

Onde gravitazionali

Le equazioni di Einstein linearizzate si possono scrivere sotto la forma di una equazione d'onda per il tensore di perturbazione della metrica $h_{\mu\nu}$, che si propaga con velocità c

Per un'onda che si propaga nella direzione z e con la scelta di gauge TT (trasversa a traccia nulla)

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i(\Omega t - kz)}$$

L'onda è descritta da un tensore, ma ci sono solo due soluzioni indipendenti, corrispondenti alle polarizzazioni $+$ e \times .

Questo ci fa dire che in teoria dei campi, il quanto che media l'interazione gravitazionale ha spin 2 per via delle proprietà di trasformazione per rotazione dei tensori. Inoltre esso ha massa nulla per la presenza di due sole polarizzazioni (stati di elicità), mentre una particella di spin 2 con massa diversa da zero ha 5 stati di spin possibili.

Effetto dell'onda gravitazionale

Consideriamo una massa libera e un sistema di coordinate in caduta libera con gauge TT. L'equazione per la geodetica

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

Per una massa inizialmente ferma ($U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$) l'equazione diventa in quell'istante

$$\left. \frac{dU^\alpha}{d\tau} \right|_0 = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) = 0$$

La coordinata di quella massa rimane costante se la massa è inizialmente ferma

Effetto dell'onda gravitazionale II

Consideriamo la polarizzazione $+$. L'elemento di metrica è

$$ds^2 = dt^2 - (1 + h_+)dx^2 - (1 - h_+)dy^2 - dz^2$$

Per un raggio di luce ($ds^2 = 0$) che si propaga lungo l'asse x

$$dt^2 = (1 + h_+)dx^2$$

Consideriamo un percorso di andata e ritorno tra due masse di prova in caduta libera. Nella gauge TT abbiamo detto che la separazione tra le masse non cambia.

Viceversa il tempo di percorrenza del segnale è dato da

$$\int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{\text{percorso}} \sqrt{1 + h_+} dx$$

e varia se h_+ dipende dal tempo.

Rivelazione attraverso misure di tempo

Consideriamo un'onda descritta da $h \cos(\Omega t + \phi)$ e un segnale luminoso che percorre una distanza L lungo x e torna indietro. L'integrazione lungo il percorso risulta in

$$t_1 - t_0 = \frac{2L}{c} \left[1 - \frac{h \sin \frac{\Omega L}{c}}{2 \frac{\Omega L}{c}} \cos \left(\Omega \left(t_1 - \frac{L}{c} \right) + \phi \right) \right]$$

In un sistema di riferimento rigido questo corrisponderebbe a uno spostamento

$$\delta x = L \frac{h \sin \frac{\Omega L}{c}}{2 \frac{\Omega L}{c}} \cos \left(\Omega \left(t_1 - \frac{L}{c} \right) + \phi \right)$$

Si vede che il tempo di percorrenza segue la forma del segnale per $\Omega L/c \ll 1$.

Se consideriamo N andate e ritorno occorre sostituire L con NL .

Non si ha dipendenza dal tempo se $\Omega L/c = k\pi$, cioè se $2L$ è multiplo della lunghezza d'onda gravitazionale. Per frequenze maggiori del primo zero $\Omega_1 = \pi c/L$ la risposta è limitata da un involuppo proporzionale a $1/(\Omega L/c)$. E' possibile aumentare $t_1 - t_0$ aumentando la lunghezza L oppure N , ma in pratica si ha un taglio alla frequenza $\Omega_c \sim c/L$.

Anticipando che le sorgenti astrofisiche più promettenti hanno $h \sim 10^{-23}$ e che sulla Terra si arriva a $L = 3 - 4$ km, si vede che lo spostamento equivalente è

$$\delta x = L \frac{h}{2} = 1.5 - 2 \times 10^{-20} \text{ m}$$

Oggetti compatti: sorgenti di onde gravitazionali

La radiazione gravitazionale, in analogia con quella elettromagnetica, è dovuta al moto accelerato delle masse. Per un moto non relativistico avremo

$$h_{ij} = \frac{2G}{Rc^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho_0 y_i y_j d^3 y \right)$$

Abbiamo

$$I_{ij} = \int \rho_0 y_i y_j d^3 y$$

momento di quadruplo della sorgente.

Occorre la parte TT. Introduciamo il momento di quadrupolo ridotto

$$\tilde{I}_{ij} = \int T_{00} (y_i y_j - \delta_{ij} y_k y_k) d^3 y$$

di cui dobbiamo prendere la parte trasversa attraverso l'operatore di proiezione

$$P_{jl} = (\delta_{jl} - n_j n_l)$$

dove n_i è il versore proveniente dalla sorgente. Abbiamo

$$I_{ij}^T = P_{il} P_{jm} \tilde{I}_{lm}$$

che ha traccia

$$I_{jj}^T = P_{jl} P_{jm} \tilde{I}_{lm} = (\delta_{lm} - n_l n_m) \tilde{I}_{lm} = P_{lm} \tilde{I}_{lm} = P_{jj} P_{lm} \tilde{I}_{lm} / 2.$$

Si è usato $P_{jj} = (\delta_{jj} - n_j n_j) = 2$

Oggetti compatti: sorgenti di onde gravitazionali II

Quindi

$$I_{ij}^{TT} = P_{il}P_{jm}\tilde{I} - P_{ij}P_{lm}\tilde{I}_{lm}/2$$

Il flusso di energia è dato da:

$$\begin{aligned} F &= \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle \\ &= \frac{G}{8\pi r^2 c^5} \langle \ddot{I}_{ij}^{TT} \ddot{I}_{ij}^{TT} \rangle \end{aligned}$$

Una espressione per calcolare l'ordine di grandezza della luminosità è

$$L \approx L_0 (r_0/R)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6$$

con

$$L_0 = c^5/G = 3.63 \times 10^{52} \text{ W}$$

R è il raggio del corpo e r_0 è il suo raggio di Schwarzschild del corpo.

A causa del fattore G/c^5 è necessario considerare per l'emissione di onde gravitazionali intere stelle. Per ottenere elevate accelerazioni è necessario disporre di oggetti compatti.

Oggetti compatti

Le stelle di neutroni sono tra gli oggetti astrofisici più compatti e pesanti che si conoscano. La massa tipica è di $1.4M_{\odot}$ e il raggio è dell'ordine di 10 km.

In queste condizioni gli atomi collassano sotto la pressione gravitazionale e avviene la reazione di decadimento β inverso



per cui si giunge a una massa compatta di neutroni con proprietà particolari e con una superficie solida (crosta) dove la pressione non è stata sufficiente per avere una maggioranza di neutroni.

Le stelle di neutroni sono state identificate attraverso l'emissione radio. Infatti alla loro superficie si generano dei campi magnetici molto intensi ($\sim 10^8 T$) e una stella in rotazione trascina con il suo campo magnetico le cariche presenti. Ciò genera onde radio rivelabili sulla Terra, che hanno un periodo determinato dalla rotazione della stella di neutroni, detta pulsar, e che in diversi casi risultano essere stabili quanto gli orologi atomici più precisi.

Le stelle a neutroni provengono dal collasso di una stella che ha terminato il suo combustibile (Supernova).

Oggetti compatti II

Se la stella ha una massa tra $\sim 8 - 25M_{\odot}$, è probabile che dalle ceneri del collasso nasca una stella di neutroni di massa fino a $1.4M_{\odot}$. Il resto della massa viene disperso nel collasso.

Se la stella ha una massa maggiore di $\sim 25M_{\odot}$, la materia di neutroni si comprime fino a giungere al raggio di Schwarzschild e si ritiene che si debba formare invece un buco nero.

Il collasso stellare e la rotazione di una stella di neutroni non simmetrica sono due sorgenti possibili di onde gravitazionali, in quanto coinvolgono accelerazioni elevate di grande quantità di materia.

Sistemi binari

L'evidenza dell'esistenza della radiazione gravitazionale proviene dall'analisi dei segnali di una pulsar. Questa analisi ha mostrato che si era in presenza di una pulsar orbitante intorno a un altro oggetto compatto. L'analisi del periodo in funzione del tempo ha mostrato che il raggio dell'orbita della pulsar diminuisce in accordo con le previsioni della Relatività Generale entro qualche per mille.

Oggi sono noti cinque sistemi composti da due stelle di neutroni.

Siamo in presenza di un sistema a due corpi, il cui moto, compreso l'irraggiamento, è abbastanza semplice da calcolare, per lo meno agli ordini più bassi in v/c .

Questo sistema, nella fase finale della sua esistenza, avrà una frequenza orbitale di diverse centinaia di Hz e l'energia emessa sotto forma di onde gravitazionali sarà molto elevata.

Questo è il sistema più promettente per la ricerca di un segnale di onde gravitazionali sulla Terra, anche se la probabilità di essere in presenza di un sistema prossimo al collasso è molto bassa.

Sistemi analoghi in cui una o entrambe le stelle sono sostituite da buchi neri sono più che plausibili, ma, contrariamente al caso NS-NS, non se ne conosce nessuno.

Scala delle distanze astronomiche

Le distanze in astronomia sono piuttosto difficili da misurare, in quanto non si dispone di metodi geometrici, se non a piccole distanze, come si vede dalla definizione di parsec: distanza di una stella con errore di parallasse di un secondo d'arco quando ci si muove di una unità astronomica.

Le principali distanze sono indicate dalla seguente tabella

Quantità	Valore	Note
1 anno-luce	0.946×10^{16} m	
1 parsec (pc)	3.086×10^{16} m	3.262 anni-luce
Centro della Galassia	10 kpc	Alta densità di stelle e probabile buco nero
Diametro della Galassia	~ 30 kpc	Si stima che nella nostra Galassia ci siano 10^9 NS
Galassia più vicina	60 kpc	
L'ammasso Virgo di galassie	~ 20 Mpc	2500 galassie
Orizzonte	5 Gpc	

La valutazione delle grandi distanze passa attraverso la costante di Hubble

$$H_0 = 100h_0 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = h_0 \times 9.78 \text{ Gyr}^{-1}$$

$h_0 \simeq 0.72$ è la costante di Hubble normalizzata.

evidenza per l'esistenza delle onde gravitazionali

Osservazione dal 1975 in poi della pulsar PSR1913+16 scoperta da Hulse e Taylor con il radiotelescopio di Arecibo (cratere di 305 m di diametro).

La pulsar è situata a 5 kpc dalla Terra e invia impulsi ogni 59 ms (17 Hz). Si è subito visto che la variazione di periodo raggiungeva $80 \mu\text{s}$ in un ciclo di 7.75 ore. Queste scale di tempo non sono spiegabili in maniera naturale con una singola pulsar. La pulsar deve essere in orbita con un compagno di massa simile e quello che si osserva è lo spostamento Doppler in frequenza dovuto al moto lungo l'orbita della pulsar.

Dal dettaglio della variazione della velocità proiettata lungo la linea di vista si capisce che l'orbita è molto eccentrica. Questo accentua il fenomeno della precessione del periastro

$$\dot{\varphi} = \frac{6\pi GM'}{a(1 - e^2)\tau c^2}.$$

Nel sistema di PSR1913+16 in dieci anni si è osservata una precessione di 40° .

Analisi del sistema binario di PSR1913+16

In approssimazione Newtoniana il rapporto delle velocità al periastro e all'apastro

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e}$$

permette di calcolare l'eccentricità.

