

Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2004/05
parte 2

Francesco Fuso¹
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 3 - 10.12.04

¹tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

Indice

Nota per i lettori	ii
1 Introduzione	1
1.1 Dimensioni ed unità di misura	2
1.2 Grandezze e prefissi	2
1.3 Precisione e cifre significative	3
2 Moto del punto	5
2.1 Cinematica	5
2.1.1 Velocità	6
2.1.2 Accelerazione	7
2.1.3 Esercizio: cavalli che si rincorrono	9
2.2 Posizione di un punto e moto in più dimensioni	10
2.2.1 Esercizio: il moto parabolico	10
2.3 Vettori	11
2.3.1 Alcune operazioni con i vettori	13
2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro	14
2.3.3 Esempio: composizione delle velocità	15
2.4 Moto circolare uniforme	16
2.4.1 Moto armonico	18
3 Forze, equilibrio, movimento	21
3.1 Massa e densità di massa	21
3.2 Legge di Newton	22
3.2.1 Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale	23
3.3 Forza peso	23
3.3.1 Esercizio: lancio di una pietra	24
3.4 Reazione vincolare e terzo principio della dinamica	25
3.4.1 Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare (FAC)	25
3.4.2 Esercizio: moto su un piano inclinato	27
3.4.3 Esercizio: la carrucola mobile	28
3.5 Forza di Archimede	29
3.5.1 Esercizio: il pallone aerostatico	30

3.5.2	Esercizio: il densimetro per liquidi	30
3.6	Forza centripeta	31
3.6.1	Esercizio: la fionda	31
3.7	Forza gravitazionale	32
3.7.1	Esercizio: il peso su un altro pianeta	33
3.8	Forza elettrica	33
3.8.1	Esercizio: l'atomo planetario	34
3.9	Forza elastica	35
3.9.1	Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo	37
3.10	Forze d'attrito	39
3.10.1	Attrito statico	39
3.10.2	Esercizio: spingere o tirare	40
3.10.3	Esercizio: piano inclinato con attrito statico	40
3.10.4	Esercizio: l'auto che sbanda in curva	41
3.10.5	Attrito dinamico	42
3.10.6	Esercizio: frenata a ruote bloccate	42
3.10.7	Attrito dipendente dalla velocità	43
3.10.8	Esercizio: velocità limite di un paracadutista	44
3.11	Momento delle forze	45
3.11.1	Esercizio: due bambini sull'altalena a dondolo	46
3.11.2	Esempi di leve	47
3.12	Cenni di statica e dinamica del corpo rigido (FAC)	48
3.12.1	Esercizio: il moto di un tuffatore (FAC)	49
3.12.2	Moto rotatorio del corpo rigido (FAC)	49
3.12.3	Esercizio: il rullo compressore	50
3.12.4	Esempio: equilibrio dei corpi rigidi	51

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce dalle lezioni del Modulo di Fisica per il corso di Matematica e Fisica per studenti di STPA (e TACREC), non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario o di scuola media superiore. Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, senza discorsi, senza tabelle e con pochissime figure¹, è soprattutto quello di fornire una sorta di “programma esteso” del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Nota importante: a partire dalla Versione 2b, alcune parti del testo, alcuni esercizi ed alcune note a piè di pagina, indicate con il simbolo **FAC**, sono da ritenersi di studio *facoltativo* per gli studenti dei corsi di laurea STPA e TACREC.

Revisioni:

1. Versione 1, 14.09.04: non rilasciata;
2. Versione 2, 18.10.04: cap.1, cap.2 con revisioni sostanziali;
3. Versione 2b, 22.10.04: cap.1, cap.2 con correzioni minori, cap.3; introdotta indicazione delle parti facoltative;
4. Versione 2c, 30.10.04: modifiche minori ai parr.2.4.1, 3.9, 3.10.6 ed altre aggiunte facoltative; aggiunto es.3.10.1; cap. 4;
5. Versione 2d, 08.11.04: correzione di errore di stampa nella soluzione del par.4.7.1; dichiarato FAC il par.4.7.2;
6. Versione 3, 10.12.04: modifiche minori ai parr.3.11, 4.3, 4.9; cap. 5.

¹A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 3

Forze, equilibrio, movimento

Nel capitolo precedente ci siamo occupati di stabilire le principali leggi che regolano il moto di un corpo una volta che siano note alcune caratteristiche (velocità, accelerazione, condizioni iniziali, etc.). Ora intendiamo chiederci quali cause fisiche sono in grado di provocare il moto di un corpo, o eventualmente il suo stato di equilibrio. Tali cause sono collegate all'esistenza di *forze* che agiscono sul corpo. Nel nostro studio, avremo modo di incontrare e anticipare problematiche che, pur avendo un legame diretto con i concetti di forza, si riferiscono ad argomenti che vanno oltre la meccanica, e riguardano, ad esempio, la fluidodinamica e l'elettricità.

3.1 Massa e densità di massa

La massa, che si indica generalmente con m e si misura nel sistema mKs con il kilogrammo, Kg, è una grandezza *scalare* che caratterizza un corpo (solido, liquido o gassoso). Notiamo che, se V è il volume del corpo considerato, possiamo introdurre la **densità di massa** $\rho = m/V$, con unità di misura Kg/m^3 , come grandezza che caratterizza un corpo¹. Ogni sostanza ha la sua densità caratteristica, che dipende da come è stato “costruito” il corpo considerato, e anche dalle condizioni in cui trova la materia, ad esempio temperatura e pressione. Nel capitolo dedicato alla terminologia accenneremo ad alcuni motivi che determinano la dipendenza di ρ dalla temperatura. L'acqua, in condizioni ordinarie (temperatura ambiente e pressione atmosferica) ha $\rho \approx 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$, mentre per l'aria la densità è circa mille volte minore. Il **peso specifico** di una sostanza è definito come rapporto tra la sua densità e quella dell'acqua (a temperatura e pressione ambiente) ed è una grandezza di uso pratico abbastanza diffuso. Si rimanda alle tabelle per altri valori della densità delle varie sostanze.

¹La densità definita come rapporto tra massa e volume ha, come ovvio, un significato di valore medio sull'intero volume considerato. Per avere un'indicazione della densità locale di un dato sistema, occorre considerare piccoli volumetti. La differenza tra densità media e densità locale può essere apprezzata considerando, ad esempio, un corpo che non sia completamente costituito (“riempito”) della stessa sostanza, ma abbia delle cavità, dei “vuoti”, al suo interno. Un corpo di questo genere non è *omogeneo*, e quindi densità locale e media sono diverse.

3.2 Legge di Newton

La **dinamica** si occupa di stabilire la cinematica di un corpo² sottoposto a una o più forze.

Il concetto fisico di forza è legato all'enunciato del cosiddetto secondo principio della dinamica, o legge di Newton, che stabilisce una proporzionalità diretta, tramite il coefficiente (dimensionato!) m tra la forza ed il vettore accelerazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.1)$$

Dunque la forza \vec{F} è un *vettore* che ha dimensioni di una massa per un'accelerazione, cioè ha unità di misura Kg m/s²; a questa unità, derivata da unità fondamentali, si dà nel sistema mKs il nome di Newton (abbreviazione N). Notate che l'operazione che collega forza a massa, cioè la moltiplicazione per uno scalare, non modifica la direzione e il verso. Quindi, considerando uno specifico problema, direzione e verso della forza sono gli stessi che per l'accelerazione, mentre il modulo dipende *linearmente* dal valore della massa.

È quindi possibile dare una definizione *operativa* di forza: un corpo di massa m che ha un'accelerazione \vec{a} sta subendo una forza data dall'Eq.3.1. Il meccanismo fisico (macroscopico) che origina tale forza dipende dal tipo di sistema e dalla classe di interazioni che si considera. In seguito vedremo alcuni “tipi” (macroscopici) di forze, che, anticipiamo, non richiedono necessariamente un contatto con il corpo che subisce la forza (esistono anche numerose forze che si sviluppano “a distanza”).

Invertendo l'Eq.3.1 si ottiene l'accelerazione determinata da una certa forza su un punto materiale dotato di una certa massa: $\vec{a} = \vec{F}/m$. Se più forze \vec{F}_i sono applicate allo stesso punto materiale vale il **principio di sovrapposizione**: $\vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i/m$, dove il simbolo Σ_i denota una somma (vettoriale) su tutte le forze applicate. Talvolta a questa somma vettoriale di forze si dà il nome di *risultante*.

Il problema fondamentale della **dinamica** è quello di stabilire il moto di un punto materiale, cioè la sua cinematica, a partire dalla conoscenza delle forze applicate. La **statica** del punto materiale³ si occupa invece di determinare le condizioni sulle \vec{F}_i che producono un'accelerazione nulla.

La relazione tra forza ed accelerazione ci suggerisce che, quando la risultante delle forze applicate è nulla, se il corpo è in quiete, rimane in quiete (questa affermazione costituisce parte del cosiddetto **primo principio della dinamica**, noto anche come principio d'inerzia). Se il corpo si muove di moto rettilineo uniforme, quando la risultante delle forze applicate è nulla, rimane nel suo stato di moto. In buona sostanza, la risultante

²Anche in questo ambito si farà riferimento, per ora, a *corpi puntiformi*, detti anche **punti materiali**. Questa approssimazione può sembrare abbastanza irrealistica, dato che la presenza di una massa implica che il corpo occupi un certo volume. Tuttavia, l'approssimazione è utile per trattare numerose situazioni; al termine del capitolo faremo un cenno al comportamento dei corpi rigidi, quelli che, ad esempio, oltre a spostarsi rigidamente possono anche ruotare su se stessi. Per i corpi rigidi l'approssimazione di punto materiale non è generalmente sufficiente per descrivere la dinamica.

³Se invece di un punto materiale si considera un corpo esteso la condizione di staticità può richiedere ulteriori discussioni, come vedremo brevemente nel seguito.

delle forze nulla implica che non c'è accelerazione, e quindi la velocità (sia essa nulla o costante) non viene alterata.

Ricordiamo infine che, nella casistica dell'equilibrio, si distingue spesso tra equilibrio **stabile**, **instabile**, **indifferente**, a seconda che il corpo, posto in posizione di equilibrio e perturbato con un piccolo spostamento, ritorni spontaneamente alla posizione di equilibrio, se ne allontani definitivamente, oppure assuma una nuova posizione di equilibrio.

3.2.1 Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale

Su un corpo di massa $m=0.5$ Kg, che approssimeremo come un punto materiale, agiscono tre forze⁴: $\vec{F}_1 = (3, -1, 2)\text{N}$; $\vec{F}_2 = (3, 6, -2)\text{N}$; $\vec{F}_3 = (-4, -3, 0)\text{N}$. Supponendo che all'istante $t_0 = 0$ il corpo si trovi fermo all'origine del sistema di riferimento, determinatene la legge del moto.

Soluzione. Calcoliamo la risultante delle forze, cioè la forza $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Sommando componente per componente, risulta $\vec{F} = (2, 2, 0)\text{N}$. L'accelerazione vale allora $\vec{a} = \vec{F}/m = (4, 4, 0) \text{ m/s}^2$. Essendo l'accelerazione costante ed uniforme (il testo del problema non cita cause che ne facciano variare il valore col tempo!), il moto sarà uniformemente accelerato. Inoltre, poiché la velocità iniziale è nulla (parte da fermo) lungo le tre direzioni, e quindi anche lungo Z , e l'accelerazione non ha componenti lungo Z , il moto si svolgerà sul piano XY (cioè la coordinata z sarà sempre $z = 0$). Le leggi del moto sono allora: $x(t) = (a_x/2)t^2$, $y(t) = (a_y/2)t^2$, $z(t) = z_0 = 0$, dove nell'ultimo passaggio si è supposto di porre l'origine dell'asse Z sul piano in cui il punto si trova inizialmente. Poiché $a_x = a_y$, il moto è rettilineo e, dato che vale a qualsiasi istante l'uguaglianza $x(t) = y(t)$, esso si svolge lungo la bisettrice del piano XY .

3.3 Forza peso

Tutti i corpi (dotati di massa!) che si trovano sulla faccia della terra sono sottoposti, come è ben noto, ad una accelerazione verticale (“verso il basso”) pressoché costante ed uniforme, che si indica con \vec{g} ed il cui valore, è, a Pisa, $|\vec{g}| \approx 9.8 \text{ m/s}^2$. La sua origine è dovuta alla *forza gravitazionale*, di cui parleremo in seguito, e per questo motivo il valore dipende leggermente dalla latitudine e dall'altitudine del luogo considerato.

L'accelerazione gravitazionale dà luogo ad una forza, di modulo mg e diretta verticalmente verso il basso, che agisce su tutti i corpi dotati di massa m . Questa forza è la **forza peso**, o semplicemente peso del corpo di massa m .

⁴Ricordiamo che un modo compatto di esprimere grandezze vettoriali è quello usato qui, in cui la terna di componenti è scritta tra parentesi e le componenti sono separate da una virgola.

3.3.1 Esercizio: lancio di una pietra

Vi arrampicate su un albero e, da un'altezza h , lanciate una pietra di massa m , imprimendole una velocità iniziale di componenti note v_{hor} e v_{vert} nelle direzioni rispettivamente orizzontale e verticale. Supponiamo inoltre di lavorare con un sistema di riferimento i cui assi sono diretti verso destra e verso l'alto, nelle direzioni rispettivamente orizzontale e verticale, e che entrambi le componenti della velocità iniziale siano positive (tutto questo per dire che tirate la pietra verso destra e verso l'alto!). A quale distanza orizzontale d dal punto di lancio la pietra ricade al suolo? Considerate la pietra come un punto materiale⁵ e supponete assente ogni tipo di attrito⁶.

