Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2004/05
parte 1

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 2c - 30.10.04

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce dalle lezioni del Modulo di Fisica per il corso di Matematica e Fisica per studenti di STPA (e TACREC), non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario o di scuola media superiore. Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, senza discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Nota importante: a partire dalla Versione 2b, alcune parti del testo, alcuni esercizi ed alcune note a pié di pagina, indicate con il simbolo **FAC** , sono da ritenersi di *facoltativo* per gli studenti dei corsi di laurea STPA e TACREC.

Revisioni:

1. Versione 1, 14.09.04: non rilasciata;
2. Versione 2, 18.10.04: cap.1, cap.2 con revisioni sostanziali;
3. Versione 2b, 22.10.04: cap.1, cap.2 con correzioni minori, cap.3; introdotta indicazione delle parti facoltative;
4. Versione 2c, 30.10.04: modifiche minori ai parr.2.4.1, 3.9, 3.10.6 ed altre aggiunte facoltative; aggiunto es.3.10.1; cap. 4.

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 1

Introduzione

Questo corso ha lo scopo di introdurre i concetti e le tecniche di base della fisica generale (meccanica del punto e dei fluidi, termologia, elettricità, e cenni di altri argomenti). L'obiettivo della fisica generale è lo studio di alcuni fenomeni e processi fondamentali che si verificano spontaneamente in natura, o che sono provocati dall'applicazione di tecniche specifiche. Proprio perché si rivolge a fenomeni di tipo fondamemtale, la fisica è una disciplina *semplice*: ad esempio, il punto di vista della fisica prevede di studiare separatamente i singoli processi di base, di discutere il comportamento di singole particelle, o al massimo di coppie di particelle che interagiscono solo fra di loro, di impiegare principi che consentono di giungere direttamente alla descrizione delle principali conseguenze fisiche di fenomeni anche complicati.

Il *metodo* della fisica si basa sull'osservazione della natura, cioè sull'individuazione di grandezze caratteristiche del fenomeno sotto indagine e sulla loro misura. Quindi, sfruttando un modello interpretativo "ragionevole", i dati dell'osservazione vengono interpretati, consentendo di giungere alla formulazione di *leggi*, cioè di rappresentazioni matematiche che riassumono la dipendenza tra le variabili sperimentali, o di *principi*, cioè considerazioni di carattere generale sul comportamento fisico del sistema studiato.

L'interesse (ed il valore aggiunto) dello studio della fisica è nella possibilità di fare un percorso simile, ma in un certo senso "alla rovescia", rispetto a quello che conduce alla formulazione di leggi e principi. Partendo dalla conoscenza di pochi, semplici concetti, spesso mutuati od ispirati dall'esperienza comune, lo studio della fisica dovrebbe condurre a costruire un modello interpretativo dei dati (sperimentali o riportati nel testo di un problema) che offre la possibilità di comprendere il fenomeno indagato, o di fare previsioni quantitative sull'esito di un effetto.

In questi appunti cercheremo di seguire questa impostazione, c privilegiando, più che la conoscenza delle nozioni (che comunque sono poche e facili da ricordare), la formulazione del modello, che serve a semplificare il trattamento dei dati, e le tecniche che consentono di usare le leggi della fisica per la soluzione dei problemi proposti.

1.1 Dimensioni ed unità di misura

Un aspetto fondamentale della fisica, come di tutte le discipline scientifiche che si occupano dell'osservazione di fenomeni e processi, è la *misura* delle grandezze che servono a descrivere le osservazioni in modo "universale" (cioè comprensibile a tutti, secondo regole generali) e compatibile con leggi di tipo matematico.

Il problema di eseguire misure fisiche su di un sistema, sia esso naturale o artificiale, è più delicato di quanto si possa pensare e richiede attenzione per evitare imprecisioni ed errori.

Come prima avvertenza, occorre adottare in modo sistematico la nozione di *dimensione*: tutte le grandezze fisiche devono riferirsi ad opportune dimensioni (ad esempio, lunghezza, massa, carica elettrica, etc.), e nella formulazione matematica di una legge fisica deve essere rispettata la coerenza fra le dimensioni delle grandezze che sono coinvolte. Per intenderci, una legge fisica è generalmente espressa sotto forma di un'equazione: se le dimensioni del primo membro sono, per esempio, quelle di una lunghezza, anche il secondo membro deve avere le stesse dimensioni. Ancora, somme o differenze hanno senso solo se coinvolgono grandezze che hanno le stesse dimensioni (sommare "pere con pere" e "mele con mele").

Per soddisfare le esigenze di "universalità" che abbiamo già anticipato, le misure devono essere riferite ad un *sisema di unità di misura* definito senza ambiguità. Noi faremo riferimento al cosiddetto sistema **mKs**, che prende nome dalle iniziali di metro, Kilogrammo, secondo, che sono le unità di misura fondamentali rispettivamente per lunghezza, massa, tempo. Per queste grandezze esistono dei *campioni* (i testi di fisica ne descrivono le caratteristiche) e sono disponibili ricette e procedure di vario genere che consentono di "calibrare" gli strumenti di misura, dovunque essi si trovano, rispetto a questi campioni standard. Ovviamente, nella fisica incontreremo non solo grandezze che si misurano in termini di metri, Kilogrammi e secondi, cioè non avremo a che fare solo con lunghezze, masse ed intervalli di tempo. Per le altre dimensioni e le unità di misura che tratteremo, avremo in genere tre situazioni diverse: (i) introdurremo nuove unità fondamentali, ad esempio per la carica elettrica (che si misura in Coulomb, un'unità fondamentale nel cosiddetto Sistema Internazionale, di cui l'mKs è un sottoinsieme); (ii) grandezze derivate da quelle di lunghezza, massa, tempo sono espresse in funzione di metro, Kilogrammo, secondo, come ad esempio la velocità, che si misura in m/s (si legge metri al secondo); (iii) in alcuni casi, si danno nomi speciifici a grandezze derivate, ad esempio nel caso della forza, che si misura in Newton, e che può essere espressa in funzione delle unità mKs come Kilogrammo per metro su secondi al quadrato. Nel corso del testo vedremo caso per caso come ci si deve comportare.

1.2 Grandezze e prefissi

Poiché la fisica si occupa di fenomeni che appartengono ad ambiti assai diversi tra loro, le grandezze coinvolte nei problemi della fisica possono anche essere estremamente diverse tra di loro. Ad esempio, nella fisica si ha a che fare con lunghezze astronomiche e con le lunghezze che servono a descrivere fenomeni atomici e sub-atomici. Quindi è spesso opportuno utilizzare un metodo che permetta di esprimere con facilità grandezze che possono coprire un intervallo molto vasto.

Questo scopo può essere raggiunto servendosi della cosiddetta *notazione esponenziale*, che consiste nell'esprimere una grandezza come prodotto di una “mantissa” e di una potenza di 10. Ad esempio, il numero 0.000123 può essere espresso come 1.23 $\times 10^{-4}$, il numero 123000 come 1.23 $\times 10^{5}$. Possiamo indicare *approssimativamente* tali numeri facendo riferimento agli **ordini di grandezza**, che sono rispettivamente 10^{-4} e 10^{5}. Per tornare agli esempi di prima, in astronomia si trovano lunghezze con ordine di grandezza di 10^{26} m (un uno seguito da cinque zeri), in fisica sub-atomica le lunghezze possono essere dell'ordine di 10^{-15} m (un zero seguito dalla virgola e da altri quattordici zeri, e poi dall'uno).

Un modo alternativo usato spesso per descrivere grandezze che appartengono ad un vasto intervallo di valori si basa sull'uso dei **prefissi**. Ci sono prefissi che moltiplicano (ad esempio Kilo, Mega, Giga, Tera, simboli K, M, G, T, per indicare moltiplicazione rispettivamente per $10^3, 10^6, 10^9, 10^12)$ e prefissi che dividono (ad esempio milli, micro, nano, pico, simboli m, μ, n, p, per indicare divisione rispettivamente per $10^3, 10^6, 10^9, 10^12)$. Per intenderci, 1 μm $= 10^{-6}$m, 1 Kg $= 10^3$g, e così via.