Inoltre l'analisi dei ritardi accumulati permette di misurare quanto si estende l'orbita dal punto più lontano a quello più vicino a noi. In questo caso abbiamo un semiasse maggiore proiettato di circa 4 secondi luce $\simeq 1.2 \times 10^9$ m, meno del diametro del Sole.

Il valore dell'eccentricità ($e \simeq 0,6$) ci dice che la distanza tra le stelle varia di un fattore 4. Deve essere osservabile un red shift gravitazionale del periodo P della pulsar variabile nel tempo

$$P = P_0 \left(1 - 2 \frac{GM'}{rc^2} \right)^{-1/2}$$

dove M' è la massa del compagno.

Analisi del sistema binario di PSR1913+16 II

La velocità della pulsar e la sua variazione sono tali da rendere osservabile anche la dilatazione dei tempi della relatività ristretta

$$P = P_0 \left(1 - 2\frac{GM'}{rc^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Questa previsione è verificata, per cui si può dire che è stato osservato un red shift gravitazionale a 5 kpc dalla Terra.

Infine, se si osserva il periodo orbitale in funzione del tempo si vede che

$$\frac{d\tau}{dt} = -2.40 \times 10^{-12}$$

in accordo, una volta tenuto conto di tutti gli effetti con le previsioni della Relatività Generale per la diminuzione di energia del sistema binario per irraggiamento gravitazionale.

L'accordo tra esperimento e teoria è entro qualche per mille.

La scoperta di ulteriori sistemi binari di questa natura, l'osservazione per decenni di PSR1913+16 ha consentito di confrontare la Relatività Generale con altre teorie, facendo uso di parametri Post Kepleriani (PPK).

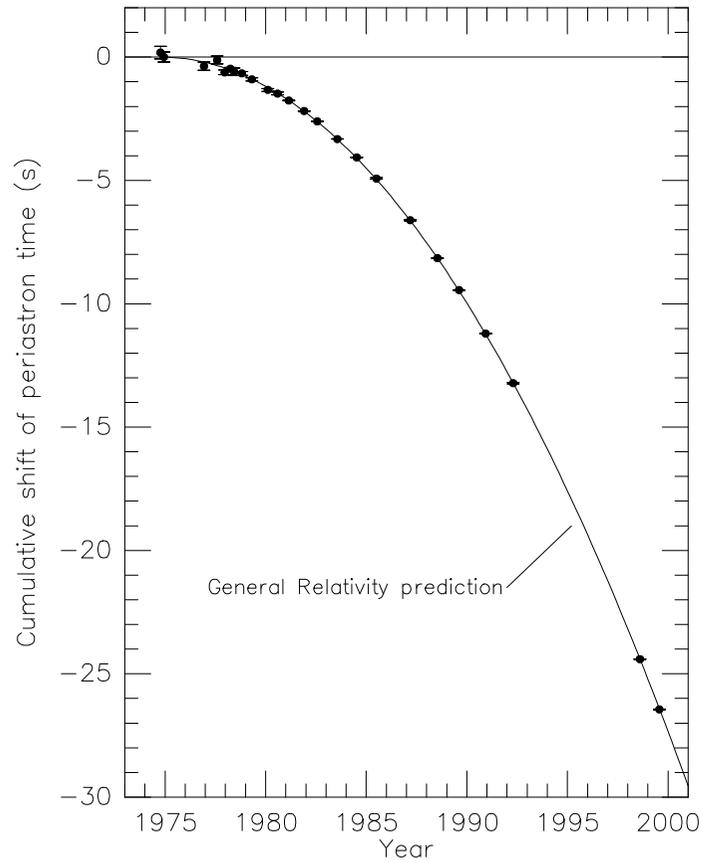


Figure 7: Plot of cumulative shift of the periastron time from 1975 – 2000. Points are data, curve is the GR prediction. Gap during the middle 1990s was caused by closure of Arecibo for upgrading. [J. H. Taylor and J. M. Weisberg, 2000, private communication].

Parameter	Symbol (units)	Value ¹
(i) “Physical” Parameters		
Right Ascension	α	$19^h 15^m 28.^s 00018(15)$
Declination	δ	$16^\circ 06' 27.'' 4043(3)$
Pulsar Period	P_p (ms)	$59.029997929613(7)$
Derivative of Period	\dot{P}_p	$8.62713(8) \times 10^{-18}$
(ii) “Keplerian” Parameters		
Projected semimajor axis	$a_p \sin i$ (s)	$2.3417592(19)$
Eccentricity	e	$0.6171308(4)$
Orbital Period	P_b (day)	$0.322997462736(7)$
Longitude of periastron	ω_0 ($^\circ$)	$226.57528(6)$
Julian date of periastron	T_0 (MJD)	$46443.99588319(3)$
(iii) “Post-Keplerian” Parameters		
Mean rate of periastron advance	$\langle \dot{\omega} \rangle$ ($^\circ \text{ yr}^{-1}$)	$4.226621(11)$
Redshift/time dilation	γ' (ms)	$4.295(2)$
Orbital period derivative	\dot{P}_b (10^{-12})	$-2.422(6)$

¹Numbers in parentheses denote errors in last digit.

Data from <http://puppsr8.princeton.edu/psrcat.html>

Table 6: Parameters of the Binary Pulsar PSR 1913+16

Sistemi binari: sorgenti di onde gravitazionali

Osservazione dell'ultima fase della vita di una coppia NS-NS

Sistema semplice, studiato in approssimazione di punti materiali

Per orbite circolari la frequenza dell'onda gravitazionale è data da

$$f(t) = f_0(1 - t/\tau)^{-3/8}$$

e l'ampiezza cresce con l'avvicinarsi del collasso

$$h(t) \propto f^{2/3} \propto (1 - t/\tau)^{-1/4}$$

Il tempo rimanente al collasso è dato da

$$\tau = \frac{5\pi}{256\pi^{8/3}} \frac{c^5}{G^{5/3}} \frac{1}{K} f_0^{-8/3}$$

dove

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}, \quad K = \mathcal{M}^{5/3}$$

\mathcal{M} è chiamata chirp mass

Sistemi binari: sorgenti di onde gravitazionali II

L'ampiezza caratteristica dell'onda gravitazionale, mediata sul tempo e sugli angoli dell'orbita e del rivelatore, è data da

$$h(f, \mathcal{M}, r) = (\langle h_+^2 \rangle + \langle h_\times^2 \rangle)^{1/2} = \left(\frac{32}{5} \right)^{1/2} \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{r} (\pi f)^{2/3}$$

ovvero

$$h(f, \mathcal{M}, r) = 6 \times 10^{-23} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{\mathcal{M}}{0.87 m_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{f}{1 \text{ Hz}} \right)^{2/3}$$

Il segnale, che si può ottenere con due stelle a neutroni mediando sul tempo passato a una data frequenza è

$$\tilde{h}(f) = 7.8 \cdot 10^{-20} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) f^{-7/6}$$

Sistemi binari

Vi sono numerose incertezze nella forma del segnale (necessaria per giungere alla rivelazione ottimale)

Calcoli agli ordini successivi danno un errore sulla fase cumulata minore di 2π . E' un traguardo importante perché un errore di fase distrugge il segnale di correlazione.

La perdita di energia deve essere calcolata a $(v/c)^6$.

Il momento angolare intrinseco delle due stelle a neutroni modula l'ampiezza del segnale

Nella fase finale le forze di marea deformano le masse. Si prevede un irraggiamento addizionale dipendente dall'equazione di stato nucleare.

Le forze di marea possono distruggere le stelle in anticipo.

Misure con eventi di binarie coalescenti

Lo studio della fase permette la determinazione della massa di chirp all'1 % e la massa ridotta μ al 10-30 % con SNR 10. (C. Cutler and É.A.Flanagan, PRD 49 (1994) 2658)

I rivelatori non sono direzionali, è necessaria la rivelazione in coincidenza, il ritardo tra i segnale permette di ricostruire la direzione e quindi l'ampiezza alla Terra. Facendo ipotesi non troppo forti sulla sorgente si può misurare la distanza della binaria direttamente dalla dipendenza $1/R$ dell'onda.

Dal comportamento in frequenza si può ottenere il red-shift z

Se è identificata otticamente la sorgente il red-shift si ottiene con mezzi ottici. (B.F.Schutz, Nature 323 (1986) 310). Queste osservazioni permettono, se la statistica è sufficiente, di misurare indipendentemente la costante di Hubble o anche gli altri parametri del modello cosmologico.

Con queste sorgenti si potrà iniziare l'astronomia a onde gravitazionali

Si disporrà di una candela standard a distanza cosmologica.

Stelle di neutroni rotanti

La stima del numero di NS nella nostra Galassia è di 10^9 .

Attualmente sono note all'incirca 1000 pulsar.

Se vi è un momento di quadrupolo si ha emissione di onde gravitazionali

$$h \sim 4 \cdot 10^{-24} \left(\frac{1\text{ms}}{P} \right)^2 \left(\frac{1\text{Kpc}}{r} \right) \left(\frac{I}{10^{38}\text{Kgm}^2} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right)$$

P : Periodo di rotazione. r : distanza. I : momento d'inerzia.

ϵ : ellitticità (limite superiore 10^{-5})

Benché il segnale sia estremamente basso si può cercare di sfruttare la periodicità del segnale per mediare il rumore su lunghi periodo di tempo ($> 10^6$ sec, risultanti in una precisione in frequenza di $1/10^6$ Hz)

Purtroppo la periodicità non è perfetta, vi è l'effetto Doppler dovuto al moto della Terra.

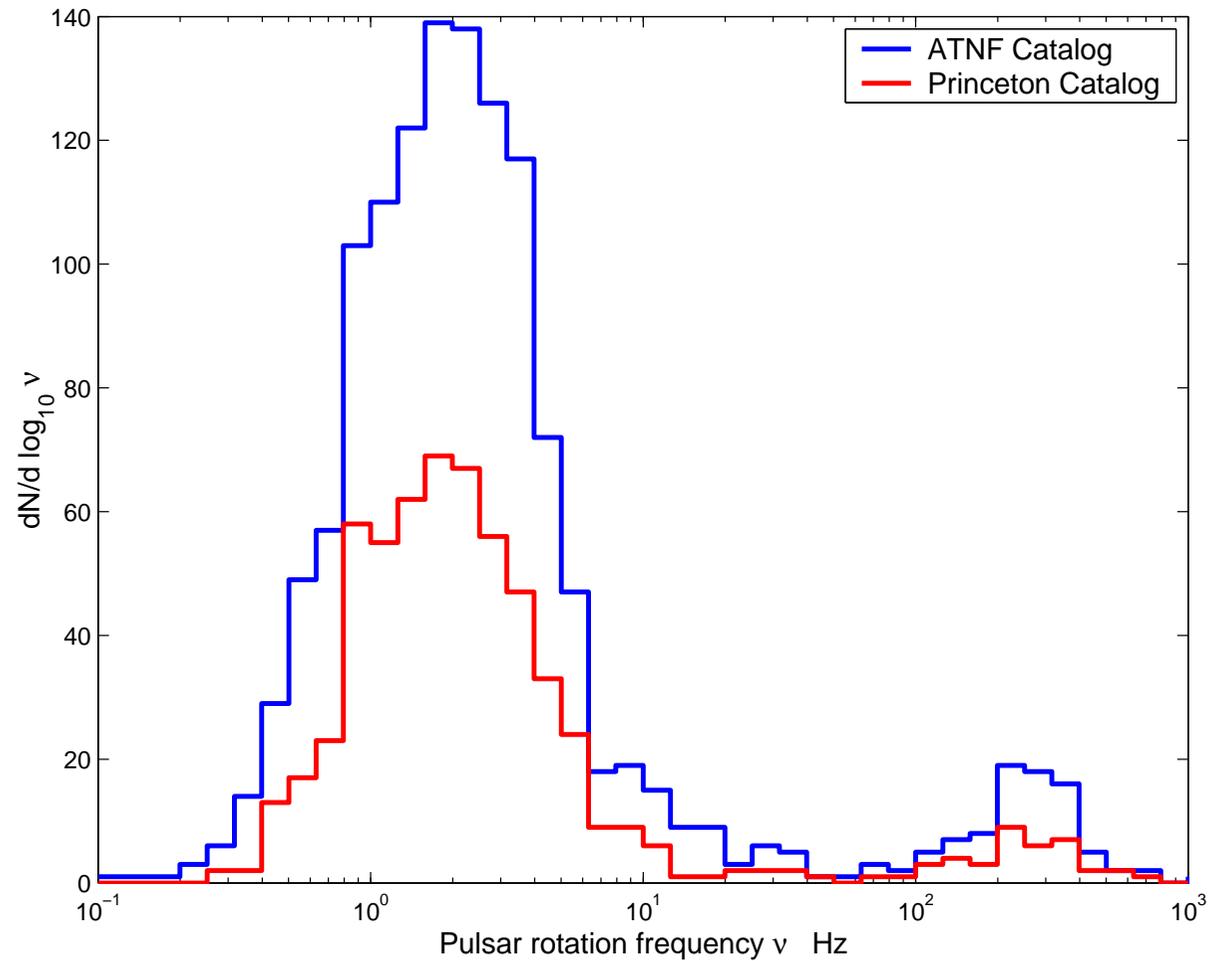
$$\Delta f \sim 10^{-4} f > 1/10^6 \text{ Hz}$$

