Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2004/05
parte 3

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 3 - 10.12.04

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce dalle lezioni del Modulo di Fisica per il corso di Matematica e Fisica per studenti di STPA (e TACREC), non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario o di scuola media superiore. Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, senza discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Nota importante: a partire dalla Versione 2b, alcune parti del testo, alcuni esercizi ed alcune note a pié di pagina, indicate con il simbolo **FAC** , sono da ritenersi di studio *facoltativo* per gli studenti dei corsi di laurea STPA e TACREC.

Revisioni:

1. Versione 1, 14.09.04: non rilasciata;

2. Versione 2, 18.10.04: cap.1, cap.2 con revisioni sostanziali;

3. Versione 2b, 22.10.04: cap.1, cap.2 con correzioni minori, cap.3; introdotta indicazione delle parti facoltative;

4. Versione 2c, 30.10.04: modifiche minori ai parr.2.4.1, 3.9, 3.10.6 ed altre aggiunte facoltative; aggiunto es.3.10.1; cap. 4;

5. Versione 2d, 08.11.04: correzione di errore di stampa nella soluzione del par.4.7.1; dichiarato FAC il par.4.7.2;

6. Versione 3, 10.12.04: modifiche minori ai parr.3.11, 4.3, 4.9; cap. 5.

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 4

Lavoro, energia, conservazioni

La forza ed i concetti ad essa relativi che abbiamo esaminato nel capitolo precedente costituiscono una base per affrontare lo studio di numerosi fenomeni. In alcuni casi, però, è molto utile servirsi di concetti che si basano su grandezze, quali energia e quantità di moto, che permettono di semplificare la trattazione e di arricchire le possibilità di soluzione di problemi fisici. Questo capitolo è dedicato a questi concetti e alla loro applicazione a vari campi della fisica.

4.1 Lavoro meccanico

Così come la forza, anche il lavoro ha in meccanica una definizione ben precisa, che non è necessariamente coincidente con quella che si dà nel linguaggio comune. Gli "ingredienti" del lavoro sono una forza $\vec{F}$ applicata ad un corpo (generalmente puntiforme, perlomeno per il momento lo consideriamo così) ed uno spostamento $\vec{s}$ compiuto dal corpo per effetto della forza. Supponendo la forza *costante ed uniforme* (cioè che non si modifica durante lo spostamento), la definizione di lavoro è allora:

$$\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{s} \,. \tag{4.1}$$

[1] Nell'Eq.4.1 abbiamo introdotto una nuova operazione vettoriale, il **prodotto scalare**, indicato con "$\cdot$". La proprietà fondamentale di questa operazione è che il suo risultato è uno *scalare*, il cui valore è $|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$ (o, più semplicemente, $Fs\cos\theta$), dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni dei vettori $\vec{F}$ e $\vec{s}$.[2]

[1]**FAC** Per una forza *variabile*, cioè una forza $\vec{F}(\vec{s})$ che dipende dalla posizione del corpo, si ha $\mathcal{L} = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove $d\vec{s}$ rappresenta uno spostamento vettoriale infinitesimo (cioè molto piccolo) e gli estremi di integrazione rappresentano il punto iniziale s_A e finale s_B dello spostamento.

[2]**FAC** Il prodotto scalare tra due vettori generici $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, con componenti cartesiane rispettivamente $(w_{1,x}, w_{1,y}, w_{1,z})$ e $(w_{2,x}, w_{2,y}, w_{2,z})$, è uno scalare $W = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = w_1 w_2 \cos\theta$, con θ angolo compreso tra le direzioni dei due vettori. W si può anche esprimere in funzione delle componenti: si ha $W = w_{1,x}w_{2,x} + w_{1,y}w_{2,y} + w_{1,z}w_{2,z}$. Questo risultato, di cui si omette la dimostrazione, è conseguenza diretta della geometria e delle regole di trigonometria. Esprimendo le componenti dei vettori con $w_{1,i}$ e $w_{2,j}$,

Le dimensioni del lavoro sono quelle di una forza per uno spostamento, cioè Newton per metro, che assume nel sistema mKs il nome Joule (abbreviazione J). Tenendo conto che la forza ha dimensioni di una massa per un'accelerazione, ovvero di una massa per uno spostamento diviso per un tempo al quadrato, il lavoro ha dimensioni di una massa per una velocità al quadrato, cosa che ci tornerà più comprensibile in seguito.