1.3 Precisione e cifre significative

Dato che la fisica si basa su una descrizione *quantitativa* della natura, cioè sull'osservazione e sulla misura di grandezze, occorre molta attenzione nello stabilire le regole e le modalità operative della misura. Supponiamo infatti di dover misurare la larghezza di un tavolo: a seconda del tipo di metro che impieghiamo (in particolare, della *risoluzione* dello strumento, praticamente la spaziatura delle tacchettine, che può essere, ad esempio, mezzo centimetro, un millimetro, mezzo millimetro, e così via) e della attenzione che poniamo nell'eseguire la misura, possiamo ottenere dei risultati diversi.

In generale, ogni misura che viene eseguita è associata ad una **precisione**, che dipende da numerosi fattori (strumentali, sperimentali, statistici, fondamentali, etc.). Quindi ogni misura è affetta da un'**incertezza** (o errore di misura) che a rigore non può essere annullata. Talvolta, l'incertezza viene specificata esplicitamente, ad esempio scrivendo che una lunghezza è (120 $\pm$ 1) mm se l'incertezza è di un millimetro. In altri casi ci si affida ad una *convenzione*, che stabilisce che l'incertezza è nell' *“ultima” cifra significativa.*

Le **cifre significative** sono quelle (tutte quelle) che servono a stabilire il valore di una grandezza. Ad esempio, la grandezza 12345 mm = 1.2345 $\times 10^4$ mm ha cinque cifre significative, e convenzionalmente le si attribuisce un'incertezza pari a $\pm$ 1 mm. La grandezza 0.0123 mm = 1.23 $\times 10^{-2}$ mm ha invece tre cifre significative (gli zeri iniziali non “contano”, come dimostra la riscrittura in forma esponenziale), e l'incertezza convenzionale è pari a $\pm$ 0.0001 mm = 10^{-4} mm.

In questo corso non avremo a che fare con operazioni sperimentali di misura, e quindi tali problemi non avranno un ruolo centrale. Tuttavia, i concetti che vi sono coinvolti devono ugualmente essere ricordati. Quando si cercherà di risolvere numericamente dei problemi di fisica, sarà opportuno ricordare che il numero di cifre significative della risposta finale deve essere adeguato a quello dei dati di partenza. Questo aspetto diventa particolarmente cruciale quando la risposta richiede alcune operazioni, come ad esempio la divisione fra grandezze, che, se eseguite con una calcolatrice, possono facilmente mostrare un numero di cifre significative eccessivo e privo di significato fisico (la calcolatrice mostra sempre tutte le cifre significative che può, generalmente otto o dieci, a prescindere dalla precisione dei dati introdotti). Ad esempio, supponiamo di dover calcolare la velocità media del moto di un punto, che, come vedremo, si ottiene dividendo lo spazio percorso per il tempo necessario a percorrerlo. Se lo spazio è $\Delta S = 152$ m (si intende che l'incertezza sia $\pm$ 1 m, cioè la grandezza ha tre cifre significative) ed il tempo vale $\Delta t = 54$ s (si intende un'incertezza $\pm$ 1 s, cioè si hanno due cifre significative), il rapporto tra ΔS e Δt si esprime come 2.8 s, cioè con due cifre significative (è anche accettabile la risposta 2.81 s, con tre cifre significative). Se viene usata una calcolatrice, il display mostra altre cifre che, però, non devono essere considerate dato che l'operazione di divisione necessaria per calcolare il risultato finale non può "aumentare la precisione" delle misure.

Capitolo 2

Moto del punto

In questo capitolo affrontiamo gli aspetti fondamentali della cinematica del punto materiale, che riguardano la descrizione dello spostamento in funzione delle sue caratteristiche (velocità, accelerazione, etc.). Introdurremo inoltre uno strumento matematico, i vettori, che ha importanza per lo studio di numerosi fenomeni, anche al di fuori dei confini della cinematica.

2.1 Cinematica

La cinematica si occupa fondamentalmente del problema di definire la *legge oraria del moto* (o *equazione del moto*) di un corpo di cui sia nota la velocità e/o l'accelerazione, e le sue *condizioni iniziali.* Ci restringiamo per ora ad un caso *unidimensionale*, in cui la *traiettoria* del corpo, cioè la sequenza di punti da esso occupati in istanti successivi, appartiene ad una linea. Inoltre schematizziamo il corpo come un punto geometrico, cioè supponiamo che esso non abbia dimensioni[1]. Intendiamo eseguire il nostro studio del moto del corpo a partire da un certo istante, che chiamiamo t_0. In molti casi faremo coincidere questo *istante iniziale* con lo zero dei tempi, l'istante in cui facciamo partire il cronometro che utilizziamo per studiare il nostro fenomeno, cioè porremo $t_0 = 0$[2]. Definiamo spostamento del punto, $\Delta S(t)$, lo spazio percorso dal punto dall'istante t_0 all'istante t generico. In altre parole, detta $s(t)$ la posizione del punto sulla traiettoria all'istante t generico e $s_0 = s(t_0)$ la posizione iniziale del punto, cioè quella occupata all'istante iniziale t_0, si ha $\Delta S(t) = s(t) - s_0$. Se poi si fa coincidere la posizione iniziale del punto con l'origine del sistema di riferimento, in pratica misurando le distanze a partire dalla posizione occupata dal punto all'istante iniziale, cioè si pone $s_0 = 0$, allora si ha $\Delta S(t) = s(t)$. [3]

[1] Si tratta di un'approssimazione che non ha sempre senso, e anzi non vale per lo studio completo della cinematica dei cosiddetti corpi rigidi, oggetti che ad esempio possono ruotare su se stessi mentre si muovono, ma ugualmente per ora ci restringiamo ai casi per i quali vale un modello puntiforme.

[2] L'unità di misura del tempo nel sistema mKs è il secondo, simbolo s. Per i distratti ricordiamo che un minuto vale 60 s, ed un'ora 3600 s!

[3] L'unità di misura dello spostamento nel sistema mKs è il metro, simbolo m.

Notiamo che questa definizione di spostamento dà la possibilità di avere $\Delta S(t)$ positivi e negativi. Questo implica di definire come positivo un *verso* di percorrenza della traiettoria. Un buon esempio per capire il significato di quanto affermato è costituito dalle strade consolari, che, come noto, partono tutte da Roma e sono dotate di pietre miliari poste ad intervalli di distanza tutti uguali fra loro. In sostanza, Roma (ovvero una posizione ben precisa in Roma, forse il sagrato di San Pietro) è il punto con *coordinata* $s_0 = 0$, e le distanze sono tutte riferite a questo punto origine. Nella via Aurelia, se ci spostiamo "verso nord" incontriamo pietre miliari di valore sempre crescente, e quindi il verso positivo di percorrenza della traiettoria (costituita dalla via Aurelia) è il nord. Allora, se ci spostiamo da Grosseto a Pisa compiamo uno spostamento positivo, dato che s(Pisa) > s(Grosseto), viceversa se andiamo da Pisa a Grosseto facciamo uno spostamento negativo.

Trovare la legge oraria del moto equivale a determinare l'andamento della funzione $\Delta S(t)$, ovvero a stabilire (o predire) il valore dello spostamento del punto per ogni istante generico t, una volta stabilita la condizione iniziale s_0.