Questo effetto può essere compensato solo se si conosce la posizione nel cielo della sorgente.

Una ricerca cieca richiede di provare tutte le possibili direzioni, e questo attualmente non è possibile, nemmeno usando i calcolatori più potenti.

Velocità di rotazione

Cataloghi di Princeton (Taylor, Manchester et al), ATNF (Manchester et al)



Ricerca di stelle a neutroni ruotanti

La rivelazione di stelle di neutroni conosciute richiede grandi risorse di calcolo (10-100 GFlops, M.Beccaria *et al.*)

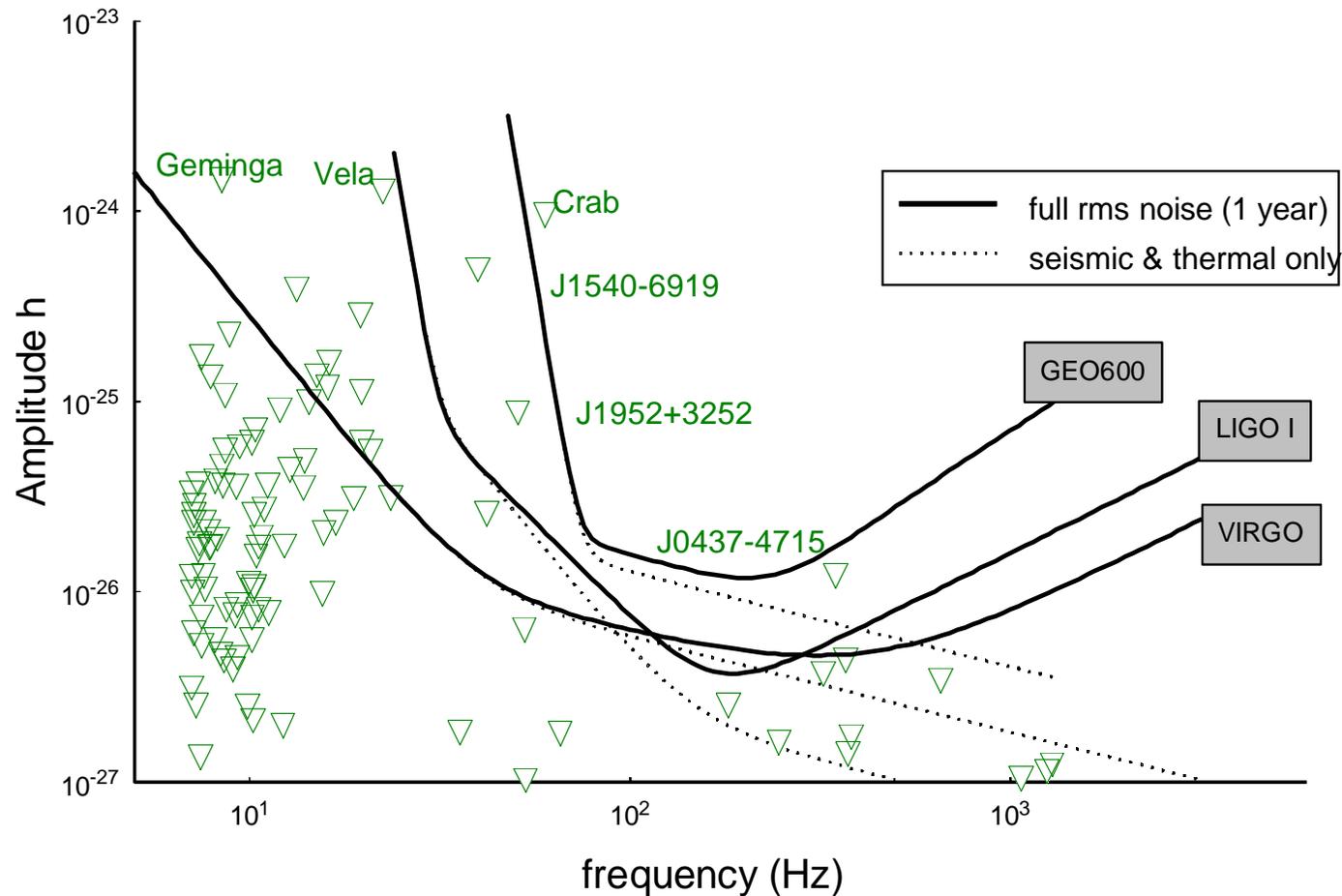
La ricerca a tutto cielo a sensibilità piena non sembra possibile: effettuare ricerche mirate in alcune regioni dello spazio, per un tempo limitato (alcuni giorni) richiede un Tflop computer (P.Brady, T. Creighton, C.Cutler, B.F.Schutz, gr-qc/9702050)

Una volta avvenuta la rivelazione, l'errore di posizione è dato da

$$\sigma_{\Omega} \simeq 1.3 \cdot 10^{-6} \left| \frac{\sin 2\phi}{\cos \theta} \right| \left(\frac{1/3yr}{T} \right)^{12} \left(\frac{P}{1 \text{ ms}} \right)^2 \left(\frac{10}{\text{SNR}} \right)^2 \text{ sr}$$

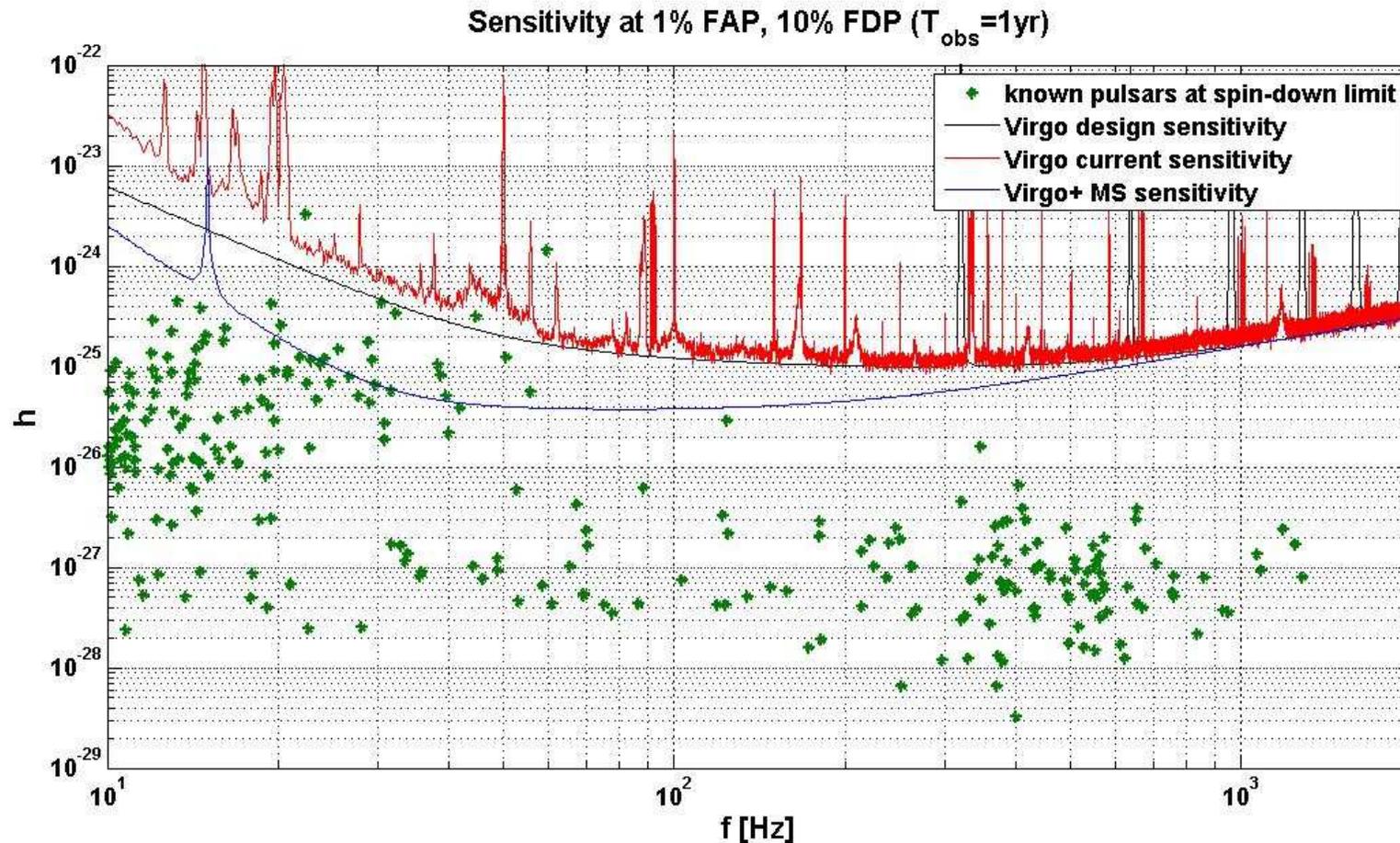
A.Krolak, gr-qc/970444

Ricerca di Pulsar



Limite superiore all'ampiezza di onde provenienti da pulsar conosciute, nell'ipotesi che tutta la diminuzione di velocità di rotazione sia dovuta alla radiazione gravitazionale. Sono segnate le pulsar con frequenza di OG maggiore di 7 Hz e ampiezza superiore a 10^{-27} . Le linee rappresentano le sensibilità previste per alcuni interferometri, con tempo di osservazione di 1 anno e i limiti dovuti al rumore termico.