Notiamo che l'operazione di prodotto scalare ha una significativa interpretazione geometrica: in effetti, stante la definizione di proiezione di un vettore ed il ruolo trigonometrico del coseno, il lavoro si ottiene facendo il prodotto algebrico della forza per la proiezione dello spostamento nella direzione della forza (o, che è la stessa cosa, dello spostamento per la proiezione della forza lungo lo spostamento). Se forza e spostamento hanno direzioni ortogonali, il lavoro è nullo (in queste condizioni $\cos\theta = 0$). Ad esempio, le forze di attrito statico responsabili per il rotolamento di un corpo rigido (di cui abbiamo parlato in precedenza) *non compiono lavoro*, essendo nullo lo spostamento da loro prodotto.

Siamo quindi in grado di precisare l'affermazione di prima: ingredienti del lavoro sono forza e *proiezione* (ovvero componente) dello spostamento nella direzione della forza. Notiamo anche che la definizione di Eq.4.1 ci permette di attribuire un segno al lavoro: esso sarà positivo quando spostamento e forza hanno lo stesso verso ($\cos\theta > 0$, cioè $-\pi/2 < \theta < \pi/2$), negativo altrimenti. Nel linguaggio comune, supponendo che il lavoro sia compiuto da un *operatore esterno*, un lavoro positivo significa che l'operatore "fa fatica" per spostare il corpo. Viceversa, per un lavoro negativo l'operatore "riceve" lavoro (cioè, vedremo, *energia*) dal sistema considerato.

4.1.1 Esercizio: lavoro sul piano inclinato

Consideriamo un corpo puntiforme di massa m su un piano inclinato di angolo θ e lunghezza l. Applichiamo al corpo una forza costante parallela al piano, appena appena sufficiente a farlo spostare (ma tale, al limite, da non impartire al corpo una velocità[3]); quanto vale il lavoro $\mathcal{L}$ fatto da questa forza per far percorrere alla massa l'intero piano inclinato? (Si trascuri ogni forza d'attrito; può farvi comodo inoltre fare riferimento alla figura del par.3.4.2)

Soluzione. Secondo quanto stabilito nel testo, la forza applicata è tale da uguagliare la componente della forza peso lungo il piano inclinato. Abbiamo già avuto modo di calcolare tale componente, che vale, in modulo, $mg\sin\theta$. Quindi una forza di verso opposto (che cioè punta verso la sommità del piano) e modulo uguale è applicata al corpo. Ora, poiché lo spostamento (di lunghezza l) ha direzione parallela alla forza stessa, il lavoro vale semplicemente $\mathcal{L} = mg\sin\theta l$.

con i j indici interi che vanno da uno a tre per indicare le componenti cartesiane lungo X, Y, Z, si può scrivere: $W = \Sigma_{i,j} w_{1,i} w_{2,j} \delta_{ij}$, dove la sommatoria va per tutti e due gli indici da 1 a 3 e δ_{ij} è un simbolo che vale uno per $i = j$, e zero altrimenti.

[3] Questa situazione è assai difficile da immaginare: in sostanza la forza applicata è infinitesimamente maggiore della forza che deve essere vinta per spostarlo, cioè la componente della forza peso lungo il piano - vedi soluzione. Lo scopo dell'approssimazione che stiamo applicando è quello di semplificare il problema, visto che non abbiamo ancora introdotto i concetti di energia cinetica e potenziale gravitazionale.