2.1.1 Velocità

La velocità rappresenta lo spostamento che il punto fa nell'unità di tempo (un secondo nel sistema mKs). Nel caso di un moto che avviene a velocità *uniforme e costante*, che cioè non dipende né dalla posizione del punto, né dall'istante considerato, detto anche **moto rettilineo uniforme**, la legge oraria del moto è

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0) \ , \tag{2.1}$$

cioè, posto $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta S = v\Delta t \ , \tag{2.2}$$

ovvero la velocità v, che in questo caso non dipende dal tempo, è:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \ . \tag{2.3}$$

Dalla Eq.2.3 risulta che le dimensioni della velocità sono [spostamento]/[tempo] e quindi la sua unità di misura nel sistema mKs è m/s. Nella realtà, molto spesso la velocità non si può assumere costante ed uniforme, e la relazione data in Eq.2.3 esprime solo la cosiddetta *velocità media* del moto considerato, che si esprime con il simbolo $\overline{v}$. Quindi la relazione generale, cioè valida per ogni tipo di moto, che serve per esprimere la velocità media è:

$$\overline{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \ . \tag{2.4}$$

Vediamo con un esempio il significato fisico della velocità media. Se andate in treno da Pisa a Firenze (supponiamo ΔS = 79.2 Km = 7.92×10^3 m) impiegando un tempo, poniamo, Δt= 1 ora = 3600 s[4], il rapporto $\Delta S/\Delta t$ = 22.0 m/s = 79.2 Km/h, rappresenta

[4]Supponiamo che la precisione nel determinare il tempo sia di un secondo.

la velocità media del vostro viaggio, e tutti sapete che la velocità attuale cambia continuamente (ad esempio, diminuisce ed aumenta rispettivamente all'entrata e all'uscita dalle varie stazioni)[5]. Allo scopo di ottenere una valutazione più "sensata" della velocità e della sua dipendenza dal tempo (ovvero per definire la funzione $v(t)$) occorre suddividere il tempo totale in tanti piccoli intervallini, cioè esaminare il moto per intervalli $\Delta t \to 0$[6]

Poiché nei nostri problemi supporremo sempre di avere a che fare con intervalli di tempo positivi, cioè $\Delta t > 0$, il *segno* della velocità dipende da quello di ΔS, cioè la velocità è positiva quando il moto avviene verso valori della coordinata $s(t)$ crescenti, e negativo altrimenti (la velocità è ovviamente nulla se non c'è spostamento!).

Notate anche che, se si osserva un grafico della legge oraria del moto, o *diagramma del moto* (costruito mettendo sulle ascisse il tempo, e sulle ordinate la posizione, o lo spostamento), la velocità istantanea è proporzionale al coefficiente angolare della retta tangente, punto per punto, al grafico. Quindi la "pendenza" della curva che rappresenta il diagramma del moto dà un'informazione sulla velocità istantanea, incluso il suo segno ($v(t) < 0$ significa che si sta "tornando indietro" nello spostamento). Per un moto rettilineo uniforme, il diagramma del moto è una retta e la sua pendenza, cioè la velocità, rimane costante per qualsiasi intervallo temporale considerato.

2.1.2 Accelerazione

L'accelerazione a rappresenta la variazione della velocità nell'unità di tempo. Quanto detto nel par. 2.1.1 a proposito della velocità può essere ripetuto nel caso dell'accelerazione, avendo cura di sostituire al posto dello spostamento ΔS la variazione di velocità Δv. In sostanza, quindi, si può definire un'*accelerazione media* $\overline{a}$ che vale:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \ , \tag{2.5}$$

ed un'*accelerazione istantanea* che si ottiene considerando intervalli di tempo $\Delta t \to 0$.[7]

[5] Notate quante "approssimazioni" avete adottato per impostare il problema: ad esempio, avete considerato il treno come un punto, ragionevole se trascurate le variazioni della sua lunghezza dovute alla contrazione/dilatazione dei respingenti e se non siete interessati a studiare i possibili "cappottamenti" dei vagoni, e avete considerato il moto unidimensionale perché vincolato alla linea delle rotaie, anche se di sicuro queste non procedono in linea retta.

[6] **FAC** Dal punto di vista matematico, la velocità $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ rappresenta il limite di un rapporto incrementale, ovvero la *derivata* rispetto al tempo della funzione spostamento ($\Delta S(t)$): $v(t) = \frac{d\Delta S(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}$. Notate che nell'ultimo passaggio si è sostituito lo spostamento $\Delta S(t)$ con la "posizione" $s(t)$: ciò ha senso, perché, derivando rispetto al tempo, la derivata del termine s_0, che è costante nel tempo, fa zero.

[7] **FAC** Tenendo conto del fatto che anche l'accelerazione può cambiare istante per istante durante il moto del punto, cioè essere funzione del tempo $a(t)$, si ha:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \tag{2.6}$$

(l'ultima espressione, che si ottiene ricordando che la velocità è la derivata temporale della posizione, indica, nel linguaggio matematico, la *derivata seconda* della funzione posizione rispetto al tempo.

Le dimensioni dell'accelerazione sono, ovviamente, quelle di una velocità diviso per un tempo, cioè spazio diviso per tempo al quadrato, e quindi l'unità di misura mKs è m/s^2. Analogamente a quanto osservato prima, l'accelerazione istantanea è proporzionale alla pendenza punto per punto del grafico della legge oraria *della velocità*, costruito mettendo sull'ordinata la velocità e sull'ascissa il tempo. Per il moto rettilineo uniforme, tale grafico è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ascisse, la cui pendenza è nulla (e l'accelerazione vale, giustamente, zero).

Notate che il *segno* dell'accelerazione ha un chiaro significato solo se esso viene paragonato al segno della velocità: in particolare, se i segni di velocità ed accelerazione sono gli stessi (tutti e due positivi o tutti e due negativi), allora il punto sta accelerando, cioè la sua velocità aumenta (in valore assoluto!); viceversa, se i segni sono opposti significa che il punto sta "decelerando", cioè la sua velocità (in valore assoluto!) sta diminuendo.

Un caso di moto estremamente interessante è quello caratterizzato da una accelerazione costante ed uniforme (**moto uniformemente accelerato**). In questo caso è possibile esprimere la legge oraria del moto (la funzione $s(t)$) a partire dal valore dell'accelerazione a, che non dipende dal tempo, essendo costante, ed è anche pari a $\overline{a}$. Cominciamo con il notare che la variazione della velocità Δv si può ottenere direttamente invertendo l'Eq.2.5: $\Delta v = \overline{a}\Delta t = a\Delta t$. Ponendo $\Delta v = v(t) - v_0$, essendo $v_0 = v(t_0)$ la velocità del punto all'istante iniziale, si ha:

$$v(t) = v_0 + a\Delta t = v_0 + a(t - t_0). \tag{2.7}$$

Quindi la velocità varia *linearmente* con il tempo (cioè la legge oraria della velocità è rappresentata da una retta la cui pendenza, costante, è proporzionale all'accelerazione). A questo punto per ottenere la $s(t)$ non si può direttamente impiegare la Eq.2.2, poiché la velocità dipende dal tempo[8]. È però possibile impiegare uno stratagemma, basato proprio sul fatto che la velocità è funzione lineare del tempo. Il *valore medio* della variazione di velocità calcolata tra gli istanti t_0 e t (generico), che indichiamo con $< \Delta v >$, è[9]

$$< \Delta v >= \frac{\Delta v(t_0) + \Delta v(t)}{2} = \frac{v(t) - v_0}{2} \ , \tag{2.8}$$

dove l'ultimo passaggio è ovvio tenendo conto che la variazione della velocità è nulla all'istante iniziale.

Ora sostituiamo nell'Eq.2.8 l'espressione della $v(t)$ trovata prima in Eq.2.7, ottenendo:

$$< \Delta v >= \frac{a(t - t_0) + v_0 - v_0}{2} = \frac{a}{2}(t - t_0) \ . \tag{2.9}$$

Dunque a questo punto possiamo utilizzare la Eq.2.2 mettendoci la velocità media appena trovata, ottenendo:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \tag{2.10}$$

[8]Dal punto di vista matematico, per trovare la funzione posizione a partire dalla funzione velocità occorre eseguire l'operazione "inversa" rispetto alla derivazione, cioè integrare nel tempo la Eq.2.7. Il risultato è analogo a quello ottenuto nel testo per altra via.

[9]Ricordiamo che la media algebrica delle grandezze A e B vale $\frac{A+B}{2}$.

Come vedremo in seguito, questa espressione è rilevante in molti casi, ad esempio per descrivere la cosiddetta caduta dei gravi (un oggetto qualsiasi che cade in terra!). Notate che il grafico della legge oraria è in questo caso rappresentato da una parabola.