Ricerca di Pulsar



Limite superiore all'ampiezza di onde provenienti da pulsar conosciute (2009), nell'ipotesi che tutta la diminuzione di velocità di rotazione sia dovuta alla radiazione gravitazionale. La linea più rappresenta la sensibilità di Virgo attuale con tempo di osservazione di 1 anno. la seconda linea invece si riferisce a Virgo come sarà a partire dall'anno prossimo.

Collasso stellare

Collasso del nucleo centrale di una stella

Se il collasso non è simmetrico si ha emissione di onde gravitazionali.

La forma del segnale non è prevedibile

Le onde gravitazionali, come i ν se la materia non è troppo densa, non sono assorbite

Tasso di conteggio

Nella Galassia (10 Kpc) $h \sim 3 \cdot 10^{-18}$ 0.03 / anno

Cluster Virgo (20 Mpc) $h \sim 10^{-21}$ 5 / anno

Scala dei tempi ~ 1 ms

Per la rivelazione è necessario avere una controparte e.m. o di ν

Però il flusso di ν va come R^{-2} , lo stesso tasso di conteggio si ottiene scalando le dimensioni lineari del rivelatore secondo la legge $R^{2/3}$

Fondo Cosmologico

Modello standard: radiazione gravitazionale si disaccoppia dall'energia impulso molto prima di quanto lo faccia la radiazione elettromagnetica dalla materia.

Lo spettro può fornire informazioni fondamentali sull'evoluzione dell'Universo durante il periodo di inflazione (L.P.Grishchuk, M. Solokhin, PRD 43 (1991), 2566)

La fase di inflazione può avere prodotto OG di alta frequenza, non generabili da sorgenti astrofisiche. R.Brustein, M.Gasperini, M.Giovannini, G.Veneziano, PRD 55 (1995) 3882, Int. Conf. GW 96 (Cascina)

L'osservazione del fondo cosmologico richiede di fare la **correlazione** tra rivelatori non troppo distanti e sensibili alla stessa polarizzazione.

É.A.Flanagan, PRD 48 (1993) 2389, P.Astone, J.A.Lobo, B.F.Schutz, CQG 11 (1994) 2093, K.A.Compton, B.F.Schutz, Int. Conf on GW 96 (Cascina)

Sensibilità al fondo cosmologico

Abitualmente si dà il limite a 90 % di livello di confidenza sulla frazione di densità di energia necessaria per chiudere l'Universo, per unità del logaritmo naturale della frequenza.

Per due rivelatori allo stesso posto

$$\Omega_{gw}^{90\%} = \frac{8\pi}{G\rho_c} f^3 \left[\frac{S_1 S_2}{2TB} \right]^{1/2},$$

$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ è la densità di massa critica

S_1 and S_2 sono le densità spettrali del rumore dei due rivelatori T è il tempo di osservazione, B la banda passante

Spettro di Harrison-Zel'dovich

With $h_0 = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$$\begin{aligned} \Omega_{gw}^{90\%} &= 4 \times 10^{-4} \left(\frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^3 \left(\frac{S_1}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\frac{S_2}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{1 \text{ yr}} \right)^{-1/2} \left(\frac{B}{1 \text{ Hz}} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Sensibilità al fondo cosmologico II

Se i due rivelatori non si trovano allo stesso posto occorre dividere per un fattore $|\gamma|$ (Flanagan) che tiene conto della differenza di fase dovuta alla distanza tra i due rivelatori mediata su tutte le direzioni possibili e della differenza di orientamento. Per due interferometri a larga banda

$$\Omega_{gw}^{90\%} = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{S_{k,1}}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2} \left(\frac{S_{k,2}}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2},$$

con $f_k = 200 \text{ Hz}$ e $T = 1 \text{ yr}$.

Una barra risonante e un interferometro

$$\Omega_{gw}^{90\%} = 2 \times 10^{-3} \left(\frac{S_b}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2} \left(\frac{S_k}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2},$$

con $f_b = 1 \text{ kHz}$, $B = 1 \text{ Hz}$, $f_k = 200 \text{ Hz}$ e $T = 1 \text{ yr}$.

Due barre:

$$\Omega_{gw}^{90\%} = 4 \times 10^{-4} \left(\frac{S_{b,1}}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2} \left(\frac{S_{b,2}}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2},$$

con $f_b = 1 \text{ kHz}$, $B = 1 \text{ Hz}$, e $T = 1 \text{ yr}$.

Sensibilità al fondo cosmologico III

Una barra e un interferometro a banda stretta

$$\Omega_{gw}^{90\%} = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{S_b}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2} \left(\frac{S_k}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2},$$

con $f_b = 1 \text{ kHz}$, $B = 1 \text{ Hz}$, $f_k = 200 \text{ Hz}$ e $T = 1 \text{ yr}$; S_{int} è limitato dal rumore termico.
Limite dal singolo rivelatore (suo rumore interno):

$$\Omega_{gw}^{90\%} = 2 \left(\frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^3 \left(\frac{S_h}{10^{-46} \text{ Hz}^{-1}} \right)^{1/2}.$$

Sensibilità al fondo cosmologico IV

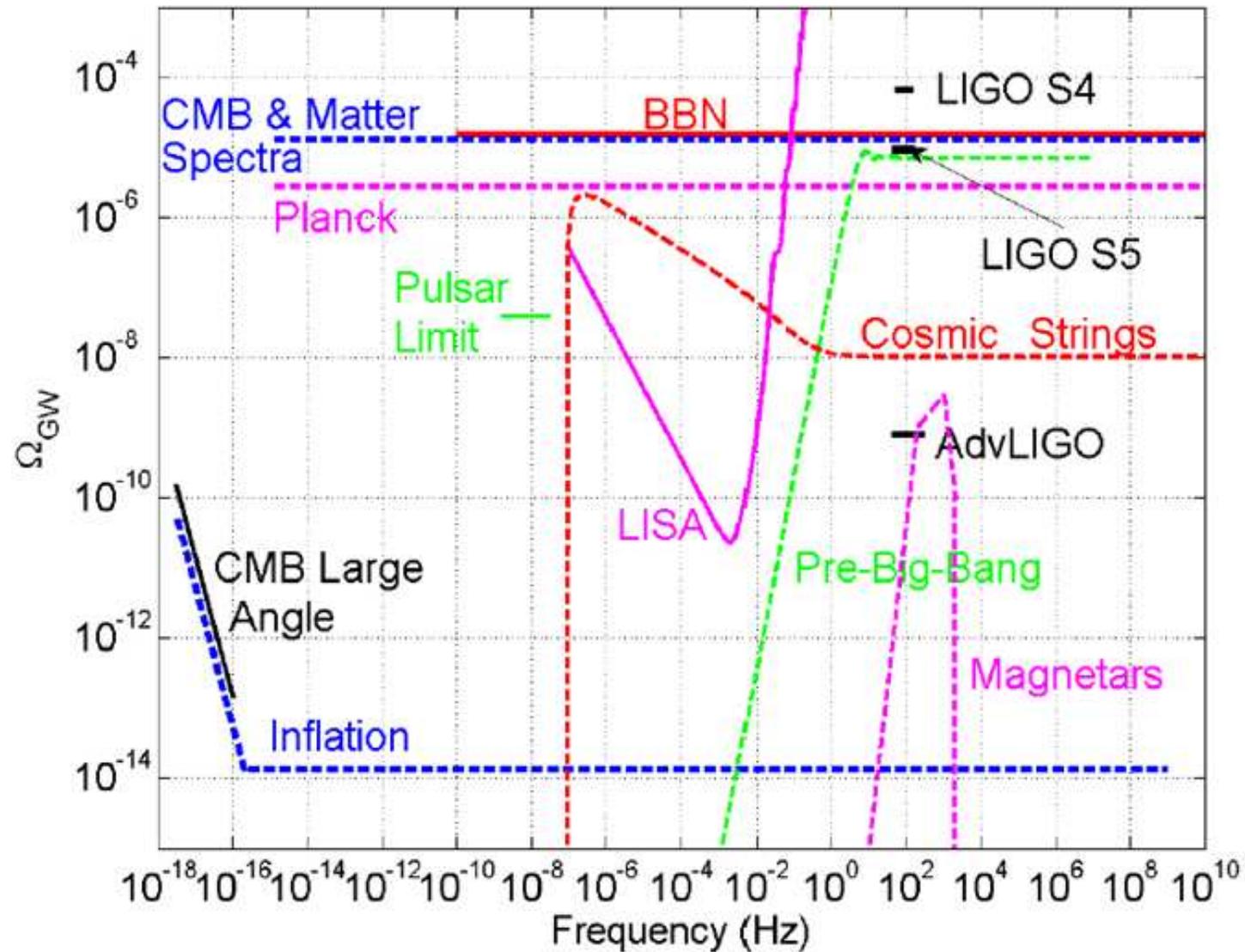
In questa tabella “N’LUS” indica il rivelatore NAUTILUS, “nb” significa banda stretta, e le parentesi quadre [...] indicano esperimenti che non si possono fare sullo stesso sito. I risultati di TIGA sono per ciascun modo proprio di risonanza.

Limiti sulla densità spettrale :

$$\text{LIMITI IDEALE (STESSO SITO) SU } |h_{25}| = [S_{gw}^{90\%}]^{1/2} / 10^{-25} \text{ Hz}^{-1/2}$$

	N’LUS	TIGA	GEO600	LIGO I	VIRGO
N’LUS	9	*	*	*	*
TIGA	2	0.5	*	*	*
GEO600	7	2	[2]	*	*
LIGO I	4	1	[1]	[0.6]	*
VIRGO	3	1	[0.7]	[0.4]	[0.3]
GEO nb	2	0.5	N/A	N/A	N/A

Limite al fondo cosmologico



Caratterizzazione del rumore

Per un rumore stazionario $n(t)$ (caratteristiche statistiche non variano nel tempo) si definisce lo spettro di potenza

$$R_n(\tau) = \langle n(t)n(t + \tau) \rangle$$

$\langle \rangle$ è la media sulle realizzazioni del processo stocastico $n(t)$

$$S_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\tau) \exp(i2\pi f\tau) d\tau$$

$S_n(f)$ è denominato spettro di potenza (power spectrum) di $n(t)$

Si usa molto spesso lo spettro di potenza lineare

$$\tilde{n}(f) = \sqrt{S_n(f)}$$

linear power spectrum LPS

Le unità di $S_n(f)$ sono le unità di $n(t)^2 / \text{Hz}$

Le unità di $\tilde{n}(f)$ sono le unità di $n / \sqrt{\text{Hz}}$

Lo spettro di potenza misura lo spostamento quadrato in un intervallo di frequenza di 1 Hz

Lo spettro di potenza lineare misura lo spostamento rms in un intervallo di frequenza di 1 Hz

Le potenze del rumore da varie sorgenti si sommano per formare il rumore complessivo

Le densità lineari si sommano quindi in quadratura

Caratterizzazione del rumore II

Caveat: la definizione di spettro di potenza può essere limitata alle frequenze positive o comprendere l'intero asse reale

Lo spettro di potenza definito per $f > 0$ è il doppio di quello definito su tutto l'asse reale delle frequenze

Lo spettro di potenza lineare definito per $f > 0$ è $\sqrt{2}$ volte quello definito su tutto l'asse reale delle frequenze

Sperimentalmente il rumore è misurato usando

$$S_n(f) = E \left[\frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{+T} n(t) \exp(i2\pi ft) dt \right|^2 \right]$$

Con segnali campionati la trasformata di Fourier diventa una sommatoria su un certo intervallo di tempo e la media su $2T$ diventa una media sui campioni.