Notate che, per la trigonometria, $\sin\theta l = h$, h essendo l'altezza del punto più alto del piano inclinato rispetto all'orizzontale. Quindi si può anche scrivere $\mathcal{L} = mgh$, risultato che ritroveremo e commenteremo in seguito.

Notate anche che, se la forza fosse maggiore in modulo rispetto a quella qui considerata, il lavoro sarebbe anche maggiore, e la velocità del corpo alla fine dello spostamento sul piano inclinato sarebbe diversa da zero. Anche su questo commenteremo fra breve.

4.2 Energia cinetica

Immaginiamo di avere un corpo puntiforme, di massa m, che può muoversi *senza attrito* su una retta, cosa che ci consente di trattare il problema come unidimensionale, acquistando semplicità nelle notazioni. All'istante $t_0 = 0$ il corpo si trova fermo all'origine del sistema di riferimento con velocità nulla. A partire da questo istante il corpo risente di una forza F, che per semplicità supponiamo costante, uniforme e diretta lungo l'asse X. Per la legge di Newton, questa forza produrrà un'accelerazione $a = F/m$ sul corpo, che quindi si muoverà di moto uniformemente accelerato: $x(t) = (a/2)t^2$. Nelle condizioni sopra specificate, il lavoro vale $\mathcal{L} = Fx(t) = ma(a/2)t^2$, che si può riscrivere come: $\mathcal{L} = (m/2)(at)^2$. Ma nel moto uniformemente accelerato si ha $at = v(t)$, per cui $\mathcal{L} = (m/2)v(t)^2$.

Al prodotto della massa per il quadrato della velocità si dà il nome di **energia cinetica**, che qui abbreviamo con E_{kin}. [4] Le sue dimensioni, massa per il quadrato della velocià, sono "compatibili" con quelli dell'energia, e la sua unità di misura è sempre il Joule. Generalizzando il semplice caso di prima ad un corpo dotato di velocità iniziale v_0, e quindi di un'energia cinetica iniziale $E_{kin}(t_0) = (m/2)v_0^2$, si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v(t)^2 - \frac{m}{2}v(t_0)^2 = E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = \Delta E_{kin} \ . \tag{4.2}$$

A questa equazione, che esprime fondamentalmente, come ribadiremo in seguito, un concetto di conservazione o bilancio tra energie, si dà talvolta il nome di *teorema delle forze vive*, o dell'energia cinetica.

L'Eq.4.2 fornisce una relazione molto importante tra lavoro meccanico ed energia cinetica, una grandezza (*scalare*) che caratterizza un corpo in movimento, stabilendo in pratica che il lavoro meccanico compiuto da una forza su un punto materiale è pari alla sua differenza di energia cinetica. Vedremo nel seguito l'utilità pratica di questa relazione.

4.2.1 Esercizio: la frenata a ruote bloccate rivisitata

Riprendiamo l'esercizio della sezione 3.10.6, risolvendolo come sappiamo fare ora.

Soluzione. Al termine della frenata la velocità dell'auto è $v = 0$, mentre all'inizio era $v_0 = v$. Quindi nel processo che stiamo considerando si ha $\Delta E_{kin} = -(m/2)v^2$.

[4]**FAC** Per completezza, gli studenti che sono interessati allo studio della *dinamica rotazionale del corpo rigido*, potranno notare che, indicando con I il *momento di inerzia* del corpo stesso e con ω la sua velocità angolare, si ha $E_{kin} = (I/2)\omega^2$.

Questa variazione di energia cinetica è realizzata attraverso il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico, che vale $F_{a,d} = mg\mu_d$; essendo la forza di attrito dinamico sempre parallela ed opposta (cioè antiparallela) allo spostamento, si ha $\mathcal{L} = -mg\mu_d d$, dove il segno meno tiene conto del verso antiparallelo dell'attrito e d è la distanza di frenata. Quindi la risposta si trova "con un singolo passaggio" uguagliando lavoro e variazione di energia cinetica: $d = v^2/(2g\mu_d)$.