2.1.3 Esercizio: cavalli che si rincorrono

Due cavalli, A e B, corrono in un ippodromo (questa affermazione è importante perché ci consente di considerare il moto unidimensionale! La traiettoria è infatti vincolata al tracciato della pista). Ad un dato istante (che per noi sarà l'istante iniziale t_0, e per semplificare le nostre scritture porremo $t_0 = 0$, cioè a questo istante facciamo partire il cronometro, che abbiamo precedentemente azzerato) A ha oltrepassato il traguardo per la distanza $d_A = 16$ m e viaggia a velocità uniforme v_A= 6 m/s. Il cavallo B, invece, a quello stesso istante $t_0 = 0$ parte da fermo dal traguardo, con accelerazione a_B= 2 m/s^2. A quale distanza D dal traguardo B raggiungerà A?

Soluzione. A si muove di moto rettilineo (ehm, significa che abbiamo mentalmente linearizzato l'ippodromo...) uniforme, partendo dalla posizione iniziale d_A. Quindi la sua legge del moto, considerandolo come un punto (!!) è[10]:

$$s_A(t) = d_A + v_A t \; . \tag{2.11}$$

B, invece, si muove partendo dal traguardo (posizione iniziale zero, avendo posto l'origine del nostro riferimento sul traguardo) e con velocità iniziale nulla (è inizialmente fermo!) con moto uniformemente accelerato:

$$s_B(t) = \frac{a_B t^2}{2} \; . \tag{2.12}$$

Perché B raggiunga A occorre che $s_B = s_A$. Ammesso che questa situazione si verifichi (in questo caso ovviamente sì ma in altri problemi in cui si studia il moto di due corpi non è detto si verifichi sempre), questo significa che esiste un istante $\tilde{t}$ in cui $s_A(\tilde{t}) = s_B(\tilde{t})$. Questo istante si trova uguagliando fra loro le Eqq.2.11 e 2.12: $d_A + v_A\tilde{t} = (a_B/2)\tilde{t}^2$. In sostanza, si deve risolvere un'equazione algebrica di secondo grado, che, riscritta, recita:

$$\frac{a_B}{2}\tilde{t}^2 - v_A\tilde{t} - d_A = 0 \; ; \tag{2.13}$$

la soluzione è:

$$\tilde{t}_{1,2} = \frac{v_A \pm \sqrt{v_A^2 + 4(a_B/2)s_A}}{2a_B/2} \; . \tag{2.14}$$

A questo punto[11] possiamo sostituire i valori numerici, e verificare che le due soluzioni sono reali e distinte (il "discriminante" è positivo e diverso da zero): una delle due possibili

[10] Notate che si tratta della legge del moto rettilineo uniforme scritta usando esplicitamente i *parametri del problema.*

[11] È sempre **fortemente consigliato** sostituire i valori numerici solo quando la soluzione "letterale" è stata completamente determinata!

soluzioni è negativa, cioè dà $\tilde{t} < 0$. Questa soluzione è da scartare, perché si riferisce ad un evento che avrebbe dovuto verificarsi prima dell'istante iniziale. L'altra soluzione, che numericamente vale $\tilde{t}= 8$ s, definisce l'istante in cui B raggiunge A, e per sapere qual è la distanza percorsa dai due cavalli basta usare una delle due leggi del moto (Eq.2.11 o 2.12, tutte e due devono dare lo stesso risultato) infilandoci dentro come tempo l'istante di incontro appena trovato, cioè ponendo $t = \tilde{t}$. Si trova $D = s_A(\tilde{t}) = s_B(\tilde{t}) = 64$ m.

2.2 Posizione di un punto e moto in più dimensioni

Per individuare la posizione di un punto nello spazio (tridimensionale) si fa uso dei cosiddetti *sistemi di riferimento*. Il più semplice è il sistema di coordinate cartesiane X, Y, Z, costruito tracciando tre semirette in direzione ortogonale fra loro a partire da un punto definito come l'origine del sistema ($x = y = z = 0$).[12] Per convenzione, le semirette formano un sistema "destrorso", cioè X, Y, Z sono disposti come pollice, indice, medio della mano destra. Estendendo le semirette a rette, cioè dando la possibilità di avere anche valori negativi delle coordinate, un punto qualsiasi nello spazio può essere individuato univocamente con una terna di coordinate x, y, z.

Un moto rettilineo (uniforme, uniformemente accelerato, oppure vario qualsiasi) si può descrivere come un moto che avviene lungo una linea parallela ad uno degli assi (ad esempio l'asse X). Un moto in più dimensioni è in generale descritto dalle leggi orarie del moto per le singole direzioni ortogonali: $x(t), y(t), z(t)$.[13] Per ognuna di esse, a seconda delle situazioni fisiche che si verificano, è possibile ripetere i ragionamenti svolti nella sezione precedente, come vedremo negli esempi a seguire.

2.2.1 Esercizio: il moto parabolico

Abbiamo un punto che compie un moto nel piano XZ (la coordinata y rimane sempre costante, supponiamo sempre nulla) con le leggi:

$$x(t) = v_0 t \tag{2.15}$$
$$z(t) = -a/2t^2 \tag{2.16}$$

(moto rettilineo uniforme lungo X ed uniformemente accelerato lungo Z, con accelerazione diretta nel verso negativo dell'asse Z [14]). Si vuole sapere la traiettoria del moto, cioè che tipo di curva è realizzata dalla sequenza di posizioni occupate dal punto in istanti successivi del suo moto.

[12] **FAC** A seconda delle proprietà geometriche del sistema sotto indagine, talvolta si usano sistemi di coordinate diversi da quello cartesiano, ad esempio il sistema polare, quello cilindrico o quello sferico.

[13] Per un moto che si svolge in un piano bastano, ovviamente, due coordinate.

[14] Spesso l'asse Z si assume diretto "verso l'alto", quindi in questo caso l'accelerazione punta "verso il basso", proprio come nella caduta dei gravi.

Soluzione. Se ricaviamo il tempo dalla legge del moto lungo X e lo mettiamo nella legge del moto lungo Z otteniamo l'equazione:

$$z = -\frac{a}{2}\frac{x^2}{v_0^2} \tag{2.17}$$

che rappresenta geometricamente una parabola con vertice nell'origine (e diretta "verso il basso"). Per chi ha poca dimestichezza con curve e geometrie, la parabola di questo esempio è praticamente la traiettoria percorsa da un piccolo oggetto lanciato con velocità iniziale orizzontale. Provate a disegnarla punto per punto su un foglio di carta a quadretti (o, meglio, millimetrata) che riproduce il piano XZ.

2.3 Vettori

Lo spostamento nello spazio a tre dimensioni può essere espresso convenientemente con tre coppie di coordinate (per intenderci x_0, x e y_0, y e z_0, z). Queste tre coppie identificano nello spazio:

- un punto di partenza, detto anche **punto d'applicazione**, che ha coordinate x_0, y_0, z_0;
- una **direzione**, quella della congiungente la partenza con l'arrivo, che è il punto di coordinate x, y, z;
- un **verso** (dalla partenza all'arrivo);
- una lunghezza (o **modulo**), corrispondente all'entità dello spostamento.

Dare queste quattro proprietà, che nello spazio reale possono essere rappresentate con una freccia che congiunge la partenza con l'arrivo, significa definire un **vettore**, il vettore spostamento. Dal punto di vista della simbologia, una grandezza vettoriale si indica con una freccina sopra (ad esempio, lo spostamento ΔS come vettore si scrive $\overrightarrow{\Delta S}$), oppure usando il carattere grassetto $\mathbf{\Delta S}$, o anche sottolineando il simbolo ($\underline{\Delta S}$).

Fate attenzione al fatto che lo spostamento, pur prestandosi in modo "naturale" alla rappresentazione vettoriale, non è l'unico vettore che incontrerete. Ad esempio, anche velocità ed accelerazione nel moto in più dimensioni sono vettori. Possiamo infatti generalizzare a grandezze vettoriali le relazioni che abbiamo già scritto nel caso unidimensionale. Per esempio, facciamo riferimento all'Eq.2.3 scritta prima, e notiamo che, se $\overrightarrow{\Delta S}$ è un vettore, anche la velocità, che si ottiene dividendo lo spostamento per un intervallo temporale (che, come ribadiremo più avanti, non è una grandezza vettoriale) *deve* essere un vettore. Possiamo anche aggiungere che, per come questo vettore è costruito, direzione e verso coincidono con quelli dello spostamento. Dunque, direzione e verso della velocità, anche nel caso di un moto vario in cui la velocità istantanea non è costante ed uniforme, coincidono con quelli dello spostamento istantaneo[15].