Per segnali campionati a frequenza f lo spettro sarà misurato nell'intervallo di frequenze $[1/T, f/2]$

Rumore e segnale

Uscita del rivelatore : $s(t) = n(t) + h(t)$

$h(t)$ è parametrizzato (tempo di coalescenza, masse, ...)

Il filtro ottimale per un segnale deterministico richiede il calcolo di

$$\begin{aligned} s_W &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df \\ &= \int h(t) \int s(\tau)w(t - \tau) d\tau dt \end{aligned}$$

$w(t)$ pesa $s(t)$ alle frequenze dove il rivelatore è più sensibile

s_W è gaussiana con rms 1

Il rapporto segnale-rumore per questa procedura di rivelazione è dato da

$$\text{SNR}^2 = 4 \int_0^{+\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df$$

SNR^2 viene integrato sull'intervallo in frequenza:

Vantaggio di un rivelatore a grande banda passante

Calcolando il segnale al variare dei parametri si possono scegliere i valori che massimizzano il segnale che vengono così misurati

Anche rivelatori risonanti possono avere una grande banda passante, il limite viene dal rumore dell'elettronica di lettura. Sfere risonanti: modi a varie frequenze.

A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGrawHill.

S. Kay, Statistical Signal Processing, Estimation Theory, Detection Theory,

Rivelatori di onde gravitazionali a banda larga

In linea di principio è necessario misurare variazioni di tempo di andata e ritorno tra due masse in caduta libera

Sulla Terra, la massa del pendolo è in caduta libera nel piano orizzontale, a frequenze superiori alla frequenza di oscillazione

Si usa la fase della luce per una misura di variazione del tempo di percorrenza

Il campione di frequenza non è sufficientemente stabile, occorre fare una misura differenziale. Si sfrutta la caratteristica di $h_{\mu\nu}$ di essere a traccia zero: una dilatazione in x corrisponde a una contrazione in y . Si possono confrontare due percorsi a 90 gradi l'uno dall'altro.

Esistenza del rumore di posizione

- Rumore sismico
- Rumore termico
- Microscorrimento nei materiali di sostegno
- Fluttuazioni della gravità locale
- Pressione di radiazione

Rivelatori di onde gravitazionali a banda larga II

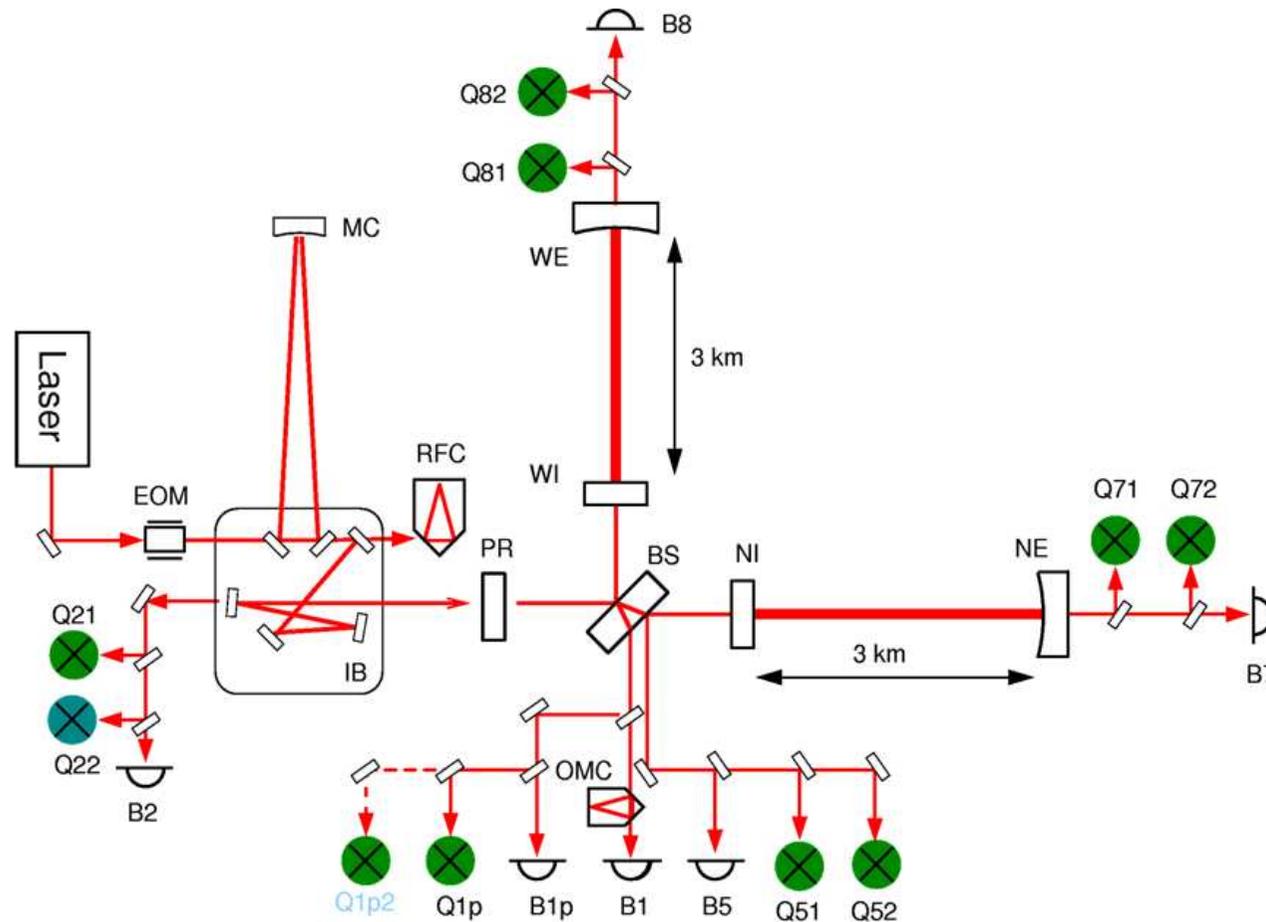
Rumore di misura

- Conteggio dei fotoni (rumore shot)
- Fluttuazioni residue del campione di frequenza
- Interferenze spurie

Principio di indeterminazione: la riduzione del rumore shot richiede l'aumento dell'intensità circolante. Le fluttuazioni nel numero di fotoni si traducono in fluttuazioni della pressione di radiazione e quindi in una indeterminazione in posizione.

Si stanno studiando schemi in cui si possa misurare solo una delle due grandezze n_γ e φ che entrano nella relazione di indeterminazione

Schema ottico del rivelatore Virgo



Rumore di posizione

Rumore sismico: onde sismiche dovute a terremoti, anche di piccola intensità.

Vibrazioni del terreno dovute all'attività umana, al vento, al mare.

A bassissima frequenza, deformazione della crosta terrestre dovuta alle maree.

Spettro in un posto come Cascina

$$\tilde{x}_{sisma}(\nu) = 10^{-6} \left(\frac{1 \text{ Hz}}{\nu} \right)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

per $\nu > 1 \text{ Hz}$

Picco a 140 mHz: vento, mare.

Attenuazione sismica

E' possibile attenuare il rumore sismico attraverso una cascata di filtri meccanici. Consideriamo un pendolo con punto di sospensione che si muove secondo $x_s(t)$. L'equazione del moto per la massa del pendolo è:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}x_s(t)$$

La soluzione per una eccitazione $x_s(t) = x_0 \exp[j\omega t]$ ha un'ampiezza

$$x(\omega) = x_0 \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Ad alte frequenze: $\omega \gg \omega_0$, si ha

$$x(\omega) = x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

che rappresenta una attenuazione dinamica, non dovuta a smorzamenti (intrinsecamente rumorosi)

Attenuazione sismica II

Realizzando una cascata di pendoli ad alta frequenza le attenuazioni si moltiplicano. Si può ottenere l'attenuazione A richiesta a 10 Hz per $h = 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ e una lunghezza di 3 km:

$$A = \frac{h(\omega)L}{2x_{sisma}(\omega)} = \frac{1.5 \times 10^{-20}}{10^{-8}} = 1.5 \times 10^{-12}$$

Con pendoli lunghi 1 m, $\omega_0^2 = 10 \text{ rad}^2 \text{ sec}^{-2}$ e

$$A = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^n = \left(\frac{10}{4000} \right)^n$$

Sono necessari 5 stadi ($n=5$) per raggiungere l'attenuazione richiesta.

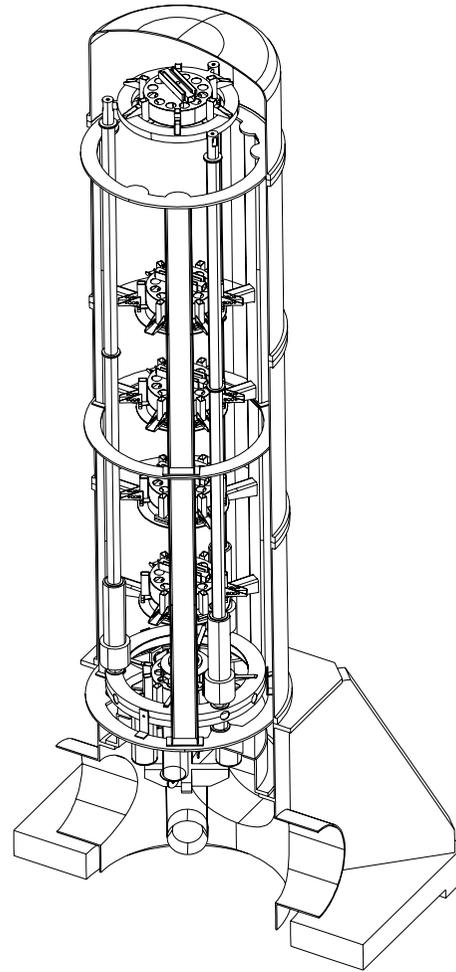
Alle basse frequenze ci sono problemi: non si ha attenuazione ma eccitazione dei modi normali, risonanze con Q alto.

Grande ampiezza di movimento, può portare il rivelatore fuori dal punto di lavoro. Si può controllare il punto di sospensione usando accelerometri (riferiti a un sistema di riferimento inerziale e non al terreno) e richiedendo che il punto di sospensione rimanga immobile.

