

## Barca su tronchi

### Enunciato del problema

Un blocco parallelepipedo rettangolo è appoggiato su due rulli paralleli, tra loro uguali — cilindrici, omogenei e rigidi — che a loro volta poggiano su un piano orizzontale. Si assume che tra blocco e rulli, come pure tra rulli e piano, sia presente il solo attrito radente.

Al blocco è applicata, all'altezza del centro di massa, una forza orizzontale costante. Studiare il moto del blocco e in particolare la condizione sotto cui si ha puro rotolamento, sia tra blocco e rulli, sia tra rulli e piano.

### Definizioni e notazioni

A tutti gli effetti il problema può essere trattato in due dimensioni, per cui parlerò ad es. di “punto di contatto” quando in realtà si tratta di una “generatrice di contatto,” ecc.

Distinguerò con gli indici  $1, 2$  i due rulli, risp. nell'ordine concorde col verso della forza applicata. I punti di contatto tra rulli e blocco li chiamo  $A_1, A_2$ ; quelli di contatto tra rulli e piano saranno  $B_1, B_2$ .

Indico con  $M$  la massa del blocco, con  $\mathbf{P}$  il suo peso ( $|\mathbf{P}| = Mg$ ); con  $m$  la massa di ciascun rullo, con  $\mathbf{P}_{r1}, \mathbf{P}_{r2}$  i loro pesi ( $|\mathbf{P}_{r1}| = |\mathbf{P}_{r2}| = mg$ ). Il raggio dei rulli sia  $r$ .

Siano ancora  $s_1, s_2$  le distanze orizzontali del centro di massa  $G$  del blocco da  $A_1, A_2$ . Durante il moto  $s_1$  e  $s_2$  cambieranno: solo la loro somma resterà costante, come vedremo. Pono  $a = s_1 + s_2$ . Indicherò ancora con  $h$  l'altezza di  $G$  sulla base del blocco.

La velocità del centro dei rulli è  $\mathbf{u}$  (è la stessa per entrambi, v. dopo); la velocità del blocco è  $\mathbf{v}$ . Con  $\omega$  indicherò il modulo della velocità angolare dei rulli.

Quanto alle forze,  $\mathbf{R}_{1b}$  è la forza che il rullo 1 esercita sul blocco;  $\mathbf{R}_{b1}$  quella che il blocco esercita sul rullo 1;  $\mathbf{R}_{1p}$  la forza del rullo 1 sul piano,  $\mathbf{R}_{p1}$  quella del piano sul rullo 1. Analoga notazione per il rullo 2.

### Dal terzo principio

Delle forze esistenti, buona parte sono a due a due opposte per il terzo principio:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1b} &= -\mathbf{R}_{b1} & \mathbf{R}_{2b} &= -\mathbf{R}_{b2} \\ \mathbf{R}_{1p} &= -\mathbf{R}_{p1} & \mathbf{R}_{2p} &= -\mathbf{R}_{p2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Potrò quindi fare a meno di usare  $\mathbf{R}_{1b}, \mathbf{R}_{2b}, \mathbf{R}_{1p}, \mathbf{R}_{2p}$ .

## Assi e componenti

Conviene introdurre assi cartesiani orientati come segue:  $x$  orizzontale, concorde con  $\mathbf{F}$ ;  $y$  verticale, concorde con  $\mathbf{P}$ ;  $z$  di conseguenza (servirà solo per esprimere i momenti).

Per come è descritto il moto,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  hanno solo le componenti  $x$ , che indicherò semplicemente con  $u$ ,  $v$  (in linea di principio grandezze con segno, anche se di fatto sono positive).

Ancora: La forza  $\mathbf{F}$  ha la sola componente  $x$  (positiva per definizione) che indicherò con  $F$ ; i pesi  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}_{r1}$ ,  $\mathbf{P}_{r2}$  hanno solo le componenti  $y$ , che indico con  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ . Invece  $\mathbf{R}_{b1}$  ecc. hanno entrambe le componenti  $x$  e  $y$ ; per alleggerire la notazione indicherò con  $X_{b1}$ ,  $Y_{b1}$  le componenti di  $\mathbf{R}_{b1}$ , ecc.

Osserviamo che per non avere distacco del blocco dai rulli dovranno essere soddisfatte le disuguaglianze:

$$Y_{b1} \geq 0 \quad Y_{b2} \geq 0$$

e per non avere distacco tra rulli e piano:

$$Y_{p1} \leq 0 \quad Y_{p2} \leq 0.$$

Invece i segni delle componenti  $x$  sono per ora incogniti.

## La condizione di puro rotolamento

Se si ha puro rotolamento dei rulli sul piano, i punti  $B_1$ ,  $B_2$  sono istantaneamente fermi, e quindi la velocità del centro del rullo 1 vale  $\omega r$ , e lo stesso è vero per il rullo 2; abbiamo così dimostrato che  $u = \omega r$  è la velocità comune dei centri dei due rulli.