[15] In geometria, l'operazione di estrarre dalla traiettoria di un moto la direzione e il verso istantanei di percorrenza consiste nel disegnare la *retta tangente* punto per punto alla traiettoria.

Altro esempio rilevante nel nostro tentativo di generalizzare in senso vettoriale le osservazioni già fatte per il caso unidimensionale: un modo compatto per esprimere la legge del moto uniformemente accelerato nel caso tridimensionale è:

$$\overrightarrow{\Delta S}(t) = \overrightarrow{v_0}\Delta t + \frac{\vec{a}}{2}(\Delta t)^2 \ . \tag{2.18}$$

Questa espressione equivale di fatto a scrivere tre leggi del moto, ognuna relativa ad una singola direzione nello spazio, che si ottengono considerando le *componenti vettoriali* dello spostamento lungo X, Y, Z: $x(t) = v_{0,x}\Delta t + \frac{a_x}{2}(\Delta t)^2$, $y(t) = v_{0,y}\Delta t + \frac{a_y}{2}(\Delta t)^2$,$z(t) = v_{0,z}\Delta t + \frac{a_z}{2}(\Delta t)^2$.[16] Il moto del punto risulta allora dalla "composizione" del moto lungo le tre direzioni cartesiane X, Y, Z.

Anticipando quanto vedremo in altre parti del corso (anche fuori dallo studio della dinamica), possiamo affermare che ogni volta che si ha a che fare con grandezze che "dipendono" dalla direzione considerata si fa riferimento a grandezze vettoriali[17]. Le grandezze che non hanno una dipendenza dalla direzione spaziale si dicono invece **scalari** (per ora, ad esempio, abbiamo incontrato il tempo, che è chiaramente uno scalare, dato che la sua misura non dipende dalla direzione, almeno in ambito di fisica classica).

Ripetiamo ancora che definire un vettore equivale ad indicarne le sue **componenti**, che, nel caso dello spostamento e considerando un sistema di riferimento cartesiano, sono: $\Delta S_x = x - x_0, \Delta S_y = y - y_0, \Delta S_z = z - z_0$. La lunghezza del vettore, cioè il suo modulo, che si indica come $|\overrightarrow{\Delta S}|$ (o anche semplicemente come ΔS, senza freccina in capo, sottolineature o grassetti), è:

$$|\vec{\Delta S}| = \sqrt{\Delta S_x^2 + \Delta S_y^2 + \Delta S_z^2} \ . \tag{2.19}$$

Questo risultato si ottiene immaginando le componenti come spigoli di un prisma, di cui il vettore è la diagonale; il teorema di Pitagora fornisce il risultato.

Abbiamo parlato del vettore spostamento nello spazio reale. Se ci riferiamo ancora allo spazio reale, che immaginiamo dotato di un sistema di riferimento cartesiano, possiamo facilmente introdurre un altro vettore, che ha anch'esso dimensioni fisiche di una lunghezza, come lo spostamento. Questo vettore è il *vettore posizione*, spesso indicato con $\vec{r}$, che è il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento al punto di coordinate x, y, z. Come sarà più chiaro in seguito, intuitivamente potete immaginare il vettore spostamento dal punto x_0, y_0, z_0 al punto x, y, z come una sorta di differenza dei due vettori posizione riferiti ai due punti che stiamo considerando.

Per il vettore $\vec{r}$ definito qui sopra, è molto semplice stabilire quali sono le **componenti** nel sistema di riferimento cartesiano che abbiamo costruito. Esse sono praticamente le coordinate cartesiane del punto individuato dal vettore (dove cade la "freccia" del

[16]Per intenderci sulla modalità di scrittura adottata, $v_{0,x}$ significa la componente lungo l'asse X della velocità iniziale $\overrightarrow{v_0}$, cioè il valore iniziale della velocità del punto lungo la direzione individuata dall'asse X.

[17]**FAC** Nella fisica, in realtà, si utilizzano talvolta rappresentazioni ancora più complesse, dette *tensoriali*, per tenere conto in modo completo della dipendenza spaziale.

vettore), cioè valgono x, y, z. Pensate mentalmente all'operazione che fate per determinare geometricamente queste componenti, ad esempio la x, cioè per individuare il valore della coordinata lungo l'asse (per esempio X) del punto finale del vettore. Questa operazione si chiama talvolta **proiezione** del vettore lungo l'asse considerato.

La trigonometria, la parte di geometria che ha a che fare con triangoli ed angoli, permette di esprimere in modo formalmente quantitativo il risultato dell'operazione di proiezione. Richiamiamo qui gli aspetti principali, rimandando al corso di matematica, o alle conoscenze già acquisite, per i dettagli. Per cercare di essere generali, dato che, come detto, incontreremo parecchie grandezze vettoriali, non solo spostamento e posizione, facciamo riferimento ad un vettore generico $\vec{w}$, e per semplicità immaginiamo che esso si trovi sul piano XY (la componente lungo l'asse Z è nulla), così possiamo anche disegnarlo su di un foglio (piano). Chiamiamo le componenti lungo X ed Y dek vettore rispettivamente w_x e w_y. Dunque questo vettore è rappresentato graficamente da una freccia che parte dall'origine del sistema di riferimento XY e va a finire in un qualche punto. Esso forma un certo angolo rispetto all'asse X, che dipende dalla *direzione* (e dal *verso*) del vettore, non dal suo modulo. Chiamiamo θ tale angolo, misurandolo con la convenzione di muoverci in senso antiorario a partire dall'asse X fino ad arrivare alla direzione del vettore (in sostanza, spostamenti angolari antiorari sono positivi, orari sono negativi). La trigonometria ci suggerisce che le componenti sono: $w_x = w \sin\theta$ e $w_y = w \cos\theta$ (la componente w_z è ovviamente nulla). Quindi abbiamo un modo matematico-geometrico per stabilire il valore delle componenti una volta che sia noto il modulo w del vettore ed il valore dell'angolo θ[18][19].

Per inciso, tutto quanto abbiamo discusso finora ci fa capire che un vettore è completamente determinato dalle sue componenti cartesiane. Quindi un modo frequentemente usato per "scrivere" un vettore consiste nel mettere le componenti fra parentesi, separate da una virgola. Ad esempio, nel caso tridimensionale potrete trovare la seguente espressione: $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$.

2.3.1 Alcune operazioni con i vettori

I vettori, in quanto entità geometrico-matematiche, sono soggetti a diverse operazioni, alcune delle quali saranno introdotte nel seguito. Per ora rammentiamo la moltiplicazione

[18] In sostanza, conoscere il modulo del vettore e l'angolo permette di determinare le componenti cartesiane del vettore e quindi il vettore stesso, purché esso giaccia su di un piano (il piano XY nell'esempio dato). In termini generali, allora, è come se avessimo usato un altro tipo di sistema di riferimento, basato su modulo e angolo, invece che sulle componenti cartesiane, per individuare il vettore. Questo sistema di riferimento è il sistema **polare**. Naturalmente, in entrambi i sistemi di riferimento abbiamo bisogno di due parametri indipendenti per individuare il vettore, essendo il problema a due dimensioni.

[19] **FAC** Per completezza, riportiamo le relazioni che sono necessarie per determinare le componenti di un vettore nel caso tridimensionale, in cui tutte e tre le componenti cartesiane w_x, w_y, w_z sono diverse da zero. Avremo bisogno di tre parametri indipendenti, che sono il modulo e l'angolo θ compreso tra asse X e vettore, come abbiamo già visto nel caso bidimensionale, e un altro angolo, che indichiamo con ϕ, quello compreso tra asse Z e vettore. La trigonometria, che qui è un po' più complicata, ci suggerisce che: $w_x = wcos\theta sin\phi, w_y = wsin\theta sin\phi, w_z = wcos\phi$.

di un vettore per uno scalare (o viceversa, vale la proprietà commutativa!), che equivale a moltiplicare per lo stesso scalare tutte le tre componenti. Quindi, supponendo di avere uno scalare a ed un vettore $\vec{w}$ di componenti w_x, w_y, w_z, il prodotto $a\vec{w}$ ha componenti aw_x, aw_y, aw_z. Ricordando poi che l'operazione algebrica di divisione equivale a moltiplicare per il reciproco, è anche possibile definire la divisione di un vettore per uno scalare, $\vec{w}/a = \frac{1}{a}\vec{w}$, con componenti $w_x/a, w_y/a, w_z/a$. Particolarmente rilevante è la divisione di un vettore per il suo stesso modulo. Il risultato si chiama **versore**, si indica con un cappelluccio in testa, ed ha il significato di un vettore di *modulo unitario* (come si può facilmente dimostrare) con la stessa direzione e verso del vettore di partenza: $\hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$.