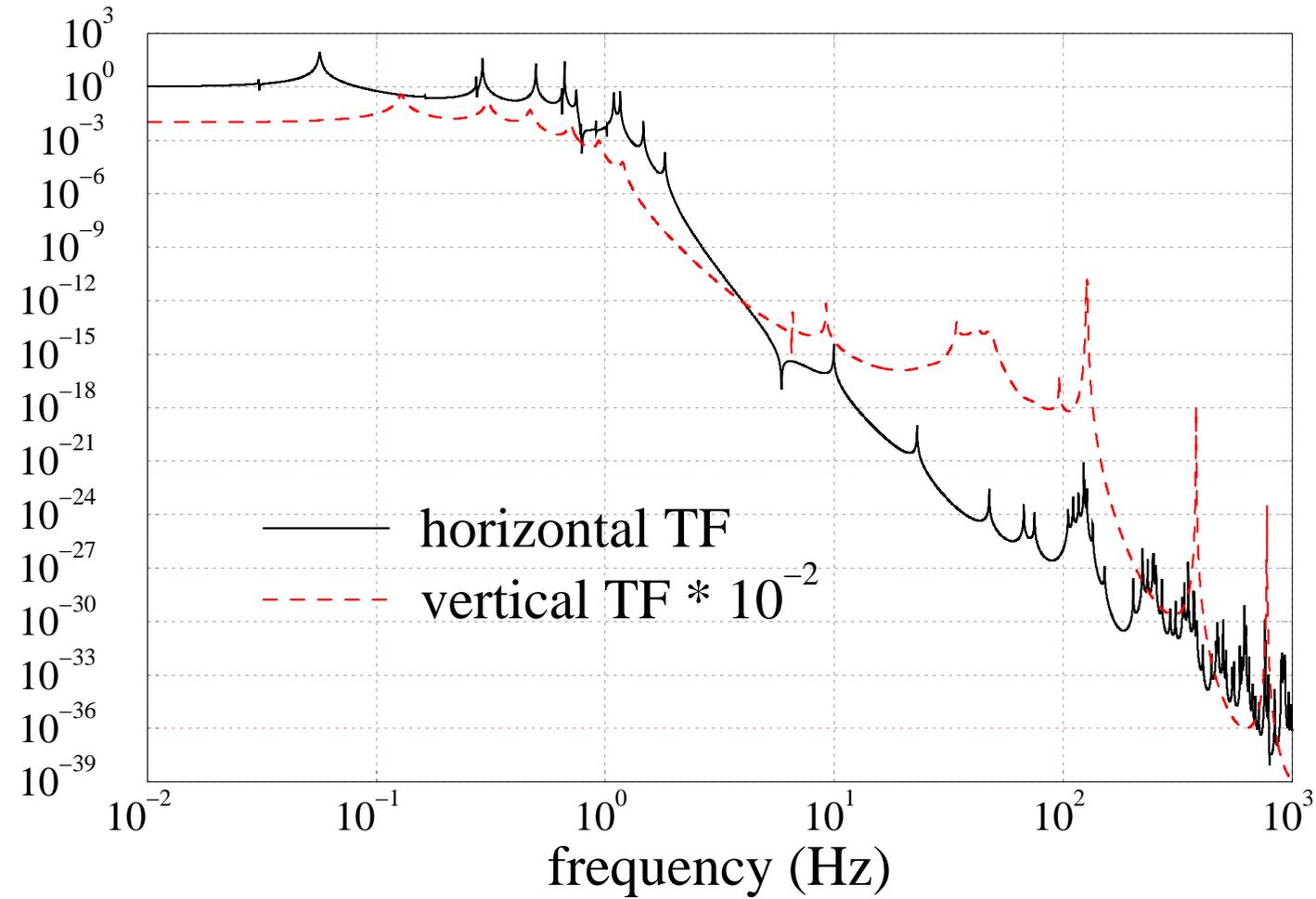
Questa operazione introduce rumore alle alte frequenze, va perciò fatta a monte della catena di attenuazione.

Infine è necessario controllare la posizione dello specchio per ottenere la sensibilità ottimale. Questo va fatto da un punto silenzioso altrimenti si reintroduce rumore sullo specchio attraverso il moto del terreno.

Il Superattenuatore di Virgo



Caratterizzazione di trasferimento del Superattenuatore di Virgo



Rumore termico

Lo specchio dell'interferometro è la massa di test in caduta libera. In realtà siamo in presenza di un pendolo immerso in un bagno termico cui compete una energia cinetica e potenziale media $k_B T = 3.9 \times 10^{-21}$ J. Per uno specchio di 40 kg all'estremità di un pendolo di 1 m, la costante elastica dell'oscillatore armonico $mg/l = 400$ N/m e l'ampiezza di oscillazione x_T corrispondente all'energia kT è

$$x_T = \sqrt{\frac{k_B T}{k}} = \sqrt{\frac{k T l}{m g}} = 3.1 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Fortunatamente questo è il valore rms, integrato su tutte le frequenze.

Il Teorema di Fluttuazione-Dissipazione

Il Teorema di Fluttuazione-Dissipazione stabilisce un legame tra lo spettro in frequenza del rumore termico e la dinamica del sistema in esame

$$S_{\dot{x}_T}(\omega) = 2k_B T \Re Y(\omega), \quad Y = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{\dot{x}}{F}$$

L'equazione di moto del pendolo nel vuoto, con dissipazione nel filo di sospensione si scrive come

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + j\phi(\omega)]x = F/m$$

con $\phi(\omega) \sim 10^{-6}$. Da questo

$$x(\omega) = \frac{F}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\phi(\omega)\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \phi^2(\omega)\omega_0^4}$$

Si ha quindi

$$\Re Y = \frac{\omega}{m} \frac{\phi(\omega)\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \phi^2(\omega)\omega_0^4}$$

In definitiva la densità lineare di potenza per il rumore termico di pendolo è data da

$$\tilde{x}_T(\omega) = \frac{\sqrt{S_{\dot{x}_T}(\omega)}}{\omega} = \sqrt{\frac{4k_B T \phi(\omega)\omega_0^2}{m\omega[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \phi^2(\omega)\omega_0^4]}}$$

per uno spettro calcolato solo sulle frequenze positive.

Rumore di misura

Consideriamo un interferometro di Michelson sul quale incide luce di intensità P_{in} , di cui P_{out} verrà rivelata. Ipotizziamo una differenza di fase tra i due bracci

$$\Delta\varphi = \pi + \alpha + \phi_{OG}$$

$\pi + \alpha$ è una fase arbitraria.

$\alpha = 0$ significa interferenza distruttiva in trasmissione, si dice in questo caso che l'interferometro si trova sulla frangia scura, e ϕ_{OG} è lo sfasamento prodotto dal passaggio dell'onda gravitazionale.

Si ha:

$$P_{out} = P_{in} \sin^2 \left(\frac{\alpha + \phi_{OG}}{2} \right)$$

che diventa, per $\phi_{OG} \ll 1$:

$$P_{out} = P_{in} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \phi_{OG} \sin \alpha \right)$$

La **sensibilità** dell'interferometro risulta essere:

$$\frac{dP_{out}}{d\phi_{OG}} = P_{in} \sin \left(\frac{\alpha + \phi_{OG}}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \phi_{OG}}{2} \right) = \sin(\alpha + \phi_{OG}),$$

massima per $\alpha = \pi/2$. Questo corrisponde $P_{out} = P_{out} = P_{in}/2$.

Rumore di misura II

Occorre ora conoscere come fluttua la misura di P_{out} per calcolare la **precisione**.
Lo spettro di rumore, definito sulle frequenze positive e negative, per N impulsi in media al secondo, distribuiti secondo Poisson (processo degli impulsi di Poisson) è

$$S_{\gamma}(\omega) = 2\pi N^2 \delta(\omega) + N.$$

Lasciando da parte il termine con $\delta(\omega)$ che riguarda la componente continua, si ha, ricordando il significato di spettro di potenza, che la varianza per Hz è proprio N . Questo si può capire contando gli impulsi di Poisson in un secondo. La varianza è N e il conteggio su un intervallo $-0.5 \text{ sec} < t < 0.5 \text{ sec}$ corrisponde a una risoluzione in frequenza di 1 Hz.

La fluttuazione nella misura della potenza P_{out} è

$$\sigma_{P_{out}} = \sqrt{\eta N} = \sqrt{\frac{\eta P_{in}}{h\nu} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \phi_{OG} \sin \alpha \right)}$$

con η efficienza quantica del rivelatore.

In assenza di segnale

$$\sigma_{P_{out}} = \sqrt{\frac{\eta P_{in}}{h\nu} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}$$

Rumore di misura III

Il rapporto segnale rumore per 1 Hz di banda (ovvero per un tempo di osservazione di 1 secondo) è dato da:

$$SNR = \sqrt{\frac{\eta P_{in}}{2h\nu}} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| \phi_{OG}$$

massimo per $\alpha = 0$. Conviene quindi lavorare sulla frangia scura.

Per convenzione si stabilisce il limite di sensibilità dello strumento quando $SNR = 1$.

La sensibilità per la fase risulta

$$\phi_{OG}^{min} = \sqrt{2 \frac{h\nu}{\eta P_{in}}}$$

su un intervallo di tempo di 1 secondo. Tempi di osservazione più lunghi corrispondono a una banda più stretta, a un rumore minore e quindi una sensibilità a minori variazioni di fase.

Rumore di misura IV

Come caso tipico consideriamo una sorgente di luce infrarossa ($\lambda = 1064 \text{ nm}$, di potenza 10 W e un rivelatore ideale: $\eta = 1$). Il risultato è

$$\phi_{OG}^{min} \sim \sqrt{\frac{2h\nu}{\eta P_{in}}} = 2.0 \times 10^{-10} \text{ rad Hz}^{-1/2}$$

Nel caso di un'onda incidente perpendicolarmente al piano dell'interferometro con polarizzazione +,

$$\phi_{OG} = \frac{2\pi}{\lambda} 2L \frac{h}{2} \times 2.$$

Si ottiene quindi

$$h^{min} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{2h\nu}{\eta P_{in}}}$$

Si tratta di una densità spettrale, espressa in $\text{Hz}^{-1/2}$.

Per due casi di interesse il calcolo dà

$$L \quad h_{min} \text{ Hz}^{-1/2}$$

Michelson da tavolo	1 m	1.6×10^{-17}
Virgo	3 km	5.3×10^{-21}

Cavità Fabry-Perot

Aumentando il percorso della luce nel mezzo (vuoto con OG) si ottiene una maggiore variazione di fase e quindi una maggiore sensibilità.

Lo strumento più semplice è la linea di ritardo: aumentando il numero di riflessioni prima dell'estrazione del fascio si ottiene un percorso più lungo.

Gli inconvenienti sono nella grande dimensione degli specchi: la luce deve riflettersi in tanti punti diversi. Parte della luce incidente viene diffusa e giunge su altri punti di riflessione, cambiando la fase dell'onda incidente.

I grandi interferometri hanno scelto di usare cavità Fabry-Perot, composte da uno specchio semiriflettente in ingresso e uno specchio riflettente in fondo.

Consideriamo i campi elettrici in ingresso e in uscita E_{in} e E_{out} dello specchio semiriflettente e i campi all'interno della cavità E_1, E_2, E_3 e E_4 . Si hanno le seguenti condizioni di raccordo

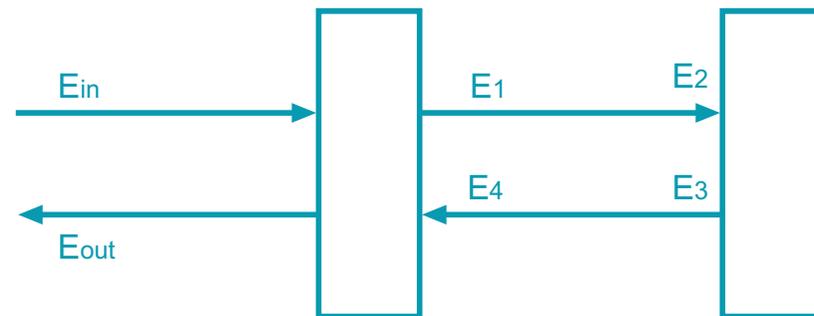
$$E_1 = t_1 E_{in} + jr_1 E_4$$

$$E_2 = \exp[jkL] E_1$$

$$E_3 = jr_2 E_2$$

$$E_4 = \exp[jkl] E_3$$

$$E_{out} = jr_1 E_{in} + t_1 E_4$$



con sfasamento in riflessione pari a $\pi/2$ (dielettrico).

