6}\,\frac{(\mu-1)(2\mu-1)}{(\mu^2-1)^{5/2}} = \pi\,\frac{1-\frac{3}{4}\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

Appendice 2: calcolo degli integrali (15) e (17)

Per K_{np} si parte con la sostituzione $v = \cos\varphi$:

$$K_{np} = \int_0^{\pi/2} d\varphi\,\cos^p\varphi\,\cos(n\varphi).$$

Dall'identità

$$\cos^p\varphi = \frac{1}{2^{p-1}}\left[\sum_{q=0}^{\lfloor p/2\rfloor}\binom{p}{q}\cos(p-2q)\varphi - \varepsilon_p\binom{p}{p/2}\right]$$

(dove $\varepsilon_p = 1/2$ se p è pari, $= 0$ se p è dispari) segue

$$\cos^p\varphi\,\cos n\varphi = \\ \frac{1}{2^p}\left\{\sum_{q=0}^{\lfloor p/2\rfloor}\binom{p}{q}\left[\cos(p-2q+n)\varphi + \cos(p-2q-n)\varphi\right] - \varepsilon_p\binom{p}{p/2}\cos n\varphi\right\}.$$

Occorre ora integrare questa tra 0 e $\pi/2$, ricordando che n e p hanno la stessa parità, e che $n > 0$. Perciò tutti i termini danno contributo nullo, escluso quello con $p - 2q - n = 0$, che a sua volta si annulla se $n > p$. Risultato:

$$K_{np} = \frac{\pi}{2^{p+1}}\binom{p}{(p-n)/2} \quad \text{solo se} \quad n \le p. \tag{A2.1}$$

Stessa sostituzione per L_{np}:

$$\begin{aligned} L_{np} &= \int_0^{\pi/2} d\varphi\,\cos^{p+1}\varphi\,\sin\varphi\,\sin(n\varphi) \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi\,\cos^{p+1}\varphi\left[\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left(K_{n-1,p+1} - K_{n+1,p+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{p+3}}\left[\binom{p+1}{(p-n+2)/2} - \binom{p+1}{(p-n)/2}\right] \\ &= \frac{\pi}{2^{p+3}}\,\frac{n}{p+2}\binom{p+2}{(p-n+2)/2}. \end{aligned}$$

Tenendo conto della limitazione sugli argomenti dei coefficienti binomiali, si ha in conclusione

$$L_{np} = \frac{\pi}{2^{p+3}} \frac{n}{p+2} \binom{p+2}{(p-n+2)/2} \quad \text{solo se} \quad n \leq p+2. \tag{A2.2}$$