Notate che, in generale, il significato geometrico di moltiplicare o dividere un vettore per uno scalare indica l'operazione di "allungare" o "accorciare" il vettore senza modificarne direzione e verso, che dipendono dal *rapporto* tra le componenti[20].

Altra operazione vettoriale molto importante è la somma tra vettori, che si esegue sommando tra loro le tre componenti a coppie[22]. Se abbiamo due vettori $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$, con componenti cartesiane rispettivamente $(w_{1x}, w_{1y}, w_{1z}$ e $(w_{2x}, w_{2y}, w_{2z}$, la loro somma ha componenti cartesiane $(w_{1x} + w_{2x}, w_{1y} + w_{2y}, w_{1z} + w_{2z}$. La somma di due vettori ha anche una rappresentazione geometrica (**regola del parallelogramma**) che vale la pena ricordare. Facendo coincidere i punti di applicazione dei due vettori[23], il vettore somma è la diagonale del parallelogramma di cui i vettori da sommare sono i lati (vedi Fig.2.3.1).

Sottrarre un vettore ad un altro equivale a sommare *l'inverso* del vettore da sottrarre all'altro, cioè $\vec{w_1} - \vec{w_2} = \vec{w_1} + (-\vec{w_2})$. Invertire un vettore significa moltiplicarlo per lo scalare (-1), cioè cambiare segno alle sue componenti. Dal punto di vista geometrico, questa operazione non tocca modulo e direzione, ma consiste in un'inversione del verso. Graficamente, come si vede in Fig.2.3.1(b) (e anche in questo caso a meno di operazioni di traslazione rigida), il vettore differenza congiunge le "punte" dei vettori di partenza.

A questo punto, possiamo tornare all'affermazione di prima relativa all'interpretazione del vettore spostamento come differenza di vettori posizione. Infatti, lo spostamento $\overrightarrow{\Delta S}$ tra i punti individuati dai vettori posizione $\vec{r} = (x, y, z)$ ed $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ può essere visto come una differenza vettoriale: $\overrightarrow{\Delta S} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Potete facilmente verificarlo facendo un opportuno disegnino.

2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro

Seguite un mappa che vi condurrà al tesoro. Partendo dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano X, Y, vi muovete per un tratto $A = 8$ m lungo una direzione che

[20] Ad esempio, per un vettore sul piano XY, la trigonometria ci suggerisce che vale $\tan\theta = w_y/w_x$.[21] Esistono poi numerose altre relazioni trigonometriche utili per legare tra loro componenti, modulo, angoli, che qui non riportiamo ma che sono note a chi conosce i rudimenti della trigonometria.

[22] Ovviamente la somma di un vettore con uno scalare non è definita, essendo oggetti matematici diversi fra loro

[23] Nel caso in cui i vettori da sommare non abbiano i punti di applicazione in comune, è in genere possibile "traslare rigidamente" uno dei due vettori finché il suo punto di applicazione non coincide con quello dell'altro. Traslare rigidamente significa spostare nello spazio il vettore *senza cambiarne direzione, verso e modulo.*

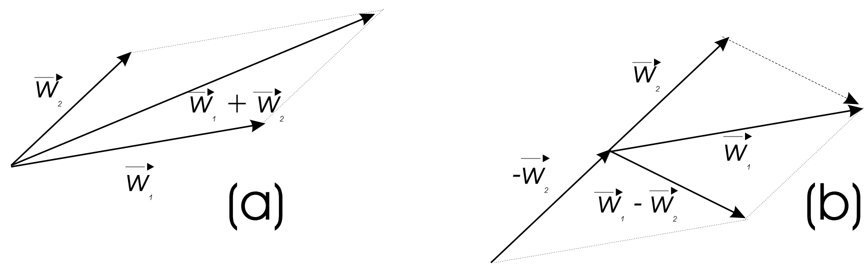

Figura 2.1: Illustrazione della regola del parallelogramma per la somma (a) e la differenza (b) di vettori. Nella figura (b) il vettore $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ è stato disegnato due volte, e la seconda è stato traslato rigidamente in modo da diventare la congiungente fra le "punte" dei vettori di partenza.

forma un angolo di 30 gradi rispetto all'asse X e quindi vi muovete per un tratto $B = 10$ m in direzione parallela all'asse Y ed infine per un tratto $C = 14$ m in direzione *antiparallela* (cioè stessa direzione, ma verso opposto) all'asse Y. Qual è la coordinata y del punto che raggiungete alla fine?

Soluzione. Si tratta di tre spostamenti vettoriali, di modulo rispettivamente A, B e C, che vanno sommati tra loro. Dato che il problema richiede solo la componente y della somma dei vettori, ci limitiamo a sommare *algebricamente* solo le componenti in questa direzione: $y = A_y + B_y + C_y$. Per calcolare A_y applichiamo le leggi, già citate, della trigonometria, che ci danno $A_y = A\cos(30) = A/2$.[24] Inoltre, tenendo conto del testo del problema, si ha $B_y = B$ e $C_y = -C$ (occhio al "verso opposto", che dà luogo al segno meno!). Quindi risulta $y = 0$.

2.3.3 Esempio: composizione delle velocità

La composizione delle velocità è un tipico esempio che mostra l'utilità dell'impiego dei vettori e che può essere significativo anche per introdurre il concetto di *cambio dei sistemi di riferimento* inerziali (cioè dotati di velocità uniforme l'uno rispetto all'altro). Supponiamo di avere un punto materiale che si muove con velocità $\vec{v}_0$ rispetto ad un qualche sistema che si muove, a sua volta, con velocità $\vec{v}_{rif}$. Esempio semplice, tanto per chiarire: vi state muovendo con velocità $\vec{v}_0$ lungo il corridoio di un treno in corsa che si muove a sua volta con velocità $\vec{v}_{rif}$ rispetto al suolo. La vostra velocità *assoluta* rispetto al suolo (cioè rispetto ad un sistema di riferimento solidale al suolo[25]) è semplicemente $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rif}$. [26]

[24]Le funzioni trigonometriche per alcuni angoli, grazie a ragioni di natura geometrica, sono facili da ricordare. Ad esempio, esprimendo gli angoli in gradi, si ha $\cos(60) = \sin(30) = 1/2$, $\sin(30) = \cos(60) = \sqrt{3}/2$, $\sin(45) = \cos(45) = \sqrt{2}/2$, oltre che, ovviamente, $\sin(0) = \sin(180) = \cos(90) = \cos(270) = 0$, $\sin(90) = \cos(0) = 1$ e $\sin(270) = \cos(180) = -1$.

[25]Il termine "assoluto" che abbiamo impiegato ha, in realtà un significato "relativo"! Infatti il suolo della terra si muove rispetto al sole, che a sua volta si muove rispetto alle altre stelle, etc. etc.

[26]Fate attenzione al fatto che la *somma vettoriale* va eseguita componente per componente, tenendo conto del verso del vettore, cioè del segno delle varie componenti, che vanno sommate *algebricamente* tra loro. Infatti, il risultato è ben diverso se vi muovete verso la cima o verso la coda del treno!

Come ulteriore esempio, consideriamo un pesciolino che intende attraversare a nuoto un fiume le cui acque sono mosse da una "corrente" che ha una data velocità. Se indichiamo con $\vec{v}_p$ la velocità che il pesciolino sarebbe in grado di mantenere *in assenza di corrente* e con $\vec{v}_{corr}$ la velocità delle acque rispetto al suolo, possiamo applicare quanto scritto prima, e dedurre che la velocità assoluta del pesciolino, cioè misurata rispetto alle sponde del fiume, è data da $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_{corr}$. Se, ad esempio, doveste calcolare il tempo che il pesciolino impiega per attraversare il fiume, è chiaramente questa la velocità da impiegare nella soluzione del problema.