4.3 Lavoro della forza peso

Valutiamo ora il lavoro $\mathcal{L}_P$ della forza peso, $\vec{F}_P = m\vec{g}$; per iniziare, supponiamo che lo spostamento sia in verticale, cioè che il corpo si sposti, sotto l'azione della forza peso, dalla quota iniziale z_0 ad una quota z. Poniamo $\Delta z = z - z_0$, e supponiamo che l'asse Z sia orientato verso l'alto ($\Delta z > 0$ se lo spostamento avviene verso l'alto, viceversa $\Delta z < 0$ se lo spostamento è verso il basso[5]). Con la nostra scelta dell'orientazione dell'asse Z, l'angolo compreso tra spostamento (positivo se diretto verso l'alto) e forza peso (diretta verso il basso) vale $\theta = \pi$, per cui $\cos\theta = -1$. Il prodotto scalare che compare nella definizione di lavoro diventa allora un prodotto algebrico con un segno negativo, e si ha: $\mathcal{L}_P = -mg\Delta z$. Allora il lavoro è, come deve essere, positivo se il corpo si sposta verso il basso (la forza peso "fa fatica"), negativo altrimenti (ci deve essere un operatore esterno che vince la forza peso e sposta il corpo).

Consideriamo ora uno spostamento che avviene sempre tra le quote z_0 e z, ma secondo una traiettoria arbitraria; si può dimostrare che anche in questo caso il lavoro della forza peso dipende solo dalla variazione di quota, e vale sempre $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} = -mg\Delta z$.[6]

La proprietà che il lavoro meccanico dipende solo da posizione iniziale e finale e non dalla traiettoria dello spostamento indica che la forza che produce il lavoro è **conservativa**: la forza peso, assieme alla forza gravitazionale e a tanti altri tipi di forza (vedremo in seguito qualche esempio) appartiene a questa categoria. Una conseguenza piuttosto eclatante del carattere conservativo di una forza è nel fatto che il lavoro da essa compiuto è nullo quando il punto materiale su cui essa agisce percorre una traiettoria chiusa (per esempio, un'orbita circolare). Infatti per questo tipo di traiettorie il punto iniziale e il punto finale coincidono, e la condizione che il lavoro non dipende dalla traiettoria implica che esso sia nullo.

[5]Tutta questa attenzione agli aspetti formali serve per "far tornare" il segno del lavoro, per ragioni che vi risulteranno ovvie tra breve.

[6]**FAC** Per calcolare il lavoro dobbiamo utilizzare formalmente la definizione di lavoro attraverso l'integrale presentata in una precedente nota. In pratica, possiamo suddividere lo spostamento complessivo in tanti intervallini $\Delta\vec{s}$ e considerare il prodotto scalare tra ognuno di questi intervallini e la direzione della forza peso. A parte il segno (negativo), ognuna di queste operazioni dà la variazione di quota relativa al singolo intervallino, come ci suggerisce la trigonometria. Per ottenere il lavoro complessivo occorre sommare su ogni contributo, ma questa operazione dà come risultato la variazione di quota Δz tra la *posizione finale e quella iniziale*, dimostrando l'affermazione del testo.

4.3.1 Esercizio: velocità e montagne russe

Siete ad un'altezza h (rispetto al suolo) su un impianto di montagne russe. Da questa altezza fate cadere al suolo un carrello delle montagne russe, di massa m, lanciandolo con velocità iniziale nulla. Con che velocità v il carrello arriva al suolo? E quanto vale la velocità se fate arrivare al suolo il carrello facendolo andare sui binari dell'impianto (di cui non conoscete la traiettoria)? Infine, che succede se invece del carrello usate una biglia di acciaio, di massa molto minore del carrello? (Trascurate ogni forma di attrito, cosa non molto ragionevole ma "istruttiva".)

