

Richiami teoria degli errori

- Il risultato di una misura è una variabile casuale, distribuita secondo una funzione $p(x)$.
- La funzione p solitamente ha una forma a campana, ovvero ha un massimo più o meno pronunciato vicino alla media.
- I casi più comuni sono quelli in cui p è gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- oppure uniforme in un intervallo:

$$p(x) = 1/\Delta \quad \mu - \Delta/2 < x < \mu + \Delta/2; \quad p(x) = 0 \quad \text{al di fuori dell'intervallo}$$

- Il caso gaussiano è di grande importanza teorica, a causa del teorema del limite centrale

Richiami teoria degli errori

- Per condensare l'informazione di $p(x)$ si riporta comunemente il risultato nella forma:

$$x = x_0 \pm \sigma$$

- Il risultato x_0 è una stima della media μ della distribuzione e s un parametro che stima la larghezza della distribuzione, ed è detta *incertezza*.
- L'uso più comune, consigliato anche dal consorzio per gli standard ISO, è quello di utilizzare come incertezza s una stima della deviazione standard σ della distribuzione $p(x)$. A volte si trovano però altre definizioni.....
- Si confondono spesso gli *errori* (differenze tra le misure e il valor medio) con le *incertezze*

Come si stima la media della distribuzione?

- Se si ha una sola misura, quella è la miglior stima disponibile della media.
- Se si hanno più misure effettuate nelle stesse identiche condizioni sperimentali, allora la media delle misure sarà la migliore stima possibile.
- Se si hanno più misure con incertezze diverse, allora è possibile migliorare la stima pesando ogni misura con l'inverso dell'incertezza al quadrato (vedremo poi.....)
- A volte però la media delle misure non tende al risultato vero: si dice in tal caso che la misura è affetta da errore sistematico: gli errori sistematici andrebbero stimati e la media corretta di conseguenza. Quando non è possibile, si aumenta l'incertezza di una quantità ragionevole (NON SCELTA A CASO!)

Come si stimano le incertezze?

- Esistono due modi per stimare le incertezze:
 - dai dati stessi (A)
 - a priori, in base alle caratteristiche degli strumenti adoperati o eventualmente tramite un insieme di misure realizzato appositamente (B)
- Nei molti casi in cui entrambi i metodi sono applicabili, è utile fare un confronto per capire quanto bene conosciamo il nostro apparecchio, e per identificare sorgenti di errore sconosciute.
- La stima dell'incertezza è ovviamente affetta da errore, e quindi bisognerebbe stimare l'incertezza sull'incertezza. Di solito si accontenta di stimare le incertezze entro il 20%-30%.
- Per riportare un'incertezza, una cifra sola è poca e due sono troppe: utilizzare due cifre nei calcoli intermedi, e arrotondare ad una sola cifra nel risultato finale (ma attenzione a quando si arrotonda 0.14 con 0.1....)

Primo metodo

- Se si ha a disposizione una sola misura diretta, l'incertezza dipenderà dalla precisione strumentale e da eventuali altri fattori di disturbo.
- Vedremo in seguito come valutare caso per caso la precisione strumentale.
- Nel caso di misura indiretta, quando cioè il risultato dipende da altre misure tramite una funzione f , si adopera la formula per la propagazione degli errori:

$$y = f(x_1 \dots x_n)$$
$$\sigma_y^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2$$

- Se gli errori NON sono indipendenti, le cose si complicano.....

Qualche osservazione

- Se la funzione f è un prodotto di potenze, le formule si semplificano:

$$y = x_1^a x_2^b x_3^c \quad \frac{\sigma_y^2}{y^2} = \left(a \frac{\sigma_1}{x_1} \right)^2 + \left(b \frac{\sigma_2}{x_2} \right)^2 + \left(c \frac{\sigma_3}{x_3} \right)^2$$

- Ovvero: le incertezze percentuali si sommano quadraticamente, pesate con l'esponente.
- La misura della quantità che contribuisce di più all'errore è quella che limita la precisione finale: in tal caso, è inutile spendere tempo e denaro per migliorare le altre misure, e conviene concentrarsi su quella.
- Se l'incertezza dovuta ad una misura è molto inferiore alle altre, è lecito trascurarla, se si ha ben chiaro quello che si sta facendo.....

Esempio 1 : uguali incertezze

- Si supponga di avere effettuato N misure nelle stesse identiche condizioni, ottenendo una serie di risultati x_n

- Allora, la migliore stima della media sarà la media stessa

$$\mu \cong \bar{x} = \frac{\sum_{n=1, N} x_n}{N}$$

- La deviazione standard delle misure sarà una stima dell'incertezza con cui è stata effettuata ogni singola misura

Questo risultato va confrontato con la stima indipendente dell'incertezza

$$\sigma_{x_n} \cong s_x = \sqrt{\frac{\sum_{n=1, N} (x_n - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

- La deviazione standard della media, stimata dividendo per $N/2$ le misure, sarà una stima dell'errore sulla media:

$$\sigma \cong \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \cong \frac{s_n}{\sqrt{N}}$$

Esempio 2: misure con differenti incertezze

- Stavolta si effettuino N misure con impostazioni diverse
- Per ogni misura x_n , si ha a disposizione una stima dell'incertezza σ_n
- Allora, la stima più precisa della media si ottiene tramite la media pesata:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1,N} x_n w_n}{\sum_{n=1,N} w_n} \quad w_n = \frac{1}{\sigma_n^2}$$

- La stima della deviazione standard sulla media si ottiene da:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_n}} = \frac{1}{\sqrt{\sum 1/\sigma_n^2}}$$

- N.B: Se le incertezze sono uguali, le formule diventano uguali a quelle precedenti!!!!

Test del χ^2

- Il χ^2 è definito come:

$$\chi^2 = \sum_{n=1, N} \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\sigma_n} \right)^2$$

- E' una variabile casuale (dipende da N numeri casuali) distribuita con media pari a N-1...
- Intuitivamente, se questo risultato è molto maggiore di N-1, vuol dire che i dati sono più distanti dalla media di quanto previsto dagli errori: è un cattivo segno, può voler dire che le misure non si riferiscono alla stessa quantità (ad esempio, la grandezza oggetto di misura varia nel tempo)
- Ma anche se il risultato è molto minore di N-1 la situazione è sospetta: infatti è probabile che le incertezze siano stimate in eccesso, oppure che le misure siano correlate....

Test del χ^2

- Il test del χ^2 permette di confrontare la distribuzione dei dati con le incertezze previste
- Supponiamo di avere un insieme di misure distribuite in modo gaussiano: allora gli errori, definiti come $e_n = x_n - m$, dove m è il valore medio della distribuzione, sono distribuiti in modo gaussiano con media zero.
- Gli errori normalizzati, definiti come $r_n = e_n / s_n$ sono invece distribuiti in modo gaussiano con media 0 e deviazione standard 1.
- Allora, ci si aspetta intuitivamente che r_n^2 sia in media 1...
- Ma la media vera e la deviazione standard vera non sono conosciute....
- sostituisco la media con la sua stima e la deviazione standard con le incertezze attese in base alle misure...