Soluzione. Innanzitutto notiamo un aspetto rilevante per tutti i problemi in cui si ha a che fare con “lanci” di oggetti. L'operazione di lanciare un corpo prevede una serie di movimenti in cui sono coinvolte diverse forze, ad esempio quelle muscolari. La soluzione del problema, però, prescinde dalla descrizione di tali forze e dei meccanismi connessi. Nella maggior parte dei casi, lanciare un oggetto significa imprimergli una certa velocità iniziale, quella che ha, per intenderci, quando lascia la nostra mano. Scriviamo quindi l'equazione del moto per le due direzioni rilevanti nel problema, quella orizzontale, che identificheremo con l'asse X , e quella verticale, che è l'asse Z , riferendoci all'intervallo temporale in cui l'oggetto “vola” liberamente. Per comodità⁷ poniamo l'origine del sistema di riferimento in modo tale che il punto $x = 0, z = h$ sia il punto di partenza della pietra. Poiché sulla pietra agisce la sola forza di gravità, che è verticale, la legge del moto lungo X è quella di un moto rettilineo uniforme con velocità iniziale v_{hor} e posizione iniziale nulla, mentre lungo Z avremo un moto uniformemente accelerato con accelerazione $-|\vec{g}|$, ovvero, con scrittura più semplice, $-g$ ⁸, velocità iniziale v_{ver} e posizione iniziale h . Quindi si ha:

$$x(t) = v_{hor}t \quad (3.2)$$

$$z(t) = h + v_{ver}t - \frac{g}{2}t^2. \quad (3.3)$$

Matematicamente, la condizione di arrivo al suolo significa trovare l'istante t' per cui si ha $z(t') = 0$. Si tratta quindi di risolvere un'equazione algebrica di secondo grado, la cui soluzione dà $t'_{1,2} = (v_{ver} \pm \sqrt{v_{ver}^2 + 2gh})/g$. La soluzione con il segno meno va scartata, perché fisicamente priva di senso (dà un istante negativo, che quindi ha luogo prima dell'istante iniziale, avendo posto $t_0 = 0$); l'altra indica invece il tempo necessario alla pietra per toccare il suolo. Sostituendo questo tempo nella legge del moto lungo X si ottiene la distanza d richiesta dal problema, cioè $d = x(t') = v_{hor}(v_{ver} + \sqrt{v_{ver}^2 + 2gh})/g$.

⁵Quindi ci si disinteressa dell'eventuale moto di rotazione su se stessa della pietra.

⁶Questa affermazione, che vi sarà più chiara in seguito, significa praticamente che sulla dinamica del corpo, una volta che questo è stato lanciato, non agiscono forze diverse da quelle considerate esplicitamente nel testo del problema, cioè dalla forza peso.

⁷Notate che è sempre opportuno sfruttare tutte le “comodità” offerte dalla scelta del sistema di riferimento e dalla posizione dell'origine, come spesso è possibile fare!

⁸Fate attenzione al segno negativo dell'accelerazione di gravità in questo problema, dovuto al fatto che abbiamo scelto l'asse Z diretto verso l'alto, ed infatti la posizione iniziale è $h > 0$.

Per esercizio potete provare a scrivere la traiettoria nel piano XZ che, come anticipato nel capitolo precedente, ha la forma di una parabola che passa per il punto di partenza della pietra ed intercetta l'asse X a distanza d dall'origine.

3.4 Reazione vincolare e terzo principio della dinamica

Abbiamo affermato che qualsiasi corpo è soggetto all'accelerazione di gravità. Però un corpo di massa m appoggiato *in piano* sulla terra, o su un pavimento, un tavolo o quant'altro, se è fermo rimane fermo, non sprofonda verso il centro della terra, né levita verso il cielo. Dunque, l'osservazione ci suggerisce che deve esistere una forza uguale e di verso opposto rispetto alla forza peso, e tale da mettere il corpo in condizioni di equilibrio statico. A tale forza si dà il nome di **reazione vincolare**, e qui gli diamo simbolo \vec{N} . Quindi, nel caso considerato (appoggio su un piano, cioè una superficie orizzontale) si ha $\vec{N} = -m\vec{g}$. Questo implica che la risultante delle forze sul corpo è nulla, e quindi che le condizioni sono statiche. Se siamo interessati a stabilire il *tipo* di equilibrio, facendo riferimento all'esperienza comune si vede subito che esso è stabile se lo perturbiamo con uno spostamento verticale (il corpo ricade al suolo se lo alziamo e lo lasciamo libero), mentre è indifferente rispetto ad uno spostamento in direzione orizzontale (lo spostiamo e lì rimane, purché la superficie sia piana).

La presenza della reazione vincolare può essere considerata una manifestazione del cosiddetto **terzo principio della dinamica**, o principio di **azione e reazione**, il quale stabilisce che un corpo che esercita una forza su un altro corpo ne riceve per reazione una forza uguale ed opposta in verso. Vedremo nel seguito ulteriori conseguenze di questo principio.

Chiaramente l'introduzione della reazione vincolare è una schematizzazione per tenere conto di fenomeni di natura microscopica che avvengono sulla superficie di contatto tra il corpo ed il piano. In questa schematizzazione la reazione ha sempre e solo direzione *ortogonale rispetto alla superficie di contatto*. Come discuteremo nel prossimo esercizio, questa è la ragione per cui se l'appoggio avviene su una superficie inclinata il corpo non si trova più in condizioni di equilibrio statico.

3.4.1 Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare (FAC)

Questo esercizio richiede un po' di attenzione dal punto di vista geometrico e matematico, ed è quindi riservato a studenti con conoscenze di base più raffinate della media. Supponiamo di avere una massa puntiforme m vincolata a muoversi su una guida semicircolare di raggio R , disposta, con la concavità verso l'alto come in Fig.3.4.1, su un piano verticale in presenza dell'accelerazione di gravità \vec{g} . Trascuriamo ogni attrito e la possibilità di moto di rotolamento (le due affermazioni, come vedremo in seguito, sono collegate tra loro). Qual è la posizione di equilibrio della massa, e di che tipo di equilibrio si tratta?

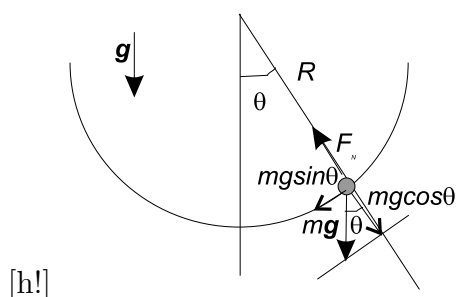


Figura 3.1: Rappresentazione dell'esercizio della massa su guida semicircolare riportato nel testo e diagramma di corpo libero con indicazione delle forze per la massa m . L'angolo compreso tra forza peso e prolungamento del raggio è pari all'angolo θ tra verticale e raggio R per ovvi motivi di similitudine geometrica.

(Nella soluzione, indichiamo la posizione della massa attraverso l'angolo θ compreso tra direzione verticale e raggio che punta alla posizione della massa, vedi Fig.3.4.1)

Soluzione. Il senso comune ci dà immediatamente la risposta al quesito: la posizione di equilibrio è $\theta = 0$, cioè con la massa al centro (la posizione più bassa) della concavità. L'equilibrio è statico, dato che la massa, spostata dalla sua posizione di equilibrio, tende a tornarci. Lo scopo di questa discussione è capire (quantitativamente) il perché di questo comportamento. Le sole forze che agiscono su m sono la forza peso $m\vec{g}$, sempre verticale e diretta verso il basso, e la forza di reazione vincolare, che qui chiamiamo \vec{F}_N , sempre diretta per ipotesi in direzione ortogonale alla superficie che “vincola” la massa, cioè la guida. All'equilibrio ($\theta = 0$) la direzione della reazione vincolare è verticale (diretta verso l'alto), e quindi essa può annullare completamente la forza peso. La risultante delle forze è nulla ed la massa è in equilibrio statico. Per $\theta \neq 0$, invece, la reazione vincolare non è verticale, e quindi non può annullare completamente la forza peso. Vediamo di quantificare questi effetti, disegnando il diagramma di corpo libero quando la massa si trova alla posizione $\theta \neq 0$ generica. La reazione vincolare, essendo sempre ortogonale alla direzione della superficie di vincolo (e quindi anche alla semicirconferenza disegnata in figura, che è la sua sezione), è *radiale* e diretta verso il centro della semicirconferenza. Dato che la presenza del vincolo implica che la massa non sprofondi all'interno della guida, né che essa levi verso l'alto, non ci deve essere moto lungo la direzione radiale, e quindi la risultante delle forze in *questa direzione* deve essere nulla. Allora il modulo della reazione vincolare, tutta e solo radiale, deve essere uguale al modulo della *proiezione* della forza peso in direzione radiale. La trigonometria (vedi figura) ci suggerisce che tale proiezione vale $mg \cos \theta$. D'altra parte, poiché la reazione vincolare agisce solo in direzione radiale, solo la componente della forza peso in questa direzione sarà “compensata”. Nella direzione ortogonale alla radiale, cioè nella direzione *tangenziale*, la forza peso ha componente non nulla, che fa muovere la massa una volta che questa sia stata spostata dalla posizione di equilibrio, con un'accelerazione di modulo $g \sin \theta$. Il verso della proiezione della forza, e quindi dell'accelerazione, come si deduce facilmente dalla figura è tale da far tornare la massa verso la posizione di equilibrio, che quindi risulta stabile.

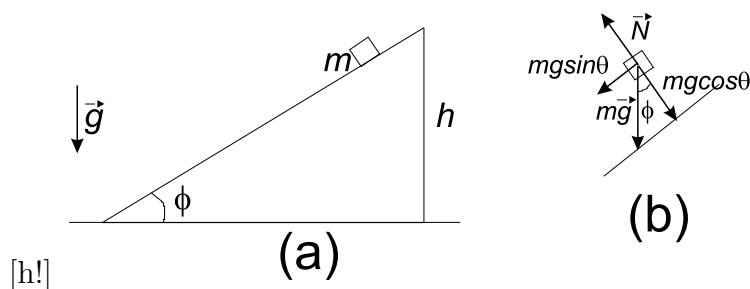


Figura 3.2: Rappresentazione dell'esercizio sul piano inclinato riportato nel testo (a) e diagramma di corpo libero (b) con indicazione delle forze. L'angolo compreso tra la direzione verticale e quella ortogonale al piano è uguale all'angolo tra piano ed orizzontale (indicato con ϕ in figura) per ragioni di similitudine tra triangoli.

Come nel caso del pendolo semplice, a cui accenneremo in seguito, che in sostanza è lo stesso sistema fisico che stiamo considerando qui, è possibile mostrare che, per piccoli valori di θ vicino alla posizione di equilibrio, la forza “di richiamo” dipende linearmente da θ , ed è quindi una forza elastica che dà luogo ad un moto oscillatorio attorno a $\theta = 0$. Notate infine che tutta la discussione che abbiamo fatto, basata sul considerare le due direzioni radiale e tangenziale, equivale ad aver descritto il problema (cioè tutte le grandezze vettoriali che vi compaiono) in un sistema di riferimento di coordinate polari.

3.4.2 Esercizio: moto su un piano inclinato

Poggiate un corpo, che approssimerete ad un punto materiale (quindi trascurando i possibili effetti di rotolamento o ribaltamento, che non possono verificarsi nella nostra schematizzazione, visto che il punto non ha, idealmente, dimensioni), su un piano inclinato che forma un angolo ϕ con la direzione orizzontale (vedi Fig.3.4.2). Quanto vale l'accelerazione che agisce sul corpo? (Trascurate ogni attrito e supponete fisso il piano inclinato.)

Soluzione. Disegniamo, come in figura, il **diagramma di corpo libero**, cioè l'insieme dei vettori forza che sono applicati sul punto materiale; avremo la forza peso, $m\vec{g}$, diretta verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare, \vec{N} , diretta verso l'alto e con direzione *ortogonale* rispetto alla superficie di contatto, cioè il piano inclinato. Il corpo non sprofonda nel piano inclinato (purché questo sia abbastanza rigido!), dunque c'è equilibrio statico nella direzione ortogonale al piano inclinato, e questo significa che la reazione vincolare è uguale e di verso opposto alla *proiezione* della forza peso lungo la direzione ortogonale al piano inclinato. Il modulo di tale proiezione si trova con la trigonometria e applicando considerazioni di similitudine geometrica (vedi figura), e vale $mg \cos \phi$.

Nella direzione parallela al piano, la reazione vincolare non può avere alcun effetto, ma esiste comunque una forza che ha componenti lungo questa direzione. Tale forza è la forza peso, che ha una proiezione non nulla nella direzione del piano inclinato, come si vede in figura. La trigonometria ci dice che la proiezione vale $mg \sin \phi$. Pertanto il corpo è accelerato in direzione del piano inclinato (il verso è, ovviamente, verso il basso del piano inclinato). L'accelerazione corrispondente si trova con la legge di Newton, dividendo la

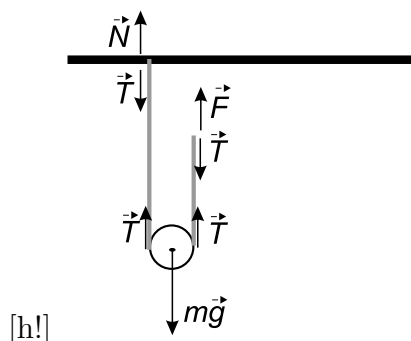


Figura 3.3: Rappresentazione schematica di una carrucola mobile e diagrammi delle forze rilevanti per la soluzione del problema riportato nel testo.

forza agente sul punto per la sua massa. In modulo, si ha $|\vec{a}| = g \sin \phi$. Dunque non c'è equilibrio, e il corpo, se lasciato fermo sul piano inclinato, comincia a scendere verso il basso con moto uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo $g \sin \phi$ (sempre minore di g).