Soluzione. Si tratta di una caduta verso il basso per un dislivello h. Allora il lavoro della forza peso vale $\mathcal{L}_P = mgh$. Questo lavoro fa aumentare l'energia cinetica del carrello, che inizialmente era nulla, essendo nulla la velocità iniziale. Quindi $\mathcal{L}_P = mgh = \Delta E_{kin} = (m/2)v^2$, da cui $v = \sqrt{2gh}$. Provate ad ottenere lo stesso risultato operando con le leggi della cinematica considerando l'azione dell'accelerazione di gravità.

Se il carrello si muove sui binari, purché si supponga nullo l'attrito (che è una forza *dissipativa*, cioè *non conservativa*), il lavoro della forza peso è lo stesso e la velocità di arrivo al suolo non cambia per nulla!. Similmente, non c'è nessun cambiamento se consideriamo una massa diversa (come aveva scoperto già Galileo), dato che la massa sta a moltiplicare sia il lavoro che l'energia cinetica (e quindi "si semplifica" nell'equazione della velocità).

4.4 Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale è una grandezza scalare che indica quanta energia "può essere rilasciata" (tipicamente sotto forma di energia cinetica) da un corpo di massa m che si trova ad una certa quota. Vedete subito che questa definizione contiene un certo grado di indeterminazione: non è chiaro da quale posizione viene misurata la quota (il suolo? il centro della terra? La cima del monte Serra?). Ed infatti si parla sempre, a rigore, di *differenza di energia potenziale gravitazionale.* Essa ha dimensioni di un'energia, si misura ovviamente in Joule e la indichiamo con ΔU_g. Tale differenza è relativa a posizioni (finali ed iniziali) la cui differenza di quota è Δz, con la convenzione sui segni stabilita nel paragrafo precedente.

La differenza di energia potenziale gravitazionale è in effetti definita come $\Delta U_g = -\mathcal{L}_P = mg\Delta z$. Quindi essa dipende linearmente dalla massa, ed è maggiore tanto più alto è il dislivello di quota considerato (intuitivamente, un corpo collocato in alto può liberare un'energia cinetica, cioè raggiungere una velocità durante la caduta, maggiore dello stesso corpo che è collocato, cioè parte, da più in basso). Come già osservato, essa può essere negativa o positiva a seconda che la variazione di quota sia verso l'alto ($\Delta z > 0$) o verso il basso ($\Delta z < 0$).

Anche se quanto abbiamo derivato finora si riferisce in modo specifico alla forza peso, occorre sottolineare che il concetto di energia potenziale si applica anche a numerosi altri casi, in particolare a tutte quelle forze che hanno un carattere conservativo. Vedremo in seguito alcuni altri esempi di energia potenziale, che dà sempre una misura della capacità di un sistema di fornire dell'energia o di compiere del lavoro [7].

4.4.1 Esercizio: lavoro del sollevatore di pesi

Trascurando ogni attrito o dispersione di energia (ipotesi molto poco realistica), quanto vale il lavoro speso per sollevare una massa $m = 100$ Kg al di sopra del busto partendo da terra (si supponga un sollevatore di pesi bassino, cioè un dislivello $h = 1$ m, e che la massa sia ferma all'inizio e alla fine dell'esercizio fisico)?

Soluzione. Il lavoro fatto dal sollevatore deve vincere la forza peso, cioè deve essere opposto (in segno) al lavoro della forza peso: $\mathcal{L} = -\mathcal{L}_P$. Questo significa anche che il lavoro del sollevatore deve essere uguale (segno compreso!) alla variazione di energia potenziale: $\mathcal{L} = \Delta U_g = mgh$. Il risultato numerico dà circa 980 J. Si noti che, avendo trascurato ogni forza dissipativa, il lavoro non dipende dalla traiettoria del peso (il sollevatore vi dirà che non è vero per tante buone ragioni che hanno a che fare con il funzionamento del corpo umano e dei suoi muscoli!).