Quanto ai punti  $A_1$ ,  $A_2$ , il puro rotolamento implica che essi abbiano la stessa velocità sia se pensati come appartenenti al rullo, sia al blocco. Dunque la velocità del blocco è

$$v = 2\omega r = 2u. \quad (2)$$

## Relazioni di attrito statico

Se si ha puro rotolamento, l'attrito radente nei vari punti di contatto soddisfa la condizione dell'attrito statico. Assumendo uguali coefficienti di attrito  $\mu$  in tutti i punti, avremo

$$\begin{aligned} |X_{b1}| &\leq \mu Y_{b1} & |X_{b2}| &\leq \mu Y_{b2} \\ |X_{p1}| &\leq -\mu Y_{p1} & |X_{p2}| &\leq -\mu Y_{p2} \end{aligned} \quad (3)$$

### Equazioni cardinali per il blocco

Per la prima equazione cardinale dobbiamo considerare le due componenti  $x$  e  $y$ , che sono

$$\begin{aligned}M \dot{v} &= F - X_{b1} - X_{b2} \\ 0 &= P - Y_{b1} - Y_{b2}\end{aligned}$$

(ho fatto uso delle(1)).

La seconda equazione cardinale ha solo la componente  $z$ . Prendendo i momenti rispetto a G:

$$s_1 Y_{b1} - s_2 Y_{b2} + h X_{b1} + h X_{b2} = 0$$

perché il moto del blocco è traslatorio, quindi il suo momento angolare rispetto a G è costantemente nullo.

### Equazioni cardinali per i rulli

Cominciamo col rullo 1. La prima equazione cardinale (nelle due componenti) è

$$\begin{aligned}m \dot{u} &= X_{b1} + X_{p1} \\ 0 &= P_1 + Y_{b1} + Y_{p1}.\end{aligned}$$

(La seconda è giustificata dalla condizione che il rullo non si debba distaccare dal piano, per cui la  $y$  del suo centro di massa è costante.)

Quanto alla seconda equazione cardinale, sempre scritta rispetto al centro di massa:

$$I \dot{\omega} = r X_{b1} - r X_{p1}$$

dove  $I = \frac{1}{2} m r^2$  è il momento d'inerzia del rullo rispetto al suo asse di simmetria.

Per il rullo 2 le equazioni sono del tutto simili:

$$\begin{aligned}m \dot{u} &= X_{b2} + X_{p2} \\ 0 &= P_2 + Y_{b2} + Y_{p2} \\ I \dot{\omega} &= r X_{b2} - r X_{p2}.\end{aligned}$$

### Conteggio delle incognite e semplificazione delle equazioni

Per cominciare ricopio tutte le equazioni trovate:

$$M \dot{v} = F - X_{b1} - X_{b2} \tag{4}$$

$$0 = P - Y_{b1} - Y_{b2} \tag{5}$$

$$s_1 Y_{b1} - s_2 Y_{b2} + h X_{b1} + h X_{b2} = 0 \quad (6)$$

$$m \dot{u} = X_{b1} + X_{p1} \quad (7)$$

$$0 = P_1 + Y_{b1} + Y_{p1} \quad (8)$$

$$I \dot{\omega} = r X_{b1} - r X_{p1} \quad (9)$$

$$m \dot{u} = X_{b2} + X_{p2} \quad (10)$$

$$0 = P_2 + Y_{b2} + Y_{p2} \quad (11)$$

$$I \dot{\omega} = r X_{b2} - r X_{p2}. \quad (12)$$

Come si vede, le equazioni sono 9. Le incognite sono:  $u, v, \omega, X_{b1}, X_{b2}, Y_{b1}, Y_{b2}, X_{p1}, X_{p2}, Y_{p1}, Y_{p2}$ . Però  $u, v, \omega$  sono legate dalla (2); quindi anche le incognite sono 9.

Le (4)–(12) possono essere semplificate usando la (2) e le definizioni di  $P, P_1, P_2$ :

$$M \dot{v} = F - X_{b1} - X_{b2} \quad (4')$$

$$0 = M g - Y_{b1} - Y_{b2} \quad (5')$$

$$s_1 Y_{b1} - s_2 Y_{b2} + h X_{b1} + h X_{b2} = 0 \quad (6')$$

$$m \dot{v} = 2 X_{b1} + 2 X_{p1} \quad (7')$$

$$0 = m g + Y_{b1} + Y_{p1} \quad (8')$$

$$m \dot{v} = 4 X_{b1} - 4 X_{p1} \quad (9')$$

$$m \dot{v} = 2 X_{b2} + 2 X_{p2} \quad (10')$$

$$0 = m g + Y_{b2} + Y_{p2} \quad (11')$$

$$m \dot{v} = 4 X_{b2} - 4 X_{p2}. \quad (12')$$

Si possono separare le (4')–(12') in due gruppi. Le (4'), (7'), (9'), (10'), (12') contengono solo le  $X$ :

$$M \dot{v} = F - X_{b1} - X_{b2} \quad (4')$$

$$m \dot{v} = 2 X_{b1} + 2 X_{p1} \quad (7')$$

$$m \dot{v} = 4 X_{b1} - 4 X_{p1} \quad (9')$$

$$m \dot{v} = 2 X_{b2} + 2 X_{p2} \quad (10')$$

$$m \dot{v} = 4 X_{b2} - 4 X_{p2}. \quad (12')$$

Le (5'), (8'), (11') contengono solo le  $Y$ :