3.4.3 Esercizio: la carrucola mobile

La carrucola mobile è il sistema raffigurato in Fig.3.4.3. Una corda è fissata per un capo ad una superficie fissa e rigida (ad esempio, un robusto solaio), e passa per la gola di una carrucola a cui è appesa una massa m ; all'altro capo della corda viene applicata (da parte di un operatore esterno) una forza \vec{F} . Supponendo la corda *inestensibile*⁹, quanto vale il modulo della forza applicata perché il sistema sia in equilibrio? (Trascurate ogni attrito e considerate nulla la massa della carrucola.)

Soluzione. Anche in questo caso tracciamo i diagrammi di corpo libero per *tutti* gli elementi rilevanti nel sistema. Cominciamo con il capo della corda fissato al solaio: esso è fermo, e pertanto il solaio esercita sulla corda una reazione vincolare \vec{N} uguale e di verso opposto rispetto alla forza trasmessa dalla corda. In questo esercizio, indichiamo con \vec{T} la forza trasmessa dalla corda¹⁰ Per l'ipotesi di inestensibilità, ed essendo la corda ferma dato che chiediamo una condizione di equilibrio, tale forza deve avere modulo uguale a quello della forza richiesta dal problema. A questo punto esaminiamo il diagramma delle forze per la carrucola. Notiamo che esse non hanno tutte lo stesso punto di applicazione, e che la carrucola non è un corpo puntiforme. In effetti, una carrucola può a ben diritto ruotare per effetto di forze tangenti al suo perimetro (nel seguito daremo dei cenni su questa classe di processi), però, essendo il sistema in equilibrio, possiamo disinteressarci

⁹Questa approssimazione, abbastanza realistica e ricorrente negli esercizi di fisica, significa che la corda trasferisce esattamente e completamente la forza applicata su un capo all'altro capo senza allungarsi.

¹⁰**FAC** La lettera T sta per *tensione* della corda, un termine frequentemente usato. Notate che, se la corda è inestensibile, come da ipotesi, la tensione ha *modulo* costante lungo tutta la corda. Se la corda è ferma, come nel caso considerato, su ogni suo pezzettino (elementino di lunghezza) devono agire due tensioni uguali ed opposte vettorialmente, che sono dovute alla forza esercitata sull'elementino dal "resto" della corda, a sinistra e a destra dell'elementino.

di simile possibilità (se la corda è ferma, la carrucola non può ruotare!). Allora, sulla carrucola agisce la forza peso $m\vec{g}$ diretta verticalmente verso il basso, e le *due* forze \vec{F} dirette verticalmente verso l'alto e trasmesse dalla corda sui due punti opposti della circonferenza della carrucola stessa. Dunque la condizione di equilibrio statico si traduce nel porre la risultante delle forze uguale a zero, cioè a scrivere $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F} = 0$. Tenendo conto del verso dei vari vettori, scritta per i moduli questa equazione diventa: $mg = F + F$, cioè $F = mg/2$. Il risultato è notevole: questa semplice macchina permette di dimezzare la forza necessaria per sostenere un corpo contro la sua forza peso! Se ci pensate un po', il motivo è proprio nello sfruttamento "intelligente" della reazione vincolare esercitata dal solaio sulla corda.

3.5 Forza di Archimede

La forza, o spinta, di Archimede è il noto fenomeno che conduce al galleggiamento di un corpo. Spesso si enuncia sotto forma di principio: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso (forza peso!) del volume di fluido spostato. L'aggettivo "spostato" significa quel volume che è occupato dalla parte sommersa del corpo.

Parleremo in seguito dei fluidi (sistemi che, a differenza dei solidi, non hanno "forma" e/o volume propri¹¹) più diffusamente, però conviene anticipare qui la spinta di Archimede perché essa ha direttamente a che fare con la forza peso.

Dimostriamo il principio di Archimede considerando un fluido di densità ρ (ad esempio dell'acqua contenuta in un grande recipiente). Tracciamo idealmente all'interno del fluido un cilindretto con l'asse verticale e con superficie di base di area ΔA ed altezza Δh . A causa del peso del fluido, sulla superficie inferiore si avrà una forza peso pari, in modulo, a mg , essendo m la massa del fluido contenuto nel cilindretto (si ha $m = \rho\Delta A\Delta h$). L'intero fluido contenuto nel recipiente è in equilibrio, cioè le particelle (molecole, atomi, etc.) di cui è costituito non hanno movimento relativo. Questo significa che tutte le forze esercitate sulle particelle, o su un piccolo elemento di volume del fluido, sono completamente bilanciate, e si hanno condizioni di equilibrio statico. Quindi, in particolare, sulla base inferiore del cilindretto deve esistere una forza che bilancia perfettamente la forza peso, cioè deve essere diretta verticalmente verso l'alto e deve avere modulo mg . Notate che questa forza non è prodotta dal fluido contenuto nel cilindretto, ma da tutto il resto del fluido.

Supponiamo ora, per incanto, di "svuotare" il cilindretto, cioè di imporre al suo interno (e solo al suo interno) $\rho = 0$. Questa operazione è concettualmente identica ad immergere nel fluido un cilindretto vuoto e di massa trascurabile. Immaginiamo che lo "svuotamento" del cilindretto non provochi alcuna perturbazione al resto del fluido, cioè si mantengono

¹¹Più precisamente, i fluidi possono essere suddivisi in liquidi e gas; i liquidi hanno un volume proprio, i gas no, e in entrambi i casi la forma, cioè la geometria del volume occupato, non è assegnata, e dipende da quella del recipiente che li contiene.

condizioni di equilibrio statico per tutto il resto del fluido¹² e confrontiamo le due situazioni che abbiamo idealmente realizzato. È chiaro che col cilindretto vuoto la forza peso del cilindretto non c'è più, perché nel cilindretto non c'è più la massa m . Però la forza mg diretta *verso l'alto*, essendo originata da tutto il resto del fluido, che non viene modificato, per ipotesi, dalla nostra operazione ideale di svuotamento, resta inalterata, e dunque agisce sul cilindretto vuoto facendolo “galleggiare”. Questa forza è proprio la spinta di Archimede.

Notate ancora che la massa m che compare nell'espressione della spinta di Archimede è quella del fluido spostato (per un volume V di forma generica essa vale ρV). Se supponiamo che nella nostra operazione ideale, invece di svuotare il cilindretto, lo riempiamo con un dato materiale di densità ρ' (può essere anche un solido!), alla fine dovremo sempre tenere in conto una forza peso diretta verso il basso, il cui modulo è $m'g$, con $m' = \rho'V$. Ci sarà galleggiamento solo se la spinta di Archimede supera, in modulo, questa forza peso, cioè se $m' < m$, cioè se $\rho' < \rho$. L'esperienza comune vi dice infatti che un oggetto di legno leggero (con densità di massa minore di quella dell'acqua) galleggia, mentre lo stesso oggetto fatto di ferro (densità maggiore dell'acqua) va a fondo.

3.5.1 Esercizio: il pallone aerostatico

Un pallone di *massa trascurabile* e volume $V = 10$ l (“l” sta per litri, e ricordiamo che 1 l = 1 dm³ = 10^{-3} m³) è riempito di gas elio, che, alla temperatura e pressione considerata nel problema, ha, supponiamo, densità $\rho_{He} = 0.15$ Kg/m³. Quanto vale la forza ascensionale netta che agisce sul pallone quando questo si trova in aria (supponiamo la densità dell'aria nelle condizioni considerate $\rho_{aria} = 1.00$ Kg/m³)?

Soluzione. Il principio di Archimede stabilisce la presenza di una forza verso l'alto che vale, in modulo, $F_A = \rho_{aria}Vg$. Sul pallone agisce anche la forza peso dovuta alla massa dell'elio, che vale $F_P = \rho_{He}Vg$. La forza risultante, diretta verso l'alto, vale $F_A - F_P = (\rho_{aria} - \rho_{He})gV = 8.33 \times 10^{-3}$ N (avendo posto $g = 9.80$ m/s²). Se il pallone non avesse avuto massa trascurabile, avremmo dovuto considerare nel bilancio anche la forza peso del pallone stesso.

3.5.2 Esercizio: il densimetro per liquidi

Un rudimentale densimetro per liquidi è costituito da una (leggera) bacchetta cilindrica¹³. Ponendo la bacchetta in un liquido di riferimento, di densità nota ρ_a , si osserva che la bacchetta resta immersa per un tratto lungo h_a . Ponendo poi la stessa bacchetta in un

¹²Questa condizione è ideale, dato che, in realtà, se si fa il vuoto in una regione di spazio all'interno di un fluido succede un finimondo, e tutto il resto del fluido cerca di occupare la regione svuotata seguendo un moto che può essere particolarmente complicato, con vortici, mulinelli, etc.

¹³Dal punto di vista costruttivo, tale bacchetta è studiata per impedire che, durante l'immersione nel liquido, la bacchetta tenda a ruotare su se stessa. In pratica, si fa in modo che la sua massa sia concentrata nella parte inferiore, cosa che, anche intuitivamente, ne aumenta la “stabilità”. Daremo in seguito qualche cenno alla stabilità di un corpo rigido esteso, come è la bacchetta in questione.

liquido incognito, si nota che la parte immersa ha lunghezza h_b . Quanto vale la densità ρ_b del liquido incognito?

Soluzione. La spinta di Archimede vale, nei due casi, $\rho_a V_a g$ e $\rho_b V_b g$, essendo V_a e V_b il volume della parte immersa di bacchetta quando questa viene posta nei due liquidi a e b . Facendo il rapporto delle due forze e rimaneggiando un po' l'aspetto algebrico, si ottiene: $\rho_b = \rho_a V_b / V_a = \rho_a h_b / h_a$, dove l'ultimo passaggio è un'ovvia conseguenza dell'espressione del volume (superficie di base per altezza!) per una bacchetta cilindrica.

3.6 Forza centripeta

Come abbiamo visto nella cinematica, un corpo in moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio R e dotato di velocità angolare ω subisce un'accelerazione centripeta, diretta radialmente verso il centro, di modulo $\omega^2 R$. Se il corpo ha massa m , il fatto di percorrere una traiettoria circolare implica la presenza di una **forza centripeta** di modulo $m\omega^2 R$. Se questa forza viene a mancare, il corpo comincia a muoversi in direzione rettilinea lungo la direzione tangenziale alla circonferenza (“parte per la tangente”).

Si parla spesso nel linguaggio comune di *forza centrifuga*, cioè diretta verso l'esterno della circonferenza (opposta alla centripeta!). In effetti, è esperienza comune che, quando ad esempio percorrete in automobile una curva, sentite una forza che vi spinge *verso l'esterno* della curva stessa. Non entreremo qui nei dettagli dell'argomento, che trovate trattato nei testi di fisica alla voce “sistemi di riferimento non inerziali”, ma solo accennare all'interpretazione del fenomeno. Quando siete in curva in automobile, sentite una forza che agisce nel sistema di riferimento a cui siete solidali, cioè l'automobile su cui siete seduti. L'automobile è in moto rispetto al sistema di riferimento fissato sulla strada, che, ad esempio, possiamo centrare sul centro di curvatura. Dunque, l'automobile subisce una forza centripeta (dovuta all'*attrito statico* tra gomme ed asfalto, argomento che esamineremo in seguito), ma noi sediamo sull'automobile. Quindi nel sistema di riferimento dell'automobile dobbiamo risentire di una forza *apparente* (che cioè non ha una “vera” origine fisica, ma appare solo nel sistema di riferimento dell'automobile) che bilancia quella centripeta. Questa è l'origine della forza centrifuga.

3.6.1 Esercizio: la fionda

La fionda di Davide (quello di Davide e Golia) è costituita da una pietra di massa m legata ad una corda inestensibile di lunghezza L tenuta da Davide con una mano. La pietra è posta in rotazione uniforme con periodo T ; quanto vale la tensione, cioè della forza trasmessa dalla corda alla pietra?

Soluzione. La velocità angolare del moto vale $\omega = 2\pi/T$ e, come detto, la forza centripeta che agisce sulla pietra vale, in modulo, $F = m\omega^2 L = 4mL\pi^2/T^2$, essendo L il raggio dell'orbita circolare che la pietra percorre. Questa forza rappresenta la tensione della fune. Si noti che, per il terzo principio della dinamica e per il fatto che il capo della corda tenuto dalla mano di Davide non si muove, la mano deve esercitare sulla corda una

forza uguale e di verso opposto (poi questa forza si trasferirà alle braccia, al busto, etc., fino ad arrivare ai piedi di Davide, sui quali il terreno esercita una forza d'attrito uguale ed opposto vettorialmente che tiene fermo Davide).

3.7 Forza gravitazionale

Abbiamo già anticipato che l'accelerazione di gravità è la manifestazione di una forza, detta gravitazionale, che è anche responsabile dell'orbita di pianeti, satelliti e corpi celesti, e quindi ha carattere *universale*. Questa forza si esercita tra qualsiasi coppia di masse m_1 ed m_2 , non richiede contatto tra le masse stesse (si esercita *a distanza*), ed è *sempre attrattiva*, cioè è diretta lungo la congiungente delle due masse ed ha verso attrattivo¹⁴. Notiamo che, se consideriamo fissa nello spazio una delle due masse, ad esempio centrata all'origine di un sistema di riferimento, allora l'altra massa può orbitarci attorno, la forza centripeta essendo data proprio dalla forza di gravitazione¹⁵.

Detta $r_{1,2}$ la distanza relativa fra le masse, la forza gravitazionale vale *in modulo*:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}, \quad (3.4)$$

ed agisce in modo da avvicinare l'un l'altra le due masse¹⁶, e per la direzione che ha, si dice forza **centrale**. Dunque la forza dipende dalla distanza come l'inverso del quadrato, e quindi la sua intensità diminuisce rapidamente all'aumentare della distanza stessa.