Cavità Fabry-Perot

Si ottiene

$$E_1 = \frac{t_1}{1 + r_1 r_2 \exp [2jkl]} E_{in}$$

che risuona per $2kL = \pi$ per cui si ottiene un campo all'interno della cavità

$$E_1 = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} E_{in}$$

Conseguentemente la potenza presente alla risonanza sarà

$$P_1 = \frac{\epsilon_0 c}{2} |E_1|^2 = \left(\frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \right)^2 P_{in}$$

e in generale

$$P_1 = \left(\frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \right)^2 \frac{P_{in}}{1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2 [x/2]}$$

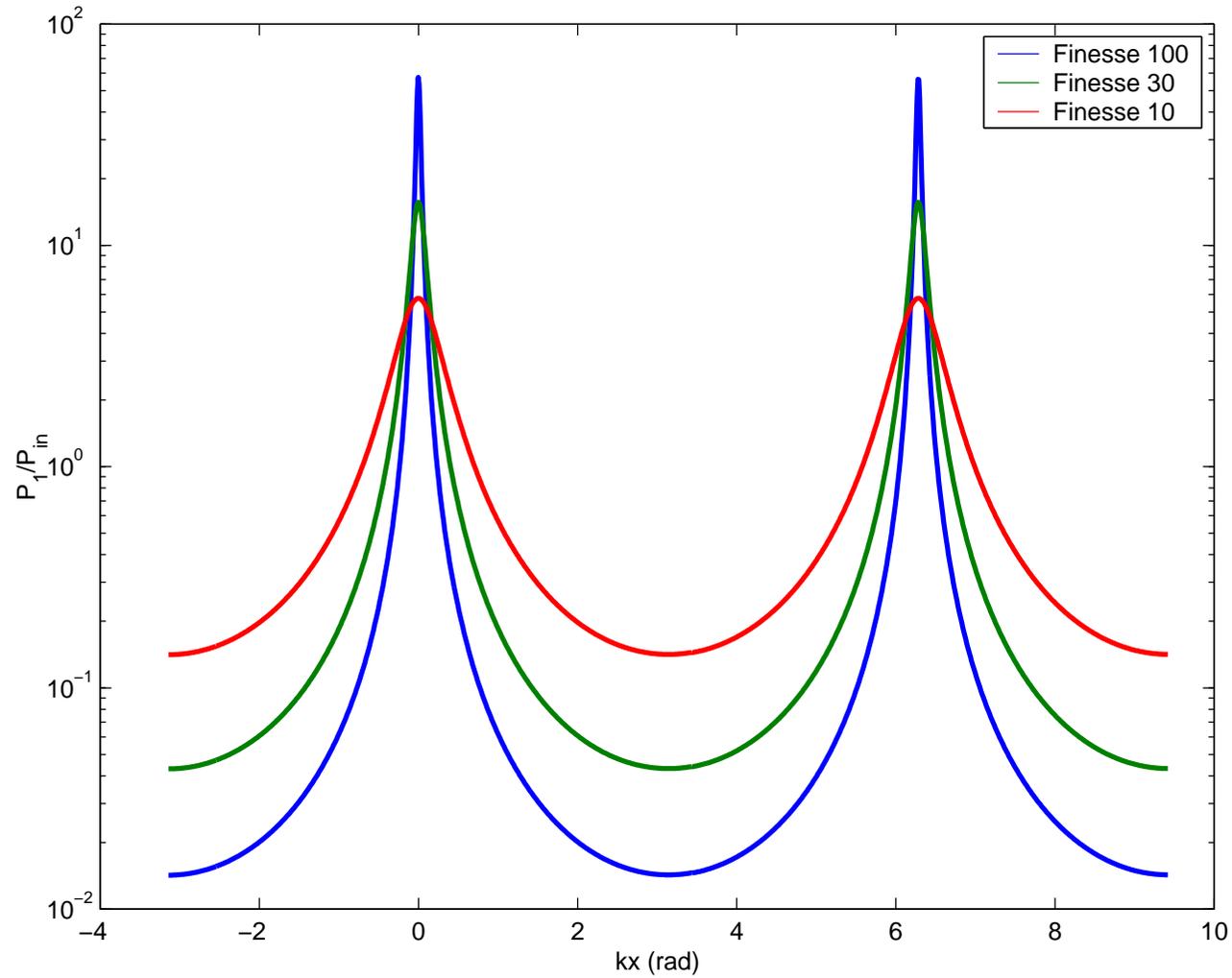
dove x è la deviazione dalla risonanza e \mathcal{F} definisce la **finezza** della cavità

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}$$

Le risonanze si trovano a frequenza

$$\nu_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{2L}$$

Cavità Fabry-Perot



Cavità Fabry-Perot II

La separazione tra le frequenze è chiamata **free spectral range** (FSR). Per una cavità di 3 km lo FSR è pari a 50 kHz.

Il rapporto tra campo incidente e campo all'interno della cavità rappresenta il fattore di merito della cavità.

Il campo riflesso dalla cavità E_{out} è dato da

$$E_{out} = jr_1 E_{in} + jr_2 t_1 \exp[j2kL] E_1 = j\mathcal{R} E_{in}$$

con

$$\mathcal{R} = \frac{r_1 + (1 - p_1)r_2 \exp[j2kL]}{1 + r_1 r_2 \exp[j2kL]}$$

p_1 rappresenta l'assorbimento nella cavità.

Vi sarà una variazione di fase corrispondente a una variazione di lunghezza

$$\frac{d\Phi}{\delta L} = \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}$$

per finezze moderate e basso assorbimento nella cavità. Ma, come nel caso del punto di lavoro del Michelson, questo non corrisponde alla massima sensibilità, perché questa situazione corrisponde a un massimo assorbimento, quindi poca luce in riflessione.

I calcoli mostrano che una buona configurazione di cavità porta a una diminuzione della sensibilità in fase di un fattore 2.

Cavità Fabry-Perot III

Si ottiene quindi per lo sfasamento tra due cavità in presenza di un'onda gravitazionale

$$h^{min} = \frac{\lambda}{8\mathcal{F}L} 2 \sqrt{\frac{h\nu}{\eta P_{in}}} \sqrt{1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\Omega L}{c}\right)}$$

da confrontarsi con il caso del Michelson

$$h^{min} = \frac{\lambda}{2\pi L} \sqrt{\frac{h\nu}{\eta P_{in}}}$$

A basse frequenze $\Omega \ll c/L$ si ottiene un guadagno in sensibilità pari a

$$\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$

Per $\mathcal{F} = 50$ il guadagno è di 31.8, che porta il livello di sensibilità di Virgo a $1.7 \times 10^{-22} \text{ Hz}^{-1/2}$.

Tecnica di Pound-Drever-Hall

La misura della fase di interferenza attraverso l'intensità $I(\phi)$ della luce dipende dalla stabilità in potenza del laser. Occorre però tenere conto dell'andamento parabolico di $I(\phi)$.

La derivata

$$\frac{dI}{d\phi}$$

può essere ottenuta con la tecnica di Pound-Drever-Hall

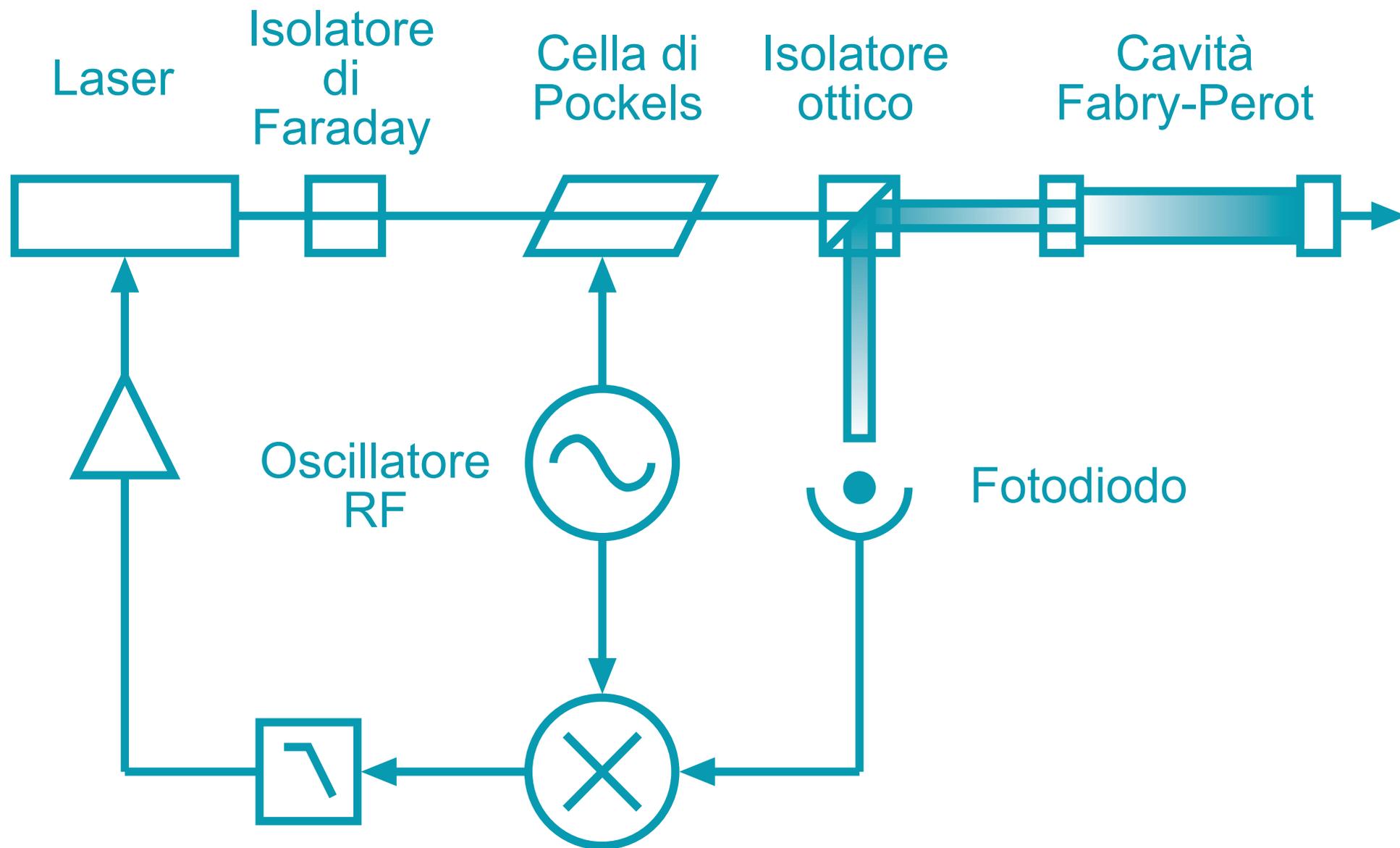
Tecnica usata per stabilizzare un laser in frequenza usando una cavità Fabry-Perot di riferimento.

R. V. Pound, Electronic Frequency Stabilization of Microwave Oscillators, Rev. Sci. Instrum. 17 (1946) 490-505

R. W. P. Drever et al., Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator, Appl. Phys. B: Photophys. Laser Chem. 31 (1983) 97-105

Eric D. Black, An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization, Am. J. Phys. 69 (2001) 79-87

Tecnica di Pound-Drever-Hall



Tecnica di Pound-Drever-Hall

Coefficiente di riflessione è una funzione della frequenza

$$F(\omega) = \frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{r (\exp[i\omega/\Delta\nu_{fsr}] - 1)}{1 - r^2 \exp[i\omega/\Delta\nu_{fsr}]}$$

con $\Delta\nu_{fsr} = c/2L$ è l'intervallo libero spettrale.