2.4 Moto circolare uniforme

Un interessante caso di moto a più dimensioni (precisamente a due dimensioni) è il moto circolare uniforme, in cui il punto percorre una circonferenza di raggio R muovendosi in modo costante ed uniforme. Notiamo che, essendo la traiettoria assegnata (la circonferenza), alcune caratteristiche del moto possono essere dedotte considerandolo unidimensionale, cioè dipendente da un solo parametro. Fissiamo un sistema di riferimento X, Y (il moto avviene ovviamente sul piano che contiene la circonferenza) con l'origine sul centro della circonferenza. Tracciamo il raggio che congiunge la posizione del punto sulla circonferenza con il centro (tale raggio ovviamente "ruoterà" con il tempo, e supponiamo che tale rotazione sia antioraria - fosse oraria, dovremmo solo cambiare alcuni segni, come vedremo in seguito); chiamiamo θ l'angolo compreso tra il raggio e l'asse X (sarà un $\theta(t)$ dipendente dal tempo). È chiaro che il moto che stiamo studiando è **periodico**, cioè, se lasciamo il punto ruotare indefinitamente lungo la circonferenza, la stessa posizione (sulla circonferenza) verrà occupata tante (infinite!) volte nel corso del tempo[27].

Il moto circolare si dice *uniforme* se tale angolo θ varia linearmente con il tempo, cioè $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ (nel seguito porremo $\theta_0 = 0$ per semplicità). ω, che per questo tipo di moto non dipende dal tempo, si dice **velocità angolare**. Per un moto circolare *vario*, si ha che ω è in generale funzione del tempo, e quindi θ varia secondo una legge più complicata della semplice dipendenza lineare che abbiamo appena scritto[28]. Possiamo legare il segno

[27]Sottolineiamo un aspetto piuttosto ovvio, ma interessante, del moto circolare: finora, per individuare un punto abbiamo in genere usato le coordinate cartesiane. Poiché il punto si muove sulla circonferenza che appartiene ad un piano, in generale occorrono due coordinate per esprimerne la posizione. Nell'approccio che stiamo usando, invece, per esprimere la posizione del punto usiamo due coordinate, cioè due parametri indipendenti, che non sono di tipo cartesiano, ma si riferiscono ad un sistema di riferimento con coordinate *polari*. Questi due parametri sono il raggio R e l'angolo θ. Notate che, se il moto è circolare, *R resta costante*, mentre θ varia con il tempo secondo una qualche legge. Nel caso (semplice) di moto circolare *uniforme*, come vedremo fra breve, tale legge risulta molto semplice.

[28]Apprezzate la circostanza che il moto circolare uniforme somiglia, formalmente, al moto rettilineo uniforme, solo che, al posto della variabile *lineare* (cioè rappresentata da una distanza che si misura in metri) $s(t)$, si ha una variabile *angolare*, $\theta(t)$, che è adimensionale e si misura in unità angolari. Quindi, ad esempio, potremmo anche introdurre un'*accelerazione angolare*, è nulla nel caso di ω costante nel tempo, così come era nulla l'accelerazione *lineare* nel caso del moto rettilineo uniforme. Ancora, si potrebbe introdurre un moto circolare *uniformemente accelerato* e trasferire tutte le conclusioni che abbiamo visto per il moto rettilineo alle variabili di tipo angolare.

di ω al verso di rotazione impiegando una convenzione, che consiste nel porre $\omega > 0$ per rotazione antioraria, e $\omega < 0$ per rotazione oraria. Questa convenzione è in accordo con quella usata prima quando abbiamo trovato le leggi che permettono di esprimere le componenti cartesiane di un vettore[29].

In fisica, gli angoli si misurano in genere in unità angolari (adimensionali) dette *radianti*, abbreviazione rad[30]. Quindi l'unità di misura nel sistema mKs di ω è rad/s.

Un'altra grandezza utile per caratterizzare il moto è il **periodo** T, cioè il tempo (misurato in s) necessario a percorrere un giro (ovvero un $\Delta\theta = 2\pi$ rad). Impiegando la legge del moto (angolare) che abbiamo scritto sopra per il moto circolare uniforme, cioè $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, e ponendo ovviamente $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, si ha $T = 2\pi/\omega$. L'inverso di T si chiama **frequenza**, che qui indichiamo con il simbolo ν, che indica quanti giri vengono compiuti in un secondo. L'unità di misura di ν è s^{-1}, a cui si dà il nome di Hertz, abbreviato in Hz. Giocando con l'algebra, si vede facilmente che vale la relazione $\nu = \omega/2\pi$.

Abbiamo parlato finora di spostamento e velocità angolari, cioè relative all'angolo θ. Però è chiaro che il punto percorre anche uno spostamento vero e proprio, dato che si muove sulla circonferenza. Quindi dobbiamo anche preoccuparci della **velocità lineare** del moto, cioè la grandezza $\vec{v} = \overrightarrow{\Delta S}/\Delta t$, che si misura in m/s. Si tratta di un vettore che ha chiaramente una direzione variabile continuamente con il tempo, dato che $\overrightarrow{\Delta S}$ appartiene alla circonferenza che viene percorsa in modo continuo dal punto[31]. Questa affermazione non ci stupisce, poiché il moto è, di fatto, in due dimensioni e quindi la sua direzione non è necessariamente costante. Il suo modulo, che, invece, rimane costante durante il moto, può essere determinato notando che l'intera circonferenza, corrispondente ad uno spostamento $|\overrightarrow{\Delta S}| = 2\pi R$, viene percorsa nel tempo $T = 2\pi/\omega$, per cui $|\vec{v}| = |\overrightarrow{\Delta S}|/T = \omega R$.

Essendo il moto uniforme, l'accelerazione angolare (cioè, in termini matematici, la derivata rispetto al tempo della velocità angolare ω, è nulla. L'accelerazione lineare $\vec{a} = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$, che si misura in m/s^2, invece, non è nulla. Questo aspetto è piuttosto singolare, ed è proprio dei moti curvilinei (in generale, cioè anche per quelli la velocità angolare non è costante). Infatti, nei moti rettilinei, dove la direzione della velocità è una retta, se il modulo della velocità rimane costante l'accelerazione è nulla. Possiamo determinare quantitativamente il vettore $\vec{a}$.

Vediamone prima la direzione e verso del vettore, per poi esaminarne il modulo. Facciamo riferimento alla Fig.2.4, in cui abbiamo disegnato sulla circonferenza i due vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ che si riferiscono a due istanti t_A e t_B molto vicini tra loro, cioè $\Delta t = t_B - t_A$ è piccolo (coerentemente con la definizione di accelerazione istantanea). Se facciamo co-

[29]**FAC** Per completezza, occorre dire che, in realtà, ω è talvolta considerato come un vettore. Torneremo nel capitolo successivo su questo aspetto, che comunque non aggiunge granché alla nostra trattazione elementare.

[30]L'angolo giro, cioè 360 gradi, vale 2π rad, l'angolo piatto vale π rad, l'angolo retto $\pi/2$. In generale, si ha che il valore in rad si ottiene da quello in gradi con la semplice relazione: [rad]=2π[gradi]/360. Il valore in gradi di un radiante risulta circa 57 gradi.