La costante (dimensionata!) di gravitazione universale G vale all'incirca 6.67×10^{-11} N m²/Kg² (unità di misura un po' complicata). Prendiamo ora come una delle due masse quella della terra (circa 6×10^{24} Kg) e consideriamo un qualsiasi corpo sulla faccia della terra. Esso sarà sottoposto ad una *forza centrale*, cioè diretta verso il centro della terra (e quindi verticale verso il basso, in un riferimento che si trova sulla faccia della terra) che, in linea di principio, dipende dalla distanza $r_{1,2}$. Tuttavia la distanza che dobbiamo considerare¹⁷ è quella dalla superficie al centro della terra, il cui raggio (grosso modo costante a tutte le latitudini, ma sapete che la terra è un po' "schiacciata" ai poli) è molto grande (vale circa 6000 Km). Questo è il motivo per cui l'accelerazione di gravità \vec{g} ha circa lo stesso valore dappertutto: la distanza da Pisa al centro della terra è relativamente

¹⁴Per il principio di azione e reazione si ha che m_1 esercita su m_2 una forza uguale e di verso opposto rispetto a quella che m_2 esercita su m_1 .

¹⁵Nella realtà le orbite di satelliti, pianeti, etc. hanno una geometria che in genere è più complessa di una semplice circonferenza, a causa di ulteriori effetti che qui non affrontiamo.

¹⁶**FACT** Se consideriamo il *vettore* $\vec{r}_{1,2}$ che parte dalla massa m_1 e arriva alla massa m_2 , allora l'espressione *vettoriale* della forza è $\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{1,2}|^2} \hat{r}_{1,2}$, dove $\hat{r}_{1,2} = \frac{\vec{r}_{1,2}}{|\vec{r}_{1,2}|}$ è il versore della distanza relativa. Il segno meno nell'espressione della forza indica che essa ha *verso opposto* rispetto alla congiungente $\hat{r}_{1,2}$, cioè è attrattiva. Ricordate l'esistenza di questo segno meno!

¹⁷**FACT** Il fatto che la distanza sia da misurare proprio dal *centro* della terra è in realtà conseguenza di un teorema, detto **teorema di Gauss**, che vale nel caso di densità omogenea e forze centrali. Questo teorema è frequentemente usato in elettrostatica.

poco diversa di quella calcolata dalla sommità del Monte Bianco (la differenza percentuale è di circa una parte su mille)¹⁸

3.7.1 Esercizio: il peso su un altro pianeta

Sulla terra il vostro peso è P_T . Vi trasferite su un pianeta che ha massa doppia e raggio metà rispetto a quelli della terra (provate a calcolare la densità di massa di questo pianeta rispetto a quella della terra: sarà fatto di Kriptonite?). Quanto vale il vostro peso P su questo pianeta?

Soluzione. La forza gravitazionale, che è responsabile dell'accelerazione di gravità e quindi della forza peso, è direttamente proporzionale alla massa del pianeta considerato ed inversamente proporzionale rispetto al quadrato della distanza, cioè del raggio del pianeta considerato. Quindi il peso sul pianeta raddoppierà per effetto della massa doppia, e quadruplicherà ulteriormente per effetto del raggio metà, per cui $P = 8P_T$ (dobbiamo dimagrire!).

3.8 Forza elettrica

Tratteremo più diffusamente dei fenomeni di natura elettrica in seguito. Ora ci occupiamo solamente delle forze che si esercitano tra **cariche elettriche**. In natura esistono degli oggetti, appunto le cariche elettriche, che risentono di fenomeni di natura elettrica, in particolare della forza di cui trattiamo in questo paragrafo. Probabilmente vi è già noto che la carica elettrica è *discreta*, cioè esiste una quantità definita di carica (quella associata ad un **elettrone**) che non è ulteriormente frazionabile. La carica elettrica ha bisogno di una sua unità di misura fondamentale, che nel sistema internazionale (mKs) si chiama Coulomb (abbreviazione C). La carica elementare portata da un elettrone (spesso indicata con e) vale $e \approx -1.6 \times 10^{-19}$ C.

Nello scrivere la carica dell'elettrone abbiamo introdotto un segno negativo. Questo fatto riflette un aspetto peculiare della carica elettrica, che può essere negativa o positiva (un protone porta la carica elementare di segno positivo, pressochè equivalente in modulo a quella dell'elettrone). Notate che, numericamente, la carica elementare ha un valore molto piccolo, ed in effetti la maggior parte dei fenomeni elettrici che conosciamo per esperienza comune coinvolgono numerosissime cariche (vedremo che, ad esempio, nel filo che alimenta una lampadina elettrica possono passare anche 10^{20} elettroni al secondo!).

Dette q_1 e q_2 due cariche che si trovano a distanza relativa $r_{1,2}$, fra di loro si esercita una forza F_E , diretta lungo la congiungente le due cariche (quindi si tratta ancora di una

¹⁸**FAC** Nel caso di forze che agiscono a distanza, come la forza gravitazionale o quella elettrica di cui tratteremo fra breve, conviene spesso introdurre il concetto di **campo** di forze. Operativamente, il campo si ottiene dividendo l'espressione vettoriale della forza per una delle due masse. Ad esempio, nel caso della forza gravitazionale generata dalla terra su un corpo di massa m , conviene definire il campo di forze (una grandezza chiaramente vettoriale) dividendo l'espressione della forza per la massa m stessa. Quindi, per conoscere l'“effetto” del campo gravitazionale su una massa m qualsiasi, basterà moltiplicare la sua espressione per questa massa.

forza centrale), che ha modulo:

$$F_E = \kappa \frac{|q_1||q_2|}{r_{1,2}^2}, \quad (3.5)$$

dove la costante dimensionata κ vale circa $9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ (ancora un'unità di misura abbastanza complicata)¹⁹. Formalmente, la forza elettrica ha un'espressione simile a quella della forza gravitazionale. A parte il valore numerico della costante, che è ben diverso nei due casi, l'altra grande differenza è nel fatto che le cariche hanno un segno, e la forza elettrica può essere positiva (per una coppia di cariche con lo stesso segno) o negativa (cariche di segno opposto), cioè *repulsiva* o *attrattiva* nei due casi. Questo fatto riflette la circostanza nota (anche nel linguaggio comune!) che *cariche dello stesso segno si respingono, e cariche di segno opposto si attraggono*²⁰.

3.8.1 Esercizio: l'atomo planetario

Come saprete, gli atomi “contengono” protoni e neutroni (nel nucleo) ed elettroni (particelle circa 1800 volte più leggere delle altre). Elettroni e protoni hanno cariche elementari, rispettivamente negativa e positiva.

Lo studio dei sistemi atomici, anche dei più semplici come l'idrogeno, costituito solo da un elettrone ed un protone, è un argomento complesso che richiede gli strumenti della meccanica quantistica. Su questa base si verifica che è privo di senso considerare l'elettrone come una particella che descrive una traiettoria (invece del concetto classico di orbita si deve usare quello probabilistico di orbitale). Tuttavia, è almeno istruttivo analizzare secondo la meccanica classica un modello “planetario” di atomo di idrogeno, in cui il protone (pesante) sta fermo nello spazio e l'elettrone gli ruota attorno compiendo un'orbita circolare²¹.

Chiarito qual è il modello, veniamo all'esercizio. Si sa che il raggio dell'orbita è $a_0 = 0.05 \text{ nm} = 0.05 \times 10^{-9} \text{ m}$ ²²; quanto valgono la velocità angolare ω e la velocità lineare v dell'elettrone, la cui massa è $m_e \approx 0.9 \times 10^{-30} \text{ Kg}$? Inoltre, sapendo che la massa del

¹⁹**FAC** In elettrostatica, la costante κ nel sistema internazionale è spesso data in funzione di un'altra costante, ϵ_0 , che rappresenta la **costante dielettrica del vuoto** e vale circa $8.8 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$. Si ha, infatti: $\kappa = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

²⁰**FAC** L'espressione vettoriale della forza di natura elettrica è: $\vec{F}_E = \kappa \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2}$. Questa espressione contiene anche l'informazione sul verso della forza in funzione del segno delle cariche. Analogamente a quanto mostrato per la forza gravitazionale, anche in questo caso è spesso utile introdurre la grandezza vettoriale **campo elettrico**, generalmente indicato con \vec{E} , che si ottiene dalla forza dividendo per il valore di una delle due cariche. Ad esempio, il campo elettrico prodotto da una carica q generica ad una distanza \vec{r} generica si esprime come $\vec{E} = \kappa \frac{q}{r^2} \hat{r}$.

²¹Per completezza, tenete conto che questo semplice sistema è alla base del **modello atomico di Bohr**, in cui l'aspetto quantistico si riduce ad imporre una *regola di quantizzazione* sulla grandezza $m_e \omega R^2$, essendo m_e la massa dell'elettrone, ω ed R la velocità angolare ed il raggio dell'orbita circolare, che deve essere pari ad un multiplo intero di una costante fondamentale, la costante di Planck ($\hbar \approx 10^{-34}$ nelle unità di misura, J s, valide nel sistema mKs).

²²Il nanometro, simbolo nm, equivale a 10^{-9} m ed è una unità di misura conveniente per le scale dimensionali del mondo atomico e molecolare. Talvolta si impiega anche l'Angström, simbolo Å, che equivale a 0.1 nm.

protone è $m_p \approx 1.6 \times 10^{-27}$ Kg, quanto vale il rapporto tra forza gravitazionale ed elettrica per il sistema considerato?

Soluzione. La forza centripeta che consente il moto circolare è fornita dalla forza attrattiva di natura elettrica (vedremo poi che la forza di attrazione gravitazionale tra elettrone e protone è trascurabile). Quindi, uguagliando i moduli delle due forze, deve essere $m\omega^2 a_0 = \kappa e^2 / a_0^2$, dove si è indicata con e la carica elettrica elementare dell'elettrone e del protone (non contano i segni dato che stiamo esaminando il modulo della forza, di cui sappiamo già che è attrattiva). Allora l'incognita del problema è $\omega = e\sqrt{\kappa/(ma_0^3)}$,²³ mentre la velocità lineare si trova semplicemente moltiplicando ω per il raggio a_0 . I risultati numerici sono: $\omega \approx 4.5 \times 10^{16}$ rad/s, e $v \approx 2.3 \times 10^6$ m/s. Quindi l'elettrone ruota con una velocità angolare molto elevata e con una velocità lineare anche molto elevata (ricordiamo che la velocità della luce, una sorta di limite superiore relativistico per le velocità, è $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, non troppo più alta di quanto abbiamo trovato).

Per quanto riguarda la forza di attrazione gravitazionale, essa risulta molto meno intensa di quella elettrica, essendo il rapporto $F_G/F_E = \frac{Gm_em_p}{\kappa e^2} \sim 10^{-40}$. Quindi il sistema atomico che stiamo considerando è “tenuto insieme” proprio dalle forze di natura elettrica, che hanno un ruolo importantissimo in tutti i fenomeni fisico-chimici su scala atomica e molecolare. Per completezza, ricordiamo anche che esistono altri “tipi” di forze che sono responsabili dei fenomeni di natura sub-atomica (cioè ad esempio i processi nucleari o della cosiddetta “fisica delle particelle”), le forze “forti” ed “elettrodeboli”, la cui origine risiede nella fisica relativistica e nella meccanica quantistica.

3.9 Forza elastica

La forza elastica è caratteristica di numerosi sistemi fisici, ad esempio delle molle. Una molla (pensate per esempio a una molla a spirale, oppure ad un pezzo di elastico²⁴) è un sistema dotato di una certa lunghezza di riposo, l_0 , che rappresenta la lunghezza in assenza di forze applicate²⁵. Quando la molla viene compressa, essa esercita una forza che tende a farla riallungare fino a ri-assumere la lunghezza di riposo. Viceversa, se la molla viene estesa, essa tende a comprimersi fino alla lunghezza di riposo. Detta $\Delta l = l - l_0$ la variazione della lunghezza della molla, l , rispetto alla lunghezza di riposo (si ha $\Delta l > 0$ in caso di estensione, $\Delta l < 0$ in caso di compressione), la forza elastica si scrive: $F_{ela} = -k\Delta l$, dove k è una costante (con unità di misura N/m) che dipende dal sistema considerato (ad esempio, materiale, caratteristiche costruttive, dimensioni della molla, etc.). Il segno meno che compare nella legge tiene conto del fatto che la forza tende ad opporsi alla

²³Notate che la formula che risolve il problema è piuttosto complicata, e non è ovvio che le dimensioni siano corrette. Siete invitati a controllare! Inoltre in questi casi occorre assicurarsi di utilizzare unità di misura “coerenti” fra loro, per intendersi devono fare tutte riferimento allo stesso sistema di unità, l'mKs. In caso contrario è molto facile fare errori marchiani.

²⁴Va inteso che questi non sono gli unici sistemi di tipo elastico, ma sono quelli che meglio si prestano ad operare in una dimensione, che è il caso a cui ci restringeremo.

²⁵Talvolta nei problemi di fisica si pone nulla la lunghezza a riposo, una condizione ben poco realistica, ma utile in alcuni casi.

variazione della lunghezza. È ovvio che, nel caso esemplificato, ci riferiamo ad una molla che agisce in una sola direzione (l'asse di una molla a spirale cilindrica, ovvero l'asse del gommino elastico), e quindi forza e compressione o estensione della molla hanno la stessa direzione. Nulla ci vieta di complicarci la vita e scrivere la relazione in forma vettoriale, $\vec{F}_{ela} = -k\vec{\Delta l}$, dove abbiamo introdotto una variazione di lunghezza in forma vettoriale, con un ovvio significato, ma l'utilità di questa complicazione è spesso irrilevante²⁶.