Se moduliamo in fase il laser abbiamo un campo incidente

$$\begin{aligned} E_{in} &= E_0 \exp[j\omega t + \beta \sin \Omega t] \\ &\simeq E_0 \{ J_0(\beta) \exp[j\omega t] + J_1(\beta) \exp[j(\omega + \Omega)t] + J_1(\beta) \exp[j(\omega - \Omega)t] \} \end{aligned}$$

Possiamo vederli come tre fasci sovrapposti. Quello con frequenza ω risuona nella cavità mentre gli altri due vengono riflessi senza permanenza nella cavità

Risulta una interferenza tra questi fasci che genera una modulazione dell'intensità della luce a frequenza Ω (e anche 2Ω)

La stabilizzazione si ottiene perché le bande laterali contengono la frequenza istantanea del laser mentre la cavità accumula e media la luce in riferimento alla propria frequenza di risonanza.

Ricircolo della luce

La sensibilità raggiunta può essere migliorata aumentando la potenza del laser. E' possibile riutilizzare la luce proveniente dallo specchio semiriflettente del Fabry-Pero (frangia chiara).

Si mette uno specchio con adeguato coefficiente di riflessione sul percorso della luce dal laser allo specchio del Michelson.

In determinate relazioni di fase tra luce incidente proveniente dal laser e luce che torna dallo specchio del Michelson si crea una situazione di risonanza, in maniera simile alla cavità Fabry-Perot. L'intensità circolante aumenta, e quindi può aumentare la sensibilità dell'interferometro.

Il limite è dato dall'assorbimento nell'interferometro. Si ritiene che l'intensità circolante possa aumentare di un fattore $C = 50$.

La sensibilità risultante con questi dati è data da

$$h^{min} = \frac{\lambda}{4\mathcal{F}L} \sqrt{\frac{h\nu}{\eta C P_{in}}} \sqrt{1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2 \left(\frac{\Omega L}{c} \right)}$$

Altri rumori

Fluttuazioni dipendenti dal tempo della gravità locale: variazioni di densità del mezzo circostante: onde sismiche e variazioni della pressione dell'aria.

Creep (scorrimento) nei materiali sottoposti a sforzo

Interazione con campi magnetici locali (fulmini, ...)

Fluttuazioni della densità dei gas residui nel tubo a vuoto

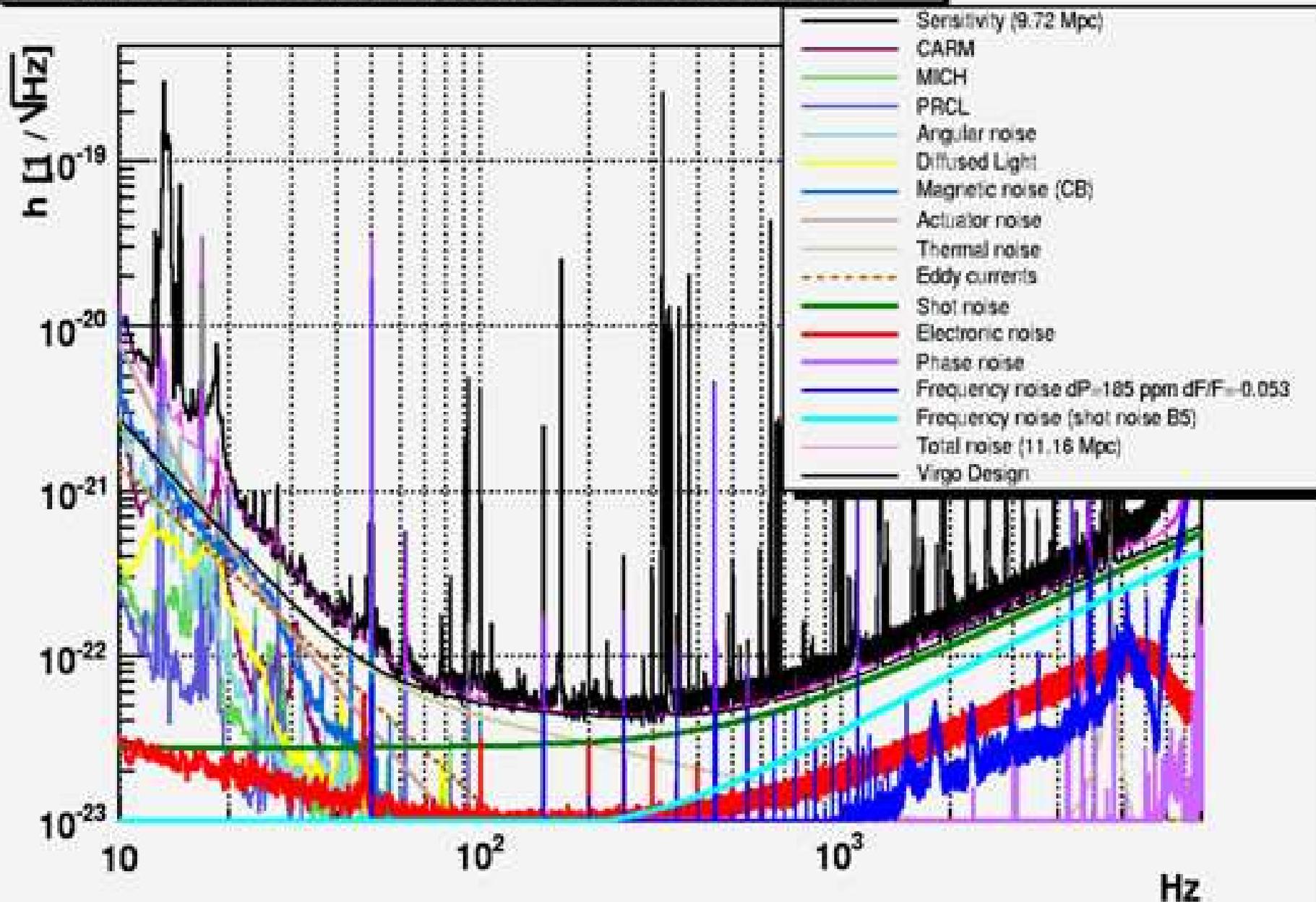
Fluttuazioni di frequenza del laser, entrano secondo

$$\tilde{h}_{las} = \frac{\delta\nu}{\nu} \left(\frac{\Delta L}{L} \oplus \frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \right)$$

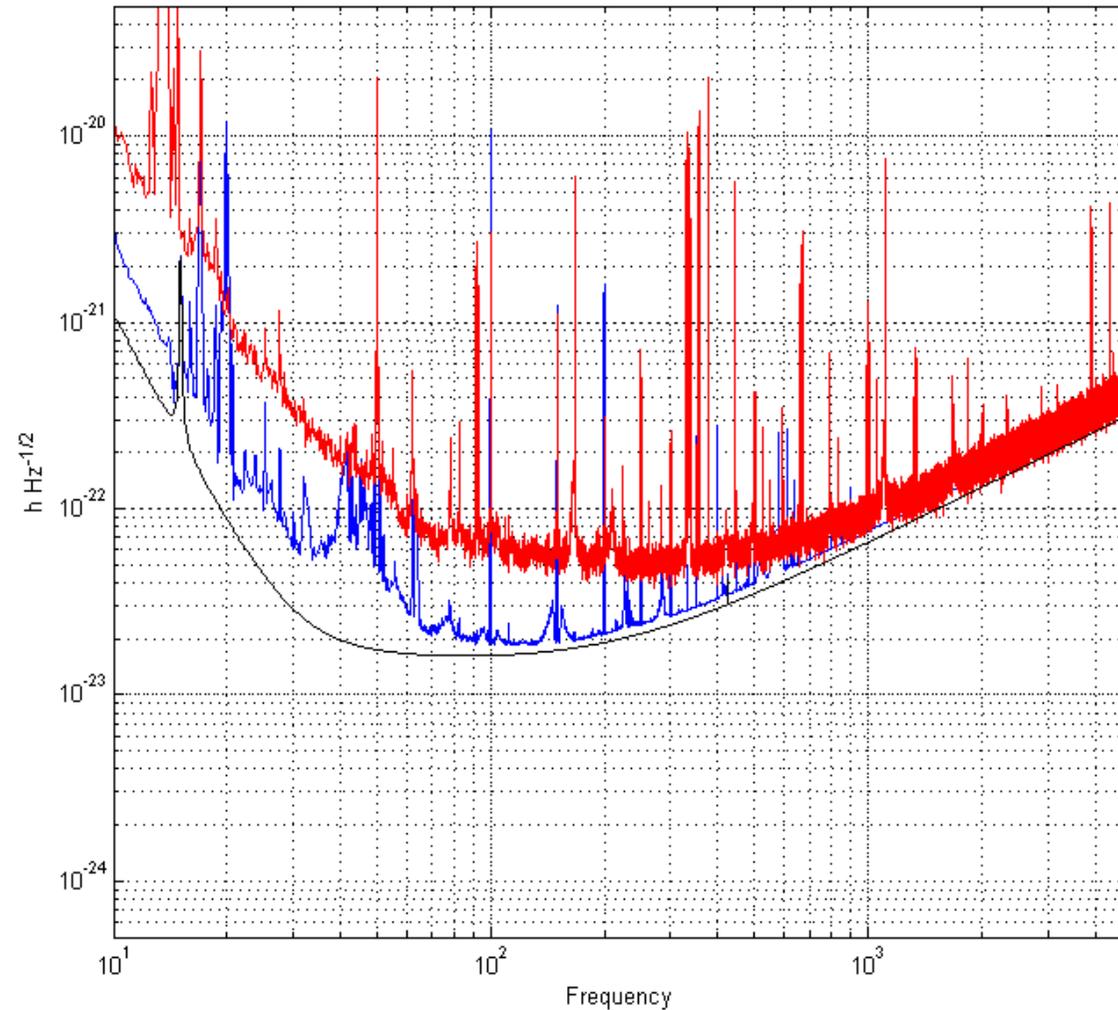
Modi spaziali superiori, ridotti attraverso il controllo della qualità degli specchi.

Contributi al rumore

Sun Nov 1 15:39:34 2009 UTC - GPS: 941125189



Sensibilità prevista: Giugno 2010



Ulteriori lavori: rumori magnetici e tavolo ottico d'ingresso: montagna tra 40-50 Hz

Cosa abbiamo visto

Stato delle misure degli effetti della relatività

- Deviazione della luce
- Ritardo eco radar
- Precessione di Mercurio
- Principio di equivalenza forte (Lunar ranging exp)

Onde gravitazionali

- Effetto su masse libere
- Sorgenti: binarie coalescenti, pulsar, SN (fondo cosmologico)

Rivelatori interferometrici

- Rumore di posizione: sismico, termico
- Rumore di misura: shot noise, Michelson e Fabry-Perot
- Sensibilità

Molte informazioni sono su web: si parte da www.virgo.infn.it, ci sono i puntatori verso gli altri esperimenti

NON abbiamo visto i rivelatori risonanti, gli esperimenti previsti per il principio di equivalenza, LLI, LPI, . . . resi possibili da tecniche nuove (atomi freddi)

Corso di Kip Thorne su web: <http://elmer.tapir.caltech.edu/ph237>