4.5 Potenziale elettrostatico (FAC)

La strategia che abbiamo seguito per definire ΔU_g può essere adottata anche con altre *forze conservative*. La forza di natura elettrica è una di queste. Abbiamo visto che, tra due cariche, che qui indichiamo con q e Q, poste a distanza relativa $\vec{r}$, si esercita una forza $F_E = \kappa \frac{qQ}{r^2}\hat{r}$. Questa forza non è costante e uniforme (dipende da r), e quindi

---

[7]**FAC** In termini generali, ripetendo quanto fatto con il lavoro della forza peso, si ha, per una generica forza conservativa $\vec{F}(\vec{r})$, che la differenza di energia potenziale tra i punti finale ed iniziale del processo considerato, indicati rispettivamente come fin ed ini, è:

$$\Delta U = -\int_{ini}^{fin} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{fin}^{ini} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}\ , \tag{4.3}$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene invertendo gli estremi di integrazione ed il segno dell'espressione. Nella relazione appena scritta, ricordiano che $\vec{s}$ è uno spostamento vettoriale infinitesimo. Abbiamo quindi scritto una relazione generale "di tipo integrale" che permette di determinare la variazione di energia potenziale quando si considera un certo spostamento in presenza di una data forza. In particolare, se consideriamo una forza $F(x)$ che agisce solo lungo l'asse X ed uno spostamento unidimensionale lungo la direzione X, dal punto x_{ini} al punto x_{fin}, abbiamo: $\Delta U = -\int_{x_{ini}}^{x_{fin}} F(x)dx$. Nella matematica possiamo considerare l'operatore derivata come una sorta di "inverso" dell'integrale. Questo significa che possiamo formalmente stabilire l'operazione inversa, che consente di determinare la $F(x)$ a partire dalla differenza infinitesima di energia potenziale $dU(x)$ tra due punti sull'asse X molto vicini fra loro:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\ , \tag{4.4}$$

espressione che, nel caso di una forza $\vec{F}(\vec{r})$ che agisca lungo più direzioni, diventa: $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$. L'operatore "nabla" (simbolo ∇) appena introdotto ha il significato di un'operazione di derivazione "direzione per direzione", si chiama **gradiente** ed è di uso frequente in elettrostatica.

per calcolare il lavoro fatto dalle forze elettriche $\mathcal{L}_E$, e di conseguenza la **differenza di energia potenziale elettrica**, $\Delta U_E = -\mathcal{L}_E$, dobbiamo usare la relazione integrale per il lavoro che abbiamo visto in nota nel par.4.1. Dobbiamo inoltre individuare uno spostamento; per questa forza è importante la posizione relativa di una carica rispetto all'altra, e conviene immaginare una carica, ad esempio Q *fissa nello spazio*, e supporre che la carica q si sposti da una distanza r_1 ad una distanza r_2. Poiché sappiamo che la forza è conservativa, possiamo scegliere qualsiasi traiettoria per lo spostamento; ovviamente conviene spostarsi lungo la direzione $\hat{r}$, la congiungente le due cariche. Così facendo spostamento e forza sono paralleli, ed il prodotto scalare che compare nella definizione di lavoro diventa un prodotto algebrico ($\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$).

Dunque la differenza di energia potenziale elettrica tra r_1 e r_2 è:

$$\Delta U_E = -\mathcal{L}_E = -\int_{r_1}^{r_2} \kappa \frac{qQ}{r^2} dr = \kappa \frac{qQ}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \kappa qQ(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) \tag{4.5}$$

(gli ultimi due passaggi richiedono la conoscenza dell'operazione di *integrazione definita* della funzione $1/r^2$).[8]

Si noti che il segno dell'espressione ΔU_E dipende dai segni delle cariche considerate. Per capire il significato di questa affermazione facciamo un esempio in cui prendiamo due cariche di segno opposto, che quindi tendono ad avvicinarsi. Se supponiamo, per esempio, $r_2 > r_1$, cioè le cariche si sono allontanate nel processo considerato, allora il termine fra parentesi nell'ultimo membro dell'Eq.4.5 è negativo. Però, dato che le cariche hanno segno opposto (e quindi il termine qQ è minore di zero), la variazione di energia potenziale risulta positiva, ovvero l'energia è più alta alla distanza r_2. Questo è coerente con il fatto che le cariche tendano ad avvicinarsi (se le allontaniamo l'energia aumenta).