Vediamo che tipo di moto si ottiene se una forza elastica è applicata ad un punto materiale di massa m . Per esigenze di chiarezza, supponiamo che il moto avvenga lungo l'asse X e che anche la molla sia ovviamente disposta lungo quest'asse (ci restringiamo ad un caso unidimensionale). Come ulteriore semplificazione poniamo nulla la lunghezza di riposo (i risultati fondamentali che troveremo non dipendono granché da questa approssimazione). Dunque la forza, ovviamente unidimensionale (lungo l'asse X), si scrive $F = -kx$. La legge di Newton ci dice che $F = ma$ e l'accelerazione formalmente è la *derivata seconda* della posizione $x(t)$ rispetto al tempo: $a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$. Uguagliando le due espressioni si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t). \quad (3.6)$$

Trovare la soluzione di questa equazione richiede conoscenze non banali di analisi matematica. Tuttavia possiamo notare che la soluzione dell'Eq.3.6 abbia la caratteristica di essere proporzionale alla sua derivata seconda (cambiata di segno). Questo è proprio del moto delle oscillazioni armoniche (come abbiamo notato nel capitolo precedente), a patto che la pulsazione del moto sia $\omega = \sqrt{k/m}$. Quindi la soluzione cercata è del tipo $x(t) = x_i \cos(\omega t)$, dove x_i è l'ampiezza massima dell'oscillazione, determinata dalle *condizioni iniziali* del moto. In pratica, infatti, stiamo supponendo di far partire l'oscillazione estendendo (o comprimendo) la molla fino ad un certo valore iniziale $x(0) = x_i$, per poi lasciarla andare liberamente, senza impartirle alcuna velocità iniziale²⁷.

²⁶**FAC** Sempre in tema di complicazioni, per descrivere completamente alcune situazioni fisiche risulta insufficiente anche l'espressione vettoriale che abbiamo riportato. In essa, infatti, assumiamo che la costante elastica abbia lo stesso valore per spostamenti che avvengono in una qualsiasi direzione; ci si riferisce, cioè, ad un mezzo elastico **isotropo**, le cui caratteristiche non dipendono dalla direzione considerata. Poiché non tutti i mezzi elastici hanno questa proprietà, occorre introdurre dei coefficienti elastici diversi per ognuna delle tre direzioni considerate. Talvolta, poi, si verifica che la forza elastica dipende dallo spostamento in un modo che è ancora più complesso, per cui la forza in una direzione tiene conto anche degli spostamenti nelle altre direzioni. In questo caso conviene esprimere il coefficiente k come un *tensore* di rango 2, che dal punto di vista algebrico equivale ad una matrice 3×3 (in questo ambito, un vettore equivale ad una matrice 3×1 o 1×3).

²⁷**FAC** In generale la matematica stabilisce che, per determinare completamente la soluzione di un'equazione differenziale, occorre esprimere un certo numero di condizioni iniziali, dette anche *condizioni al contorno*. Tale numero deve essere pari all' "ordine" dell'equazione differenziale stessa, che è, in pratica, il grado più alto della (o delle) funzioni derivata che vi compaiono. L'Eq.3.6 contiene una derivata seconda, cioè di secondo grado, è quindi un'equazione differenziale del secondo ordine, e richiede di esprimere due condizioni iniziali. Queste sono la posizione iniziale x_0 e la velocità iniziale v_0 , che, nell'esempio riportato nel testo, valgono rispettivamente x_i e zero. Per tenere conto delle condizioni iniziali, la soluzione generale dell'Eq.3.6 sarebbe del tipo $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$, con A (dimensionata come una lunghezza) e Φ (termine

Da ultimo, notiamo che un corpo sottoposto all'azione di una forza elastica ha, chiaramente, una posizione di equilibrio quando $\Delta l = 0$, cioè quando la molla non è né compressa, né allungata rispetto alla posizione di riposo. Questa constatazione è alla base di numerose applicazioni (e quindi anche esercizi!) con molle e mezzi elastici in genere. Se applichiamo una forza \vec{F} nella direzione dell'asse della molla, questa si estenderà o comprimerà (a seconda del verso della forza applicata) finché la forza elastica non bilancia perfettamente \vec{F} , in modo da annullarne gli effetti e produrre una condizione di equilibrio statico. Quindi, misurando Δl quando è stata raggiunta la condizione di equilibrio, è in linea di principio possibile “misurare” una forza qualsiasi (questo impiego delle molle viene sfruttato nei cosiddetti *dinamometri*).

Ad esempio, se appendiamo una molla per un capo ad un solaio e la teniamo in direzione verticale, e all'altro capo applichiamo una massa m (come nella bilancia delle pescherie), osserveremo un allungamento della molla fino all'equilibrio delle forze, che in modulo si esprime: $mg = k\Delta l$. Quindi $m = (k/m)\Delta l$, cioè dalla misura della forza peso possiamo risalire al valore della massa. Notat che, se perturbiamo (leggermente) la posizione del corpo appeso alla molla attorno a quella di equilibrio, le forze elastiche tendono a far recuperare l'equilibrio stesso²⁸. Quindi la forza elastica può condurre ad un equilibrio di tipo stabile²⁹.

3.9.1 Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo

Un pendolo semplice è costituito da una massa m appesa ad una cordicella lunga l , inestensibile e di massa trascurabile. L'altro capo della cordicella è libero di ruotare

di **fase**) costanti da determinare imponendo proprio le condizioni al contorno su posizione e velocità. Ricordando l'espressione della derivata della funzione coseno, che abbiamo già citato nel paragrafo dedicato al moto armonico, potete facilmente stabilire l'espressione della velocità: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$. A questo punto potete anche facilmente rendervi conto che le condizioni iniziali che abbiamo scelto per il nostro moto conducono effettivamente alla soluzione $x(t)$ riportata nel testo.

²⁸**FAC** Dal punto di vista della dinamica del moto che si ha in queste situazioni, occorre modificare la forma della soluzione che abbiamo determinato prima per l'equazione differenziale delle forze elastiche. Questa modifica consiste nell'aggiungere (cioè sommare) alla $x(t)$ determinata prima la posizione di equilibrio x_{eq} (indichiamo in questo modo la posizione del corpo quando la forza elastica bilancia la forza applicata). In termini matematici, l'Eq.3.6 si dice *omogenea*, dato che essa non contiene termini costanti. L'aggiunta di una forza applicata, ad esempio della forza peso, come considerato nel testo, provoca la presenza di un termine costante nell'equazione del moto, che in questo caso sarebbe del tipo $+mg$. Questo termine rende *non omogenea* l'equazione differenziale, e la matematica stabilisce che, in questi casi, alla soluzione dell'equazione omogenea va aggiunta una (qualsiasi) *soluzione particolare*, che cioè corrisponde a delle condizioni ben specifiche. Una tale soluzione può essere ottenuta imponendo $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$, che significa fisicamente la posizione di equilibrio, e dà luogo alla soluzione $x_{particolare} = mg/k$. Allora la soluzione generale è del tipo $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + mg/k$, con le costanti A e Φ da determinare in modo da soddisfare le condizioni iniziali, come già specificato.

²⁹**FAC** È esperienza comune che, di fatto, se avete un sistema costituito da una molla ed una massa e lo perturbate (leggermente) dalla condizione di equilibrio, questo si metterà ad oscillare con oscillazioni di ampiezza via via decrescente fino a tornare di nuovo all'equilibrio. Non fosse così avremmo scoperto un modo per avere moto perpetuo! Responsabili di questo comportamento sono fenomeni di tipo *dissipativo*, parenti delle forze di attrito viscoso di cui tratteremo brevemente in seguito.

senza attriti su di un perno, ed il moto della massa avviene su di un piano verticale, attorno ad una posizione di equilibrio, che corrisponde alla corda in direzione verticale (e la massa in basso!). Considerando solo piccoli scostamenti dalla posizione di equilibrio, come si scrive la legge oraria del moto *angolare* della massa ³⁰?

Soluzione. Sulla massa agiscono la forza peso $m\vec{g}$ e la tensione \vec{T} della corda. Immaginiamo di spostare la massa dalla posizione di equilibrio in modo che la cordicella formi un *piccolo* angolo θ con la verticale (vedi Fig.3.9.1). Questo angolo θ rappresenta la variabile *angolare* che caratterizza la posizione della massa. Quindi per rispondere al problema dobbiamo trovare la legge oraria $\theta(t)$, cioè stabilire come varia nel tempo il valore di questo angolo.

Procediamo in modo simile a quanto fatto nello studio della massa vincolata a scorrere sulla guida semicircolare o sul piano inclinato, e notiamo che la proiezione della forza peso lungo la direzione della corda, $mg \cos \theta$, è perfettamente compensata dalla tensione \vec{T} . La proiezione della forza peso lungo la direzione ortogonale alla corda, invece, non ha alcun modo di essere compensata. Tale proiezione vale in modulo $mg \sin \theta$. La legge del moto lungo tale direzione (che è tangenziale rispetto all'arco di circonferenza descritto dalla massa) si scrive allora: $ma = -mg \sin \theta$, dove abbiamo messo un segno meno per indicare che la forza tende sempre a riportare la massa verso la posizione di equilibrio. Ora, se lo spostamento angolare è piccolo, come specificato dal testo del problema, si verifica che $\sin \theta \sim \theta$.³¹ Dunque si ha $a = -g\theta$.

A questo punto leghiamo l'accelerazione lineare (tangenziale) a con l'*accelerazione angolare*. Notiamo che, in corrispondenza di uno spostamento *angolare* $\Delta\theta$, la massa compie uno spostamento *lineare* (in direzione tangenziale) che vale $l\Delta\theta$, l essendo il raggio dell'arco di circonferenza percorso. Questo legame di proporzionalità diretta fra variabili angolari e lineari, che abbiamo già ampiamente sfruttato nel caso delle velocità (pensate a $v = \omega R$!), vale anche nel caso dell'accelerazione. Detta $\alpha(t)$ l'accelerazione angolare, si ha $\alpha(t) = a/l$. Formalmente, inoltre, $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$. Quindi, rimaneggiando un po' le varie espressioni, si può scrivere $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \alpha(t) = a/l = -\frac{g}{l}\theta$. Questa equazione rappresenta

³⁰È chiaro che, in questo caso, anche una piccola perturbazione, cioè una piccola oscillazione, mette in movimento il pendolo. Poiché supponiamo trascurabili gli attriti, che, come vedremo, sono forze di tipo dissipativo (rendono impossibile il moto perpetuo!), il moto continua indefinitamente, e quindi la posizione di equilibrio non viene mai raggiunta. Questo è il motivo per cui parliamo di legge oraria del moto, che ci aspettiamo di tipo oscillatorio. Nella realtà, però, è impossibile annullare del tutto gli attriti, e la posizione di equilibrio stabile è di fatto raggiunta, prima o poi.

³¹**FAC** Dal punto di vista matematico abbiamo fatto un'*espansione di Taylor* della funzione seno al primo ordine. L'approssimazione citata ha anche un'ovvia interpretazione geometrica. Se prendete una circonferenza di raggio R e definite un arco che inscrive un angolo ϕ , allora la lunghezza di questo arco di circonferenza vale $R\phi$. La *corda* corrispondente è, geometricamente, un lato di un triangolo isoscele, di cui gli altri due lati sono raggi della circonferenza, quindi lunghi R . Se l'angolo $\phi \rightarrow 0$, cioè viene scelto molto piccolo, allora la lunghezza della corda, che è il lato opposto a questo angolo, tende al valore $R \sin \phi$, come ci si può facilmente convincere notando che gli angoli di base tendono a divenire retti, ed applicando la definizione trigonometrica della funzione seno. Allora l'approssimazione che stiamo usando consiste nel rimpiazzare la corda con l'arco, operazione ragionevole per piccoli angoli, e che abbiamo già utilizzato nel derivare il valore dell'accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme.

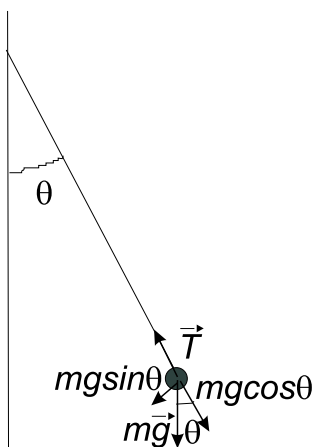


Figura 3.4: Rappresentazione del pendolo semplice trattato nel testo.

un moto armonico per la variabile angolare θ , con pulsazione $\omega = \sqrt{g/l}$ (piccole oscillazioni del pendolo). Essendo il periodo dell'oscillazione pari a $T = 2\pi/\omega$, per avere un pendolo che “batte il secondo” (cioè $T = 1$ s), occorre una lunghezza $l = g/(s\pi)^2 \approx 25$ cm (verificate!), *indipendente dalla massa*. Notate inoltre che, coerentemente con quanto abbiamo affermato prima sul moto oscillatorio, la pulsazione, e quindi il periodo, non dipendono dalle condizioni iniziali, come fu osservato da Galileo alcuni secoli fa qui a Pisa (*isocronia* delle oscillazioni del pendolo).

3.10 Forze d'attrito

L'esistenza dell'attrito è ben nota (e spesso deplorata) nel linguaggio comune, dove esso è identificato come un fenomeno che “si oppone” al moto. Dal punto di vista microscopico l'attrito è conseguenza di una varietà di fenomeni che si verificano, su scala atomica e molecolare, all'interfaccia tra un corpo in moto, o in *moto incipiente* (cioè che “prova” a muoversi) ed una superficie “scabra” (cioè non liscia). Tradizionalmente, conviene suddividere l'attrito in statico, dinamico e viscoso, anche se occorre sottolineare che questa suddivisione non ha fondamenti precisi dal punto di vista microscopico, e vale soltanto quando si intendono valutare in forma macroscopica gli effetti dell'attrito.

3.10.1 Attrito statico

L'attrito statico è una forza che si oppone al moto incipiente di un corpo. È esperienza comune che, se applichiamo una forza ad un corpo poggiato su una superficie scabra, cioè non liscia, né particolarmente “scorrevole”, come potrebbe essere una lastra di ghiaccio o uno strato di olio, il corpo non si sposta finché la forza applicata non supera un certo valore *di soglia*. Nella nostra schematizzazione, responsabile di questo comportamento è la forza di attrito statico (l'aggettivo indica che il corpo che subisce la forza resta fermo).

Detto N il *modulo* della reazione vincolare che la superficie di appoggio esercita sul corpo, la forza di attrito è, in modulo:

$$F_{a,s} \leq \mu_s N, \quad (3.7)$$

dove μ_s è un coefficiente (adimensionale), detto **coefficiente di attrito statico**. Questo coefficiente, che è sempre $\mu_s \leq 1$, dipende dalla natura delle superfici poste a contatto (materiale, finitura superficiale, etc.) ed il suo valore si può reperire in tabelle specifiche. La forza di attrito statico ha sempre la stessa direzione e verso opposto rispetto alla forza applicata, cioè è tale da opporsi a quest'ultima in modo da annullarla totalmente, mantenendo così fermo il corpo.

Notiamo che l'Eq.3.7 contiene un segno di minore-uguale (\leq). Il significato è che l'attrito assume un valore sempre esattamente in grado di annullare la forza applicata al corpo, purché questa non superi il valore massimo stabilito dall'Eq.3.7, cioè $N\mu_s$. Se questo si verifica, allora il corpo comincia a muoversi, e l'attrito diventa dinamico (vedi dopo). È ovvio, inoltre, che se non si applica nessuna forza al corpo l'attrito è nullo; se così non fosse, la forza di attrito statico farebbe muovere spontaneamente il corpo!

3.10.2 Esercizio: spingere o tirare

Dovete spostare in direzione orizzontale una cassa di massa m appoggiata su un piano scabro (il coefficiente di attrito statico vale μ_s). La cassa è pesante e bassa, cioè dovete chinarvi per toccarla. Avete due opzioni per applicare alla cassa la vostra forza \vec{F} : potete “spingerla, cioè applicare da dietro la vostra forza, oppure “tirarla”, cioè applicare da davanti la vostra forza. Quale opzione è più vantaggiosa?

Soluzione. Quando spingete, la forza \vec{F} ha una componente non nulla diretta verticalmente *verso il basso*, che chiamiamo F_{vert} .³² Quindi la reazione vincolare \vec{N} esercitata dal piano di appoggio sulla cassa, che deve essere tale da annullare tutte le forze in direzione verticale applicate alla cassa stessa (altrimenti questa sprofonderebbe nel piano, o si solleverebbe da esso, e supponiamo che questo non si verifichi), è diretta verticalmente verso l'alto, e vale, in modulo, $N = mg + F_{vert}$. Invece, se la cassa viene trainata, la componente verticale della forza applicata è diretta *verso l'alto*, e quindi la reazione vincolare vale, in modulo, $N = mg - F_{vert}$, un valore evidentemente minore che nel caso precedente. Poiché per spostare la cassa dovete vincere la forza di attrito statico, proporzionale proprio al modulo di \vec{N} , conviene “tirare” la cassa, piuttosto che “spingerla”.

3.10.3 Esercizio: piano inclinato con attrito statico

Se poggiate un oggettino (preferibilmente un corpo che non possa ruotare su se stesso) su di una superficie che forma un angolo con l'orizzontale e variate questo angolo (in pratica avete costruito un piano inclinato con inclinazione variabile, con un angolo di base che

³²**FAC** Se chiamiamo θ l'angolo compreso tra \vec{F} e la direzione orizzontale, la componente verticale in un sistema di riferimento orientato verso il basso vale $F_{vert} = F \sin \theta$.

chiamiamo θ), vedrete probabilmente che l'oggettino sta fermo finché l'angolo non supera un dato valore. Perché si verifica questo?

Soluzione. Come già abbiamo avuto modo di osservare, detta m la massa dell'oggetto e θ l'angolo formato dal piano inclinato con l'orizzontale, abbiamo che la forza di reazione vincolare esercitata dal piano vale, in modulo, $N = mg \cos \theta$, cioè equivale alla proiezione della forza peso lungo la direzione ortogonale al piano. La proiezione lungo la direzione parallela al piano, che vale $mg \sin \theta$, tende a far scivolare verso il basso il corpo. Rispetto al caso che abbiamo considerato prima, in cui avevamo supposto trascurabile l'attrito, ora abbiamo una nuova forza nel diagramma di corpo libero, la forza di attrito statico. Per definizione, la sua direzione è quella lungo la quale "tenderebbe" a verificarsi il moto, cioè la direzione del piano inclinato, ed il suo verso è opposto a quello del moto. Il suo modulo vale, *al massimo*, $N\mu_s = mg\mu_s \cos \theta$ (abbiamo indicato con μ_s il coefficiente di attrito statico del piano).

L'oggetto comincia a muoversi quando la forza $mg \sin \theta$ uguaglia la forza di attrito: $mg \sin \theta = mg\mu_s \cos \theta$, cioè, semplificando e riarrangiando i termini, $\tan \theta = \mu_s$. Quindi l'oggetto si muove se l'angolo θ è *uguale o maggiore* di $\arctan(\mu_s)$.

3.10.4 Esercizio: l'auto che sbanda in curva

Un'automobile di massa $m = 1000$ Kg percorre una curva con raggio di curvatura $R = 100$ m a velocità costante v . Supponendo che il coefficiente di attrito statico tra gomme ed asfalto sia $\mu_s = 0.2$ (ragionevole per strada bagnata), qual è la velocità massima di percorrenza v_{max} al di sopra della quale l'auto comincia a sbandare (cioè a partire per la tangente)?(Nella soluzione, considerate l'automobile come un punto materiale)

Soluzione. Per curvare, cioè percorrere un arco di circonferenza, l'auto deve subire una forza centripeta, il cui modulo vale $F_{centr} = m\omega^2 R = mv^2/R$, dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione $\omega = v/R$. Questa forza è fornita dall'attrito (*statico*, perché infatti vogliamo non ci sia moto lungo la direzione radiale, quella di interesse per la forza centripeta). Essendo il modulo della reazione vincolare $N = mg$ ³³ e allora la forza di attrito vale, al massimo, $F_{a,s,max} = \mu_s N$.³⁴ Dunque la velocità massima di percorrenza si ottiene uguagliando le forze: $mv_{max}^2/R = mg\mu_s$, da cui $v_{max} = \sqrt{gR\mu_s}$. Il risultato numerico, usando $g \approx 9.8$ m/s², dà $v_{max} \approx 17$ m/s, corrispondenti a poco più di 60 Km/h: quindi guidate con prudenza!

³³**FAC** Questa affermazione è vera se la strada è piana. Pensate a cosa succede per le curve cosiddette "paraboliche", in cui il piano stradale è inclinato: vedrete che in questo caso la reazione vincolare ha una componente che "aiuta" la forza di attrito e, di conseguenza, la massima velocità di percorrenza della curva aumenta.

³⁴**FAC** In realtà, poiché le ruote sono quattro, dovremmo considerare e sommare fra loro le forze di attrito che agiscono su ogni gomma; questo richiederebbe di conoscere il peso che grava su ogni singola ruota. Supponendo che su ogni ruota gravi esattamente 1/4 della massa totale, supposizione non del tutto ragionevole se si tiene in conto il lavoro delle sospensioni e l'"asimmetria" nella distribuzione delle masse di un'auto, si ottiene il risultato proposto.

3.10.5 Attrito dinamico

La forza di attrito dinamico si instaura quando un corpo *si muove* su una superficie scabra. L'attrito dinamico ha sempre la *stessa direzione e verso opposto* rispetto allo spostamento del corpo, ma, dato che il corpo si muove, non ha evidentemente modulo sufficiente per determinare una condizione di equilibrio statico. Il modulo della forza di attrito dinamico vale:

$$F_{a,d} = \mu_d N, \quad (3.8)$$

dove N , al solito, è il modulo della forza di reazione vincolare. Siete invitati a verificare le differenze tra le leggi dell'attrito dinamico e statico: oltre all'ovvia differenza sui coefficienti (il **coefficiente di attrito dinamico** μ_d è in genere, a parità di materiale, più piccolo di quello statico, da cui l'osservazione di esperienza comune che occorre una forza maggiore per mettere in moto un corpo che non per mantenercelo), qui il segno di minore-uguale è rimpiazzato da un uguale. Questo riflette la circostanza che l'attrito dinamico è una forza di intensità ben definita, che si oppone allo spostamento di un corpo, mentre l'attrito statico è una sorta di reazione rispetto al tentativo del corpo a muoversi sotto l'azione di una forza esterna.

3.10.6 Esercizio: frenata a ruote bloccate

L'automobile dell'esercizio di prima ora viaggia in rettilineo a velocità costante $v = 72$ Km/h. Ad un dato istante il guidatore frena bloccando le ruote (non è il modo migliore per frenare, ma l'auto è vecchia e non ha l'ABS!). Sapendo che $\mu_d = 0.2$, quanta strada percorre l'auto prima di fermarsi?

Soluzione. Il problema è unidimensionale, ed approssimiamo l'auto ad un punto materiale, disinteressandoci di ogni possibile effetto di cappottamento, rotazione attorno all'asse, etc. Quando le ruote vengono bloccate, si instaura una forza di attrito *dinamico* (le ruote strisciano sull'asfalto, cioè la superficie della gomma si muove, strisciando, sull'asfalto) che vale $mg\mu_d$, cioè l'auto subisce una decelerazione pari a $-g\mu_d$ (si ottiene dividendo la forza per la massa ed il segno meno significa che la forza si oppone al verso del moto). Allora la legge del moto, scegliendo $t_0 = 0$ come istante iniziale, tenendo conto che la velocità iniziale è v , supponendo che il moto avvenga lungo l'asse X e ponendo $x_0 = 0$, è quella di un moto uniformemente accelerato (ovvero "decelerato", visto che i segni di velocità e accelerazione sono opposti tra loro):

$$x(t) = vt - \frac{g\mu_d}{2}t^2. \quad (3.9)$$

Ora, quando l'auto si ferma, significa che la sua velocità si è annullata per effetto della decelerazione uniforme. Questo si verifica all'istante t_{stop} tale che $v(t_{stop}) = 0$. Poiché la legge oraria della velocità in questo moto uniformemente accelerato (cioè, decelerato) è $v(t) = v - g\mu_d t$, l'istante in questione si ottiene risolvendo la $0 = v(t_{stop}) = v - g\mu_d t_{stop}$, cioè $t_{stop} = v/(g\mu_d)$.

La distanza percorsa nella frenata è $x(t_{stop}) = v^2/(g\mu_d) - g\mu_d v^2/(2g\mu_d)^2 = v^2/(2g\mu_d)$.³⁵ Il risultato numerico, tenendo conto che la velocità iniziale di 72 Km/h equivale a 20 m/s, dà uno spazio di frenata che vale circa 100 m (ed abbiamo trascurato i tempi di reazione del guidatore!): quindi guidate con moltissima prudenza!

3.10.7 Attrito dipendente dalla velocità

L'attrito dinamico che abbiamo considerato esiste, ovviamente, solo se la velocità del corpo è non nulla, ma esso non dipende dal valore della velocità stessa. Ci sono invece numerose situazioni fisiche in cui la forza di attrito *dipende linearmente* dalla velocità:

$$\vec{F}_{a,v} = -\beta\vec{v}, \quad (3.10)$$

dove abbiamo usato la notazione vettoriale ed abbiamo posto un segno meno per ribadire il fatto che la forza ha la stessa direzione e verso opposto rispetto alla velocità. Il coefficiente (dimensionato: le sue dimensioni sono Kg/s) β dipende dal sistema considerato. Questo tipo di attrito è tipico del moto di corpi all'interno di fluidi "reali", cioè dotati di *viscosità* (ed infatti questa forza è spesso denominata **attrito viscoso**. Avremo di nuovo a che fare con l'attrito viscoso quando tratteremo l'argomento dei fluidi. Per il momento ci limitiamo a dire che il coefficiente β è legato al coefficiente di viscosità del fluido considerato, e dipende anche dalle caratteristiche del corpo che si sta muovendo nel fluido³⁶. D'altra parte, che per un corpo esteso che si muove in fluido viscoso (l'aria lo è) le forze di attrito dipendano dalla geometria del corpo stesso è ben noto a chiunque sappia che la "penetrazione aerodinamica" delle automobili (valutata attraverso un coefficiente detto C_x) dipende dalla loro "forma".

Per il momento limitiamoci a dare la legge del moto in presenza di attrito viscoso. L'equazione del moto si scrive (per semplicità supponiamo il moto unidimensionale, in modo perlomeno da evitare di scrivere il segno di vettore) $F = ma = -\beta v$. Ricordandoci che, formalmente, l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m}v(t). \quad (3.11)$$

Si tratta quindi di un'equazione differenziale a variabili separabili, che, come scoprirete nel corso di matematica, ha soluzione "esponenziale" con parametri che dipendono dalle condizioni iniziali del problema³⁷. Nel caso interessante di un corpo che parte da fermo, per

³⁵Quando avremo introdotto la *conservazione dell'energia meccanica*, saremo in grado di ottenere questo risultato in modo assai più semplice

³⁶**FAC** In particolare, per un corpo sferico di raggio r non troppo grande, ad esempio una goccia d'acqua che cade nell'aria, si ha $\beta = 6\pi r\eta$ (*legge di Stokes*)

³⁷**FAC** Formalmente, la soluzione dell'equazione differenziale $\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x)$ si può ottenere riscrivendo l'equazione come $\frac{1}{y}dy(x) = A dx$, cioè "portando" dx al secondo membro e $y(x)$ al primo. Notate che questo è possibile per come è stata scritta l'equazione, che è a variabili separabili (che cioè, in pratica, possono essere "portate" da un membro all'altro). A questo punto è possibile integrare i due membri tra i valori iniziali e finali delle variabili y ed x , rispettivamente per il primo ed il secondo membro:

poi muoversi sotto l'effetto di una forza esterna in un fluido viscoso, si ha: $v(t) = v_{lim}(1 - \exp(-\frac{\beta}{m}t))$.³⁸ La funzione $v(t)$ parte da zero e cresce fino a raggiungere *asintoticamente* il *valore limite* v_{lim} , che calcoleremo nell'esercizio seguente.

In conclusione, poi, notate che un termine del tipo $-\frac{\beta}{m}v(t) = -\frac{\beta}{m}\frac{dx(t)}{dt}$, dove abbiamo supposto che il moto sia unidimensionale ed avvenga lungo la direzione X (abbiamo cioè espresso la velocità $v(t)$ come derivata della posizione $x(t)$) potrebbe essere presente anche nella descrizione di un moto sotto l'azione di una forza elastica, del tipo di quello descritto dall'Eq.3.6. In effetti, come già anticipato, nella realtà gli effetti dissipativi che giocano inevitabilmente un ruolo nella dinamica di un oscillatore armonico possono spesso essere trattati come un attrito di tipo viscoso. In queste condizioni, la matematica ci dice che l'ampiezza delle oscillazioni (che hanno sempre la pulsazione che avrebbero in assenza di attrito) decresce *esponenzialmente* nel tempo fino a tendere, asintoticamente, a zero³⁹.

3.10.8 Esercizio: velocità limite di un paracadutista

Anche l'aria è un fluido (debolmente) viscoso. Quanto vale la velocità limite che si raggiunge nella caduta di un corpo di massa m nell'aria supponendo di conoscere il valore del coefficiente di attrito viscoso, β ?

Soluzione. Sul corpo agisce la forza di gravità, che lo spinge verso il basso, e vale mg , e la forza di attrito viscoso, che vale $-\beta v$ (è diretta in verso opposto, cioè verso l'alto). Tenendo conto delle due forze che agiscono sul corpo, si ha: $ma = mg - \beta v$ ⁴⁰. Poiché accelerazione e velocità dipendono dal tempo, potrà esistere un istante t_{lim} tale che $\beta v(t_{lim}) = mg$. A questo istante si ha che l'accelerazione è nulla, cosa che implica velocità costante. Ma se la velocità diventa costante, l'accelerazione resta nulla, e quindi la velocità limite è $v_{lim} = v(t_{lim})$. Per determinarne il valore, basta porre nulla l'accelerazione, ottenendo $v_{lim} = mg/\beta$.

L'esistenza della velocità limite viene sfruttata dai paracadutisti che si lanciano nel-

come valori iniziali prenderemo x_0 ed il valore y_0 che la funzione $y(x)$ assume in corrispondenza di $x = x_0$ (cioè la condizione iniziale sulla y), come valori finali metteremo i valori generici y ed x . In sostanza, quindi, avremo al secondo membro l'integrale definito $\int_{x_0}^x A dx = A(x - x_0)$ e al primo membro dovremo calcolare l'integrale definito $\int_{y_0}^y \frac{1}{y} dy$. Ricordando l'espressione della "primitiva" di $\frac{1}{y}$, che vale $\ln(y)$, avremo che tale integrale definito dà $\ln(y) - \ln(y_0) = \ln(y/y_0)$, avendo usato nell'ultimo passaggio una nota proprietà della funzione logaritmo. Allora, uguagliando gli integrali definiti ottenuti per i due membri, si ha $A(x - x_0) = \ln(y/y_0)$, ovvero, "facendo l'esponenziale" dei due membri e riarrangiando, $y(x) = y_0 \exp(A(x - x_0))$.

³⁸La scrittura $y(x) = \exp(x)$ significa $y(x) = e^x$, dove e indica la base dei *logaritmi naturali*.

³⁹**FAC** In sostanza, la presenza dell'attrito comporta un termine di tipo $-\gamma \frac{dx(t)}{dt}$, cioè con una derivata del primo ordine, nell'Eq.3.6. La soluzione generale è del tipo $x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \Phi)$, con $\omega = \sqrt{k/m}$ e A e Φ costanti da determinare in base alle *condizioni iniziali* del moto. Notate che il termine $A \exp(-\gamma t)$ può essere interpretato come un'ampiezza che decresce esponenzialmente nel tempo, come suggerito nel testo. Inoltre, l'eventuale presenza di un termine non omogeneo nell'equazione differenziale comporterebbe di aggiungere una *soluzione particolare* come discusso in una nota precedente.

⁴⁰La scelta dei segni con cui abbiamo scritto l'equazione implica un sistema di riferimento "diretto verso il basso", cioè lo spostamento verso il basso ha segno positivo; il risultato non cambierebbe se prendissimo, come di consueto, un sistema di riferimento "diretto verso l'alto".

l'aria. L'ampia superficie del paracadute produce un grande valore per β e quindi una velocità limite bassa, che permette ai paracadutisti di non rompersi le ossa quando atterrano.

3.11 Momento delle forze

Finora abbiamo sempre considerato forze applicate a punti materiali (o perlomeno abbiamo usato punti materiali come modello per i nostri sistemi). Però, chiaramente, nella realtà questa approssimazione non è sempre praticabile. Per esempio, se applichiamo una forza ad una porta sappiamo che questa non si mette in movimento con un moto uniformemente accelerato, come dovrebbe essere sulla base di quanto abbiamo visto finora, ma piuttosto si apre, cioè *ruota* attorno al perno dei cardini.

In effetti, il muro a cui la porta è incardinata produce ovviamente una reazione vincolare, che annulla gli effetti della forza applicata in termini di accelerazione lineare dell'intera porta. Tale reazione, però, non influisce sugli effetti che conducono alla rotazione rispetto all'asse (la retta che passa per i cardini). D'altra parte, se applicassimo la nostra forza proprio sui cardini, la porta non farebbe nulla (resterebbe ferma e non ruoterebbe). L'aspetto saliente di questo tipo di problemi è proprio che abbiamo un corpo esteso (non puntiforme!) ed applichiamo la forza a qualche distanza dall'asse di rotazione. L'esperienza quotidiana ci dice anche che, per aprire la porta, facciamo meno fatica se la nostra forza l'applichiamo distante dall'asse di rotazione. Infatti, le maniglie di apertura e chiusura sono sempre collocate vicino allo spigolo della porta opposto ai cardini.

È chiaro che il concetto di forza ed i principi della dinamica che sono ad esso collegati non bastano per interpretare le situazioni fisiche in cui è coinvolta una rotazione. Occorre introdurre un nuovo concetto, che è quello di **momento delle forze**. Si tratta di una grandezza vettoriale, che indichiamo con \vec{M} , che ha dimensioni di una forza per uno spostamento (non c'è una unità di misura dedicata per il momento delle forze, che quindi, nel sistema mKs, si misura in Newton per metro, abbreviazione N m).

FAC Se supponiamo di applicare una forza \vec{F} ad un corpo rigido (cioè *non deformabile*, ovvero che mantiene forma e volume propri) *esteso* (cioè non puntiforme), detto \vec{r} il vettore che congiunge l'asse di rotazione con il punto di applicazione della forza, allora la definizione di momento della forza è:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (3.12)$$

L'operazione tra vettori sopra introdotta, indicata con il simbolo \times (talvolta anche con una lettera V rovesciata) e detta **prodotto vettoriale**, deve essere chiarita nei dettagli. Il risultato dell'operazione è un *vettore* (\vec{M}) che ha direzione *ortogonale* rispetto ai vettori di partenza, e modulo pari al prodotto dei moduli dei vettori di partenza moltiplicato ulteriormente per $\sin \theta$, essendo θ l'angolo compreso tra i due vettori stessi: $|\vec{M}| = r|\vec{F}|\sin \theta$. Il verso del vettore prodotto si ottiene applicando la cosiddetta *regola della mano destra*: disponendo il pollice e l'indice della mano destra ad indicare i versi dei vettori di parten-

za, nel giusto ordine, il dito medio indica il verso del vettore prodotto^{41,42}. Dato che il risultato della presenza di un momento di forze è la rotazione di un corpo rigido, non ci stupisce che questa convenzione sul verso coincida con le convenzione sul segno che abbiamo introdotto per la velocità angolare ω .⁴³ In sostanza, osservando “dall’alto” il piano su cui giacciono forza \vec{F} e vettore \vec{r} , la rotazione è antioraria quando il momento delle forze è positivo, o viceversa. Per fortuna, tutte queste definizioni di tipo matematico, che sono state riportate solo per completezza, non sono indispensabili per risolvere i problemi di nostro interesse, tanto più che ci restringiamo per il momento a considerare problemi di statica, e non la dinamica dei corpi rigidi. **fine FAC**

In particolare, in molti casi è sufficiente ricordare che una forza F applicata ad una certa distanza R dall’asse di rotazione produce un momento, di modulo $RF \sin \theta$ che tende a far ruotare il corpo attorno all’asse di rotazione in un certo verso. In questa espressione, ricordiamo che θ rappresenta l’angolo compreso tra la direzione della congiungente del punto di applicazione della forza e l’asse di rotazione, e la direzione della forza stessa. Per ottenere equilibrio statico per la rotazione occorre applicare allo stesso corpo un altro momento delle forze (cioè un’altra forza, applicata in qualche altro punto) uguale e opposto al precedente.

Al termine $R \sin \theta$ si dà spesso il nome di **braccio** della forza. Tenendo conto del significato geometrico di distanza, il braccio rappresenta proprio la distanza tra la forza applicata e l’asse di rotazione. In molti casi, anche di interesse pratico, l’angolo θ è retto, cioè la direzione della forza è ortogonale rispetto al vettore che congiunge l’asse di rotazione con il punto di applicazione della forza stessa. In questi casi, essendo $\sin \theta = 1$, il modulo del momento è semplicemente $M = RF$.

3.11.1 Esercizio: due bambini sull’altalena a dondolo

Un’altalena a dondolo è costituita da una trave *di massa trascurabile* incernierata al centro in modo da poter ruotare *senza attrito* su un piano verticale. Due bambini, uno grassoccio ed uno magrolino, sono seduti sull’altalena, a distanza rispettivamente l_g ed l_m dal perno di rotazione. In queste condizioni l’altalena è in equilibrio (cioè è ferma e la trave è in direzione orizzontale). Sapendo che il bimbo grassoccio ha massa m_g , quanto vale la massa m_m del maschietto mingherlino?

Soluzione. Sulla trave agiscono due momenti di forze, che tendono a produrre rotazioni di verso opposto (i due bambini siedono ovviamente da parti opposte rispetto al

⁴¹**FAC** Presi due vettori generici, \vec{w}_1 e \vec{w}_2 con componenti rispettivamente $(w_{1,x}, w_{1,y}, w_{1,z})$ e $(w_{2,x}, w_{2,y}, w_{2,z})$, si può dimostrare che il vettore prodotto $\vec{W} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ ha componenti $(W_x, W_y, W_z) = (w_{1,y}w_{2,z} - w_{1,z}w_{2,y}, -w_{1,x}w_{2,z} + w_{1,z}w_{2,x}, w_{1,x}w_{2,y} - w_{1,y}w_{2,x})$.

⁴²**FAC** Il prodotto vettoriale fra due vettori generici \vec{w}_1 e \vec{w}_2 , $\vec{w} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$, non gode della proprietà commutativa: infatti si può dimostrare, giocando con la regola della mano destra, che $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = -\vec{w}_2 \times \vec{w}_1$, cioè i fattori del prodotto “anticommutano” fra loro.

⁴³**FAC** Notate che anche la velocità angolare, a rigore, è una grandezza vettoriale, con direzione ortogonale al piano che contiene la velocità \vec{v} e il raggio \vec{R} , e verso definito con la stessa convenzione che abbiamo introdotto qui. In altre parole, nella fisica si definisce la velocità angolare vettoriale per un punto in rotazione su un’orbita di raggio R secondo la $\vec{v} = \omega \times \vec{R}$.

perno di rotazione). Dette $P_g = m_g g$ e $P_m = m_m g$ le forze peso che agiscono sui due bambini, i momenti delle forze prodotti dalle forze peso applicate sui bambini (supposti puntiformi!) valgono rispettivamente, in modulo, $M_g = P_g l_g$ e $M_m = P_m l_m$ (notate che, essendo all'equilibrio l'asse dell'altalena in direzione orizzontale, ed essendo la forza peso verticale, gli angoli θ che entrano nella definizione dei momenti delle forze sono entrambi retti). Per l'equilibrio occorre che i due momenti delle forze siano uguali, da cui si ricava $m_m = m_g l_g / l_m$.

3.11.2 Esempi di leve

Le leve sono semplici macchine in cui si sfruttano in modo “intelligente” le leggi relative ai momenti delle forze. L'altalena dell'esercizio precedente ne è un esempio: scegliendo in modo opportuno le distanze tra punti di applicazione delle forze (i bracci) e l'asse di rotazione (che qui spesso si chiama **fulcro**), si può ottenere una sorta di “amplificazione” dell'effetto di una forza. Infatti, supponendo le direzioni delle forze e i bracci ortogonali tra loro (indicheremo con R i moduli delle distanze tra punti di applicazione delle forze e fulcro), ed indicando con i pedici A e B le grandezze relative alle due forze, si ha, per l'equilibrio dei momenti: $F_B = F_A R_A / R_B$. Quindi se il rapporto R_A / R_B è > 1 , si ha $F_B > F_A$. Notate che per una leva “tipo altalena” questa condizione dipende dalla scelta dei punti di applicazione delle forze (cioè, nell'esempio riportato, da dove si siedono i due bambini). Per una leva “tipo schiaccianoci”, invece, questa condizione geometrica è sempre soddisfatta. Infatti, il braccio della forza applicata (dalla mano) è maggiore del braccio della forza “resistente” (esercitata dal guscio della noce, finché non si spacca). Similmente, il “piede di porco” (la famosa leva con cui Archimede voleva sollevare il mondo, a patto di trovare un appoggio per il fulcro che fosse sufficientemente robusto) è una leva vantaggiosa, dato che la distanza rispetto al fulcro a cui è applicata la forza dell'operatore è ben maggiore della distanza a cui si trova la forza resistente (normalmente la forza peso del corpo che si intende sollevare). Una situazione simile, infine, si ha nella carriola del muratore: anche in questo caso il braccio della forza applicata è ben maggiore rispetto a quello della forza resistente.

Oltre che per la realizzazione di numerosi dispositivi di uso comune, le leve, in una grande varietà di configurazioni geometriche, sono anche un componente essenziale nel funzionamento del corpo umano e dei mammiferi in generale. Nei mammiferi, molto spesso le leve non hanno una configurazione che le rende vantaggiose. Ad esempio, l'avambraccio umano è una leva (tipo carriola) in cui il braccio della forza applicata dal bicipite è minore del braccio della forza resistente. In questo ambito, alcune delle diversità di comportamento tra animali “simili” (ad esempio, uomo e scimpanzè) sono proprio dovute alla diversa geometria delle leve impiegate per compiere movimenti sfruttando la forza muscolare (nello scimpanzè il braccio della forza applicata dal bicipite è comparativamente maggiore che non nell'uomo, e quindi lo scimpanzè risulta “più forte” pur avendo una massa muscolare nel bicipite simile a quella dell'uomo - di un uomo massiccio!). Il punto chiave per capire il motivo per cui la natura ci ha dotato anche di leve svantaggiose è che queste permettono di amplificare, se non la forza, almeno lo spostamento: ad una piccola

contrazione del bicipite corrisponde un ampio movimento rotatorio dell'avambraccio, e, sotto questo punto di vista, l'uomo è "avvantaggiato" rispetto allo scimpanzè.

3.12 Cenni di statica e dinamica del corpo rigido (FAC)

Con la definizione di corpo rigido si intendono degli oggetti, dotati di massa e di forma e volume definiti (cioè non sono fluidi e neanche rispondono elasticamente alle sollecitazioni) che hanno dimensioni *non puntiformi*.

L'approccio da seguire idelmente per studiarne statica e dinamica è quello di suddividere idealmente il corpo in tanti piccoli volumetti, così piccoli da poterli considerare praticamente puntiformi. Su ogni volumetto ΔV_i , che ha massa Δm_i , agisce una forza \vec{F}_i . Applichiamo la legge di Newton ad ogni volumetto:

$$\vec{F}_i = \Delta m_i \vec{a}_i, \quad (3.13)$$

dove \vec{a}_i è l'accelerazione del singolo volumetto i -esimo.

Definiamo ora un punto particolare, il cosiddetto **centro di massa** del nostro corpo rigido. Detti \vec{r}_i i vettori posizione dei vari volumetti (ovviamente spiccati da una certa origine del sistema di riferimento, da noi prefissata nello spazio), la posizione del centro di massa \vec{r}_{cm} è definita come:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (3.14)$$

dove la somma \sum_i è eseguita su tutti i volumetti e $m = \sum_i \Delta m_i$ è la massa complessiva del corpo rigido.

Derivando l'Eq.3.14 rispetto al tempo una e due volte si ottengono rispettivamente la velocità e l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{v}_i}{m}, \quad (3.15)$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{a}_i}{m}, \quad (3.16)$$

dove si è sfruttato il fatto che la massa non cambia con il tempo e sono state introdotte le velocità ed accelerazione dei singoli volumetti (rispettivamente \vec{v}_i ed \vec{a}_i).

Ora sommiamo su tutti i volumetti entrambi i membri dell'Eq.3.13. Se teniamo conto che $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$ (cioè la forza complessiva applicata al corpo rigido) è data dalla risultante delle forze i -esime, cioè dalla somma vettoriale di tutte le forze applicate ai vari volumetti, secondo il principio di sovrapposizione), si ha:

$$\vec{F} = \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_{cm}, \quad (3.17)$$

dove abbiamo sfruttato la definizione di Eq.3.16.

Questa lunga e un po' noiosa dimostrazione ha un significato fisico molto importante: infatti, anche se stiamo parlando di un corpo rigido, abbiamo ottenuto un'equazione del tutto analoga alla legge di Newton per un punto materiale. Quindi il moto *traslatorio*⁴⁴ di un corpo rigido si studia individuando un punto specifico, il centro di massa, ed usando per la legge oraria del moto di questo punto le leggi per i corpi puntiformi, prendendo come forza la somma vettoriale di tutte le forze applicate al corpo.

3.12.1 Esercizio: il moto di un tuffatore (FAC)

Un tuffatore si butta da una piattaforma, posta ad altezza h , con velocità iniziale perfettamente orizzontale, di modulo v , per fare un tuffo doppio carpiato. Supponendo che all'istante iniziale, quando il tuffatore lascia la piattaforma, egli sia in posizione perfettamente verticale (non molto verosimile) e che quando arriva in acqua stia a testa in giù, di nuovo in posizione perfettamente verticale (è un campione!), a che distanza orizzontale d dalla piattaforma tocca l'acqua?

Soluzione. Lo studio dettagliato del moto di un tuffatore che si avvita e fa capriole in aria è un problema straordinariamente difficile. Però la domanda del problema è molto circostanziata, e possiamo rispondere adeguatamente. Infatti, sappiamo che il centro di massa del tuffatore si muove come un corpo puntiforme sotto l'azione della gravità. Tenendo conto di quanto ampiamente visto in precedenza per il moto di punti materiali (e, se non ne siete convinti, provate a riottenere questo risultato), si ha che la distanza orizzontale percorsa dal centro di massa nella caduta è $d = v\sqrt{2h/g}$. Notate che, visto quanto suggerisce il testo del problema, questa risposta è direttamente quella cercata. Infatti, dato che la posizione del tuffatore è *verticale* sia all'inizio che alla fine del processo (e che, anche per ragioni intuitive di simmetria, la posizione orizzontale del centro di massa corrisponde alla verticale del tuffatore), i punti di partenza e di arrivo orizzontali del tuffatore corrispondono bene a quelli del suo centro di massa.

3.12.2 Moto rotatorio del corpo rigido (FAC)

Oltre al moto traslatorio, che si esamina prendendo in considerazione la dinamica del centro di massa, un corpo rigido può anche avere un **moto rotatorio**, cioè di rotazione rispetto ad un asse. In questo ambito non entreremo nei dettagli del moto che si ha in questi casi e delle leggi che lo regolano. Ci limitiamo a dire che, in genere, conviene considerare come asse di rotazione un asse che passa per il centro di massa. Così facendo, potremo trascurare ai fini del moto rotatorio quelle forze che sono applicate al centro di massa, dato che esse hanno braccio nullo.

Come esempio, consideriamo un corpo rigido sottoposto all'azione della gravità. Le forze peso che agiscono sui singoli volumetti in cui idealmente suddividiamo il corpo hanno

⁴⁴Il moto di traslazione è l'unico che può essere esibito da un punto materiale. In pratica è il moto di cui abbiamo parlato finora, quello che dà luogo ad una traiettoria costituita da una linea continua. Un corpo rigido può avere anche un moto di rotazione su se stesso, come è ovvio dall'esperienza comune e come accenneremo in seguito.

lo stesso effetto della forza peso complessiva applicata al centro di massa (che in questo contesto si chiama spesso **centro di gravità**, o anche **baricentro**). Quindi, essendo il braccio della forza peso nullo rispetto al centro di massa, non ci sono momenti di forza e quindi non c'è moto rotatorio. L'esperienza comune ci insegna che questo non si verifica sempre: a volte anche una sfera di materiale leggero lasciata cadere nell'aria può ruotare su se stessa, a causa, ad esempio, di forze locali dovute all'attrito viscoso con l'aria che agiscono sulla superficie della sfera stessa, e quindi hanno momento delle forze non nullo⁴⁵.

3.12.3 Esercizio: il rullo compressore

La “ruota” di un rullo compressore, cioè un cilindro di raggio R , si muove su una strada con una velocità lineare costante v . Sapendo che il rullo *rotola senza strisciare*, quanto vale la sua velocità angolare ω e quale forza provoca il momento che tiene in rotazione il rullo?

Soluzione. La condizione di rotolamento senza strisciamento implica che, istante per istante, un punto del rullo si trovi a contatto con la strada *senza strisciarci sopra*. C'è quindi una corrispondenza biunivoca tra punti che appartengono alla circonferenza del rullo e punti della strada. Essendo il moto del rullo compressore rettilineo ed uniforme, in un tempo Δt il centro di massa del rullo⁴⁶ avrà percorso un tratto di strada $\Delta S = v\Delta t$; questo stesso tratto sarà percorso dalla circonferenza del rullo, e poiché il moto avviene in modo costante ed uniforme, la velocità angolare è $\omega = \Delta S/(\Delta t R) = v/R$. Notate che, se il rullo viaggia (spostamento lineare) per esempio “in avanti”, allora lo spostamento angolare è tale che il punto della circonferenza che tocca la strada si sposta all’ “indietro”⁴⁷.

È quindi chiaro che deve esistere una forza che “tira” la circonferenza in verso opposto allo spostamento: tale forza è rappresentata dall'attrito, di tipo *statico*, dato che non c'è strisciamento, che si instaura tra rullo e strada. Quindi si può affermare che è l'attrito statico a far ruotare il rullo senza strisciamento!

⁴⁵**FAC** In questa sede non ci interessiamo di moto rotatorio di un corpo rigido. Ricordiamo comunque, per i soli studenti interessati, che esso è regolato da leggi che hanno un'espressione formale “simile” a quella delle leggi per il moto di un corpo puntiforme. In particolare, il ruolo della massa è “giocato” dal cosiddetto *momento di inerzia* I , grandezza scalare caratteristica del corpo e della scelta dell'asse di rotazione, la cui definizione qui si omette. Stabilito I , allora l'equazione del moto per la rotazione si scrive $\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, dove \vec{M} è il momento delle forze agenti sul corpo, e $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ rappresenta la variazione della sua velocità angolare (vettoriale) nel tempo, cioè la sua *accelerazione angolare*. Infine, il ruolo della quantità di moto \vec{p} è qui preso dalla *quantità di moto angolare*, $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Ripetiamo che questa brevissima sintesi rappresenta solo un richiamo che può essere di qualche utilità per gli studenti interessati al moto rotazionale di un corpo rigido.

⁴⁶Se il rullo è omogeneo ed uniforme, il centro di massa si troverà sull'asse di rotazione, cioè, considerando una sezione del rullo, che sarà una circonferenza, si troverà al centro della circonferenza stessa.

⁴⁷**FAC** Può essere istruttivo considerare la traiettoria compiuta dal punto di contatto tra rullo e strada, cioè considerare dove “va a finire”, con il passare del tempo, il punto che ad un dato istante è stato quello di contatto. Se provate a fare un disegno, vi renderete facilmente conto che tale traiettoria è costituita da una serie di semicirconferenze di raggio pari al doppio del raggio del rullo. Potete anche cercare la forma analitica di questa traiettoria sul piano XY , supponendo che il rullo si muova in direzione X con velocità costante.

Un ruolo simile l'attrito statico lo gioca nella *deambulazione*, cioè nel processo che vi consente di camminare. Quando camminiamo, una forza di attrito si determina tra la suola della scarpa (del piede che rimane fermo, alternativamente il destro e il sinistro, e, poiché il piede è fermo e non striscia sul pavimento, l'attrito è di tipo statico) e il pavimento. Questa forza di attrito è diretta parallelamente al pavimento, ed ha verso che si oppone al moto incipiente del piede. Poiché quando camminate state “spingendo indietro” il piede, la forza di attrito è diretta verso l'avanti, cioè nel verso del vostro spostamento (attenzione: è pur sempre un verso opposto rispetto a quello dello spostamento incipiente del piede!). Quindi si può dire che è proprio l'attrito statico che ci consente di muoverci.

3.12.4 Esempio: equilibrio dei corpi rigidi

Lo studio della statica del corpo rigido richiede ovviamente di considerare le condizioni di equilibrio sia per il moto traslatorio che per quello di rotazione. In sostanza, conviene valutare separatamente l'equilibrio delle forze applicate al centro di massa e quello dei momenti di forza rispetto ad un asse di rotazione passante per il centro di massa stesso.

Facciamo un esempio pratico considerando un solido (rigido) poggiato sul pavimento. Le uniche forze in gioco sono la forza peso, applicata al baricentro, ovvero al centro di massa, e le forze di reazione vincolare che agiscono sulla superficie di appoggio. Per un corpo appoggiato in piano, che è il caso che intendiamo considerare, la reazione vincolare è sempre in grado di equilibrare la forza peso. Questo significa che il corpo non si muoverà verso il basso, cioè non sprofonderà nel pavimento (purché questo sia in grado di sopportare il peso senza rompersi). Per quanto riguarda il moto di rotazione, invece, non è affatto detto che i momenti delle forze si equilibrino “automaticamente” e in ogni caso. Infatti occorre che il momento generato dalla reazione vincolare rispetto al centro di massa abbia verso opposto rispetto a quello generato dalla forza peso. Poiché la reazione vincolare può essere applicata solo all'interno della base di appoggio, occorre che la verticale tracciata dal centro di massa “cada” *all'interno del perimetro della base di appoggio*. Questo spiega l'esperienza comune che ci dice che un corpo il cui asse è fortemente inclinato, cioè in cui la verticale spiccata dal centro di massa cade al di fuori del perimetro della base, tende a ruotare e crollare al suolo (speriamo non succeda alla torre di Pisa). Infatti in queste condizioni la reazione vincolare non è in grado di creare un momento delle forze sufficiente per annullare quello dovuto alla forza peso.