$$0 = M g - Y_{b1} - Y_{b2} \quad (5')$$

$$0 = m g + Y_{b1} + Y_{p1} \quad (8')$$

$$0 = m g + Y_{b2} + Y_{p2} \quad (11').$$

Resta a parte la (6'), che mescola le  $X$  e le  $Y$ :

$$s_1 Y_{b1} - s_2 Y_{b2} + h X_{b1} + h X_{b2} = 0. \quad (6')$$

### Soluzioni

Le equazioni del primo blocco si risolvono facilmente:

$$X_{p1} = X_{p2} = \frac{m F}{8 M + 6 m} \quad (13)$$

$$X_{b1} = X_{b2} = 3 X_{p1} \quad (14)$$

$$\dot{v} = \frac{4 F}{4 M + 3 m}. \quad (15)$$

Le equazioni del secondo blocco, insieme con la (6') e con le (13), (14), determinano le  $Y$ :

$$Y_{b1} = \frac{s_2}{a} M g - Q \quad (16)$$

$$Y_{b2} = \frac{s_1}{a} M g + Q \quad (17)$$

$$Y_{p1} = -\frac{s_2}{a} M g - m g + Q \quad (18)$$

$$Y_{p2} = -\frac{s_1}{a} M g - m g - Q \quad (19)$$

dove ho introdotto l'abbreviazione

$$Q = \frac{3 m h F}{a(4 M + 3 m)}. \quad (20)$$

### Discussione

Non ci sono particolari commenti da fare alle (13)–(15), a parte il fatto controintuitivo che non solo sono positive  $X_{b1}$  e  $X_{b2}$ , ma anche  $X_{p1}$  e  $X_{p2}$ .

Quanto alle  $Y$ ,  $Y_{b2}$  è chiaramente positiva, e  $Y_{p2}$  chiaramente negativa, come l'intuizione già suggeriva. Quindi non si avrà mai distacco al rullo 2. Diversamente per  $Y_{b1}$ , che è  $> 0$  sse

$$F < \frac{s_2 g}{3h} \frac{M}{m} (4 M + 3 m). \quad (21)$$

Questa condizione è certamente soddisfatta se  $F = 0$ ; lo è anche se  $h$  è abbastanza piccolo o se  $m$  è piccola. Ma può essere violata in condizioni opportune, dando luogo a distacco nel punto  $A_1$  dove il blocco tocca il rullo 1.

Osservo che  $Y_{p1} > Y_{p2}$ , dato che  $Q > 0$ . Ciò significa che il primo punto dove può avvenire il distacco, per es. al crescere di  $F$ , non è mai  $B_1$ .

La (21) cessa di valere se  $s_2 = 0$ , ossia se  $G$  arriva sopra  $A_2$  (cosa che accadrà di certo, visto che  $G$  ha in ogni istante velocità doppia di  $A_2$ ). Quindi il distacco avviene necessariamente prima che  $G$  raggiunga  $A_2$ . Pertanto durante il moto “normale” (blocco appoggiato sui rulli, in puro rotolamento) certamente  $s_2 > 0$ .

Passiamo alle condizioni per avere puro rotolamento, espresse dalle (3). Dato che  $X_{b1}, X_{b2}$  sono maggiori di  $X_{p1}, X_{p2}$ , mentre  $|Y_{p1}| < Y_{b1}$  e  $|Y_{p2}| < Y_{b2}$ , le (3) sono soddisfatte nei punti  $B_1, B_2$  se lo sono in  $A_1, A_2$ . Inoltre  $X_{b1} = X_{b2}$ , mentre  $Y_{p1} < Y_{p2}$ : dunque il punto critico, quello dove potrà iniziare lo slittamento, è  $A_1$ .

Intuitivamente questo si capisce: i punti  $B$  hanno un carico (verticale) maggiore degli  $A$ , a causa del peso dei rulli. Poi il rullo 2 è caricato di più di 1, per la presenza della forza acceleratrice  $F$ . Il solo fatto non intuitivo è che le componenti orizzontali delle forze tra rulli e piano siano minori di quelle tra rulli e blocco, ma di questo si è già detto.

Usando le (13), (14), (17) e la definizione (20) di  $Q$ , la prima delle (3) si scrive

$$\frac{3 m F}{8 M + 6 m} \leq \mu \left[ \frac{s_2}{a} M g - \frac{3 m h F}{a (4 M + 3 m)} \right]$$

ovvero

$$F < \frac{s_2 g}{3 \left( h + \frac{a}{2 \mu} \right)} \frac{M}{m} (4 M + 3 m). \quad (22)$$

Il confronto della (22) con la (21) mostra che il secondo membro della prima è minore di quello della seconda; dunque la condizione di puro rotolamento (22) è più stringente di quella di distacco (21). Di nuovo c'è che un coefficiente d'attrito piccolo rende più difficile soddisfare la (22) (ovvio) mentre uno grande l'avvicina alla condizione di distacco.