In elettrostatica riveste, come vedremo, un ruolo di primaria importanza il **potenziale elettrostatico**, una grandezza *scalare* strettamente legata alla differenza di energia potenziale elettrica. In pratica, la *differenza* di potenziale elettrostatico creata dalla carica Q tra le posizioni r_1 ed r_2, che indichiamo con $\Delta\phi$, si ottiene dividendo la differenza di energia potenziale ΔU_E per la carica q:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta U_E}{q} = \kappa Q(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) \ . \tag{4.6}$$

Notate che l'operazione di divisione per una carica che abbiamo appena compiuto è formalmente analoga a quella che abbiamo applicato per definire il *campo elettrico* a partire dalla forza di natura elettrica. In pratica, quindi, se adottiamo la procedura descritta per trovare la differenza di energia potenziale a partire dalla forza elettrica al *campo elettrico* troviamo come risultato la *differenza di potenziale elettrostatico*.

A differenza che nel caso gravitazionale, in elettrostatica ha *spesso* senso riferire le distanze rispetto ad un punto preciso. Questo punto si trova idealmente all'infinito[9].

[8] Ricordate che, in generale, la *primitiva* della funzione x^n (con n numero intero) vale $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, cioè per l'integrale *indefinito* si ha: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Il risultato del testo si ottiene prendendo come funzione x la r e ponendo $n = -2$.

[9] In termini matematici si tratta di eseguire un passaggio al limite per $r \to \infty$.

In particolare, se nel caso che stiamo esaminando "portiamo r_1 all'infinito", il termine $1/r_1 \rightarrow 0$, e quindi otteniamo una funzione che dipende *solo* da r_2. Possiamo allora definire una funzione scalare che si chiama *potenziale elettrostatico*. Ponendo l'origine del sistema di riferimento sulla carica Q e chiamando R la distanza dall'origine (in pratica cambiamo nome ad r_2 e lo chiamiamo R, dato che non c'è più ragione di tenere il pedice), si ottiene una funzione scalare della posizione, che indichiamo, ovviamente, con $\phi(R)$:

$$\phi(R) = \kappa \frac{Q}{R} \,. \tag{4.7}$$

Questa relazione esprime il potenziale elettrostatico della carica *puntiforme* Q posta nell'origine del sistema di riferimento; come atteso, la funzione tende a zero per $R \rightarrow \infty$ "come $1/R$", ed il suo segno dipende da quello della carica Q.

Riassumendo, si ha allora che la differenza di potenziale tra le posizioni (le indichiamo come vettori generici) $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ è: $\Delta\phi = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{r} dr$, avendo indicato con $\hat{r}$ il versore della direzione congiungente i punti $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. L'operazione "inversa" che permette di dedurre il campo $\vec{E}(\vec{r})$ a partire dalla *funzione* potenziale elettrostatico $\phi(\vec{r})$ è allora, come descritto in una precedente nota: $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, con ∇ operatore di *gradiente*.

Le dimensioni della differenza di potenziale e del potenziale elettrostatico son quelle di un'energia diviso per una carica, cioè J/C. Nel sistema mKs a questa unità di misura si dà il nome (assai familiare) di Volt (simbolo V). Per definizione, la differenza di potenziale di 1 V fa acquistare ad una carica di 1 C un'energia di 1 J.

4.5.1 Esercizio: velocità di un elettrone

Un protone (carica q =1.6×10^{-19} C, massa $m = 1.6 \times 10^{-27}$ Kg) si muove in una regione con una differenza di potenziale elettrostatico $\Delta\phi = -10$ KV (sembra un valore enorme, ma è simile a quanto si trova in un tubo catodico di televisore). Di quanto aumenta la sua velocità?[10]

Soluzione. Il lavoro delle forze di natura elettrica fatto sul protone vale $\mathcal{L}_E = -q\Delta\phi$; questo lavoro (che risulta positivo) serve per aumentare l'energia cinetica: $\mathcal{L}_E = -q\Delta\phi = \Delta E_{kin} = (m/2)(v^2 - v_0^2)$. Se, per semplicità, supponiamo nulla (o trascurabile, che, dal risultato numerico, capiremo essere ipotesi ragionevolissima) la velocità iniziale del protone, v_0, otteniamo: $v = \sqrt{2q\Delta\phi/m}$. Il risultato numerico dà $v \approx 1.4 \times 10^6$ m/s.

4.6 Energia elastica

La forza elastica, che, come abbiamo visto nel capitolo precedente, nel caso unidimensionale si scrive $F_{ela} = -k\Delta x$ (avendo considerato il moto lungo l'asse X, essendo k la costante elastica e $\Delta x = x - x_0$, con x_0 posizione di riposo della molla), è un altro esempio

[10]Notate che in questo esercizio non c'è una coppia di cariche, e non abbiamo detto come si genera la differenza di potenziale. Infatti i concetti che stiamo usando sono generali e prescindono dalla situazione fisica con le due cariche che abbiamo impiegato per introdurre il potenziale elettrostatico.

di forza conservativa, per cui possiamo definire una differenza di energia potenziale elastica ΔU_{ela} tra le posizioni x_1 ed x_2 a partire dal lavoro $\mathcal{L}_{ela}$ che la forza elastica compie nello spostamento. Si ha, in pratica, $\Delta U_{ela} = -\mathcal{L}_{ela}$.

Il calcolo del lavoro della forza elastica è formalmente più complesso che non nel caso della forza peso. Infatti la forza elastica non rimane costante nello spostamento, e quindi bisogna impiegare la definizione generale di lavoro meccanico per forze non uniformi, che richiede la soluzione di un integrale. Il risultato, che viene commentato in nota, è:

$$\Delta U_{ela} = -\mathcal{L}_{ela} = \int_{x_1}^{x_2} k\Delta x dx = \frac{k}{2}((x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2) \ . \tag{4.8}$$

[11] Nell'esercizio che discuteremo in seguito vedremo come questo risultato possa essere ottenuto anche per via "fisica", cioè ragionando sulle caratteristiche del moto oscillatorio dovuto alla forza elastica, e sulla *conservazione dell'energia*. Anche in questo caso è possibile definire un'**energia potenziale elastica** riferendo le posizioni alla posizione di riposo della molla, x_0. In pratica, quindi, facciamo coincidere x_1 con x_0 e chiamiamo x la variabile x_2, non essendoci più bisogno di pedici. Si ottiene quindi $U_{ela} = (k/2)(x - x_0)^2$. Come si vede questa funzione dipende *quadraticamente* da $(x - x_0)$, e quindi è indifferente se la molla si estende o si comprime (purché, ovviamente, estensione o comprensione siano della stessa entità).

4.6.1 Esercizio: velocità della "molla"

Una massa m è attaccata ad una molla di costante elastica k, il cui altro capo è vincolato ad una parete. La molla ha il suo asse orizzontale, e la forza peso non fa effetto sulla dinamica del sistema. Inizialmente la massa viene spostata in modo che la compressione della molla vale Δ, e quindi viene rilasciata con velocità nulla. La massa comincia a muoversi. Quanto vale la sua velocità quando passa per la posizione di riposo della molla? (Trascurate la massa della molla e ogni forma di attrito)

Soluzione. In questo esercizio ci sono due energie, o variazioni di energia, da considerare: l'energia cinetica e quella elastica. All'inizio la massa è ferma, e quindi l'energia cinetica è nulla, mentre l'energia elastica è massima, e vale $(k/2)\Delta^2$. Quando la massa