[31]Come già affermato, la direzione del vettore velocità è, punto per punto, tangente alla circonferenza. Si dice quindi che $\vec{v}$ ha **direzione tangenziale**. Tale direzione forma, punto per punto, un angolo retto rispetto alla direzione del raggio R, direzione che si dice **radiale**

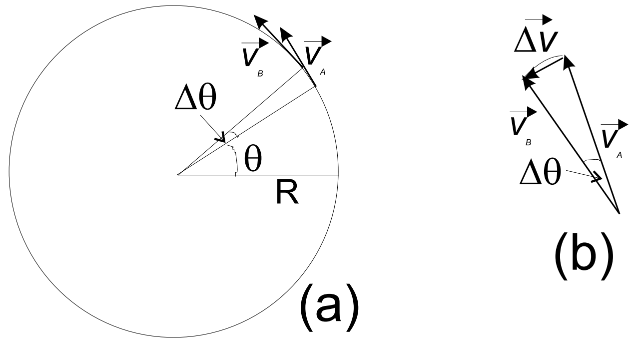

Figura 2.2: Rappresentazione vettoriale dell'accelerazione centripeta. In (b) il vettore $\vec{v}_B$ è stato traslato in modo da far coincidere il suo punto di applicazione con quello del vettore $\vec{v}_A$. Per esigenze di chiarezza grafica, l'intervallo angolare $\Delta\theta$ è stato esagerato rispetto a quanto sarebbe necessario.

incidere il punto di applicazione dei due vettori, cioè ne trasliamo rigidamente uno fino a portare il suo punto di partenza sopra a quello dell'altro, ed applichiamo la regola del parallelogramma, possiamo tracciare la differenza $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ come il vettore che congiunge le punte (frecce) dei due vettori di partenza. Poiché l'intervallo temporale è piccolo, i vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ hanno direzioni molto simili fra loro, e la differenza $\overrightarrow{\Delta v}$ è praticamente ortogonale sia rispetto a $\vec{v}_A$ che rispetto a $\vec{v}_B$. Tale direzione è la direzione radiale. Quindi $\overrightarrow{\Delta v}$ è diretto lungo il raggio della circonferenza, e risulta puntare verso il centro. L'accelerazione $\vec{a}$ si dice allora **centripeta** (in greco, la parola suggerisce la direzione ed il verso che abbiamo trovato). Notiamo che la presenza di una componente centripeta nell'accelerazione è comune a tutti i moti curvilinei, e non è una caratteristica del solo moto circolare uniforme.

Il modulo dell'accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme (e solo per questo!) può essere dedotto facendo ancora riferimento alla Fig.2.4. Tenendo conto che l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ è, per ragioni di similitudine geometrica, uguale al $\Delta\theta$ compreso tra i raggi che vanno ai due punti della circonferenza occupati agli istanti t_A e t_B, ed approssimando il lato $\overrightarrow{\Delta v}$ con l'arco di circonferenza disegnato in figura, si ha $|\overrightarrow{\Delta v}| \simeq |\vec{v}_A|\Delta\theta$. Ora, essendo $|\vec{v}_A| = \omega R$ e $\Delta\theta = \omega\Delta t$, si ha:

$$|\vec{a}| = \frac{|\overrightarrow{\Delta v}|}{\Delta t} = \omega^2 R \,. \tag{2.20}$$

2.4.1 Moto armonico

Vediamo ora un'ulteriore interessante conseguenza del moto circolare uniforme. Tale moto può essere ovviamente interpretato come una rotazione attorno all'origine e con velocità angolare ω costante del vettore $\vec{R}$ (cioè interpretiamo come vettore il raggio che congiunge la posizione occupata istantaneamente dal punto). Chiamando $x(t), y(t)$ le componenti (dipendenti dal tempo) di $\vec{R}$ lungo due direzioni ortogonali, e tenendo conto che l'angolo θ varia con il tempo secondo la legge $\theta = \omega t$, si ha (dalle definizioni trigonometriche già citate per dedurre le componenti cartesiane dei vettori): $x(t) = R\cos(\omega t)$ e $y(t) = R\sin(\omega t)$.

Esaminiamo, ad esempio, la legge oraria del moto $x(t)$ (le affermazioni che faremo valgono anche per $y(t)$, a meno di uno *sfasamento* di $\pi/2$, quello che c'è fra funzioni coseno e seno). La funzione è evidentemente periodica, ed il periodo è proprio $T = 2\pi/\omega$ (in questo ambito, ad ω si dà il nome di **pulsazione**). Tale moto rappresenta un'*oscillazione* di ampiezza R attorno al punto $x = 0$. Un moto di questo tipo si chiama **armonico** (e *monocromatico*).

"Lavorando" di derivate, per chi sa trattarle[32], si ottengono, per la velocità e l'accelerazione, le seguenti leggi orarie:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega R\sin(\omega t) \qquad (2.21)$$

$$a_x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\ . \qquad (2.22)$$

Per chi "non si intende" di derivate, esiste sempre la possibilità di operare in modo grafico, sfruttando le leggi della trigonometria. Consideriamo, infatti, il vettore velocità $\vec{v}$ del punto che si sta muovendo di moto circolare uniforme; ricordiamo che, essendo la velocità, per definizione, sempre tangente punto per punto alla traiettoria, essa cambia continuamente la sua direzione, mantenendo inalterato il modulo, che vale ωR. Pensate ora di traslare rigidamente i vettori $\vec{v}$ che rappresentano la velocità istante per istante, in modo che la loro origine coincida con l'origine del sistema di riferimento (questa operazione non altera né il modulo, né la direzione, né il verso dei vettori). Vi potrete rendere conto facilmente che $\vec{v}$ *ruota* con la stessa velocità angolare di $\vec{R}$, trovandosi sempre "sfasato" di $\pi/2$ rispetto ad $\vec{R}$. Ad esempio, all'istante $t = 0$ $\vec{R}$ è diretto lungo l'asse X, mentre $\vec{v}$ è diretto lungo l'asse Y, dopo un quarto di giro (cioè dopo un intervallo di tempo pari ad un quarto di periodo) $\vec{R}$ è diretto lungo Y, e $\vec{v}$ è diretto verso la direzione negativa dell'asse X, e così via. A questo punto operiamo come prima abbiamo descritto per il vettore $\vec{R}$ allo scopo di trovare la componente cartesiane lungo X del vettore $\vec{v}$, che indichiamo con $v_x(t)$. La trigonometria ci dice che vale $v_x(t) = |\vec{v}|\cos(\omega t + \pi/2) = -\omega R\sin(\omega t)$. Per quanto riguarda la componente a_x dell'accelerazione, poi, la derivazione è ancora più semplice. Infatti, nel moto circolare uniforme $\vec{a}$ è *centripeta*, e quindi ha sempre la stessa direzione di $\vec{R}$ ma verso opposto. In altre parole, $\vec{a}$ è "sfasato" di un angolo π rispetto ad $\vec{R}$, e per la componente X si ha: $a_x(t) = |\vec{a}|\cos(\omega t + \pi) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$, dove abbiamo usato il modulo dell'accelerazione centripeta $|\vec{a}| = \omega^2 R$.

Al di là dei procedimenti matematici necessari per ottenere questo risultato, esso è in buon accordo con quello che ci aspettiamo qualitativamente per un moto oscillatorio. Per

[32]**FAC** In generale, si ha $\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$ e $\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$ Il risultato riportato nel testo si raggiunge applicando anche le regole relative alla derivazione di "funzioni di funzioni", per cui, se f è funzione di x "attraverso" la funzione generica $y(x)$, cioè è una $f(x(y))$, allora $\frac{df(x(y))}{dy} = \frac{dx}{dy}\frac{df}{dx}$.

la nostra scelta delle condizioni iniziali, che stabiliscono che all'istante iniziale $t_0 = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = R$, ci aspettiamo che la velocità iniziale sia nulla (infatti il punto "sta per tornare indietro") e l'accelerazione sia rivolta verso il segno negativo dell'asse X (infatti la velocità "sta per cambiare segno"). Quando il punto passa per la posizione centrale $x = 0$, ci aspettiamo che la sua velocità sia massima (in valore assoluto, il verso essendo quello negativo dell'asse X) e l'accelerazione sia zero. Infine, quando il punto raggiunge la posizione $x = -R$ ci aspettiamo che si ripeta la situazione iniziale, però con un segno nell'accelerazione che è opposto a quello della situazione iniziale, dato che ora il punto deve tendere a tornare verso il segno positivo dell'asse X. Se sapete descrivere l'andamento delle funzioni coseno e seno, cioè se sapete disegnarne il grafico, provate a verificare che queste osservazioni qualitative sono effettivamente confermate dagli andamenti funzionali delle $v_x(t)$ e $a_x(t)$ che abbiamo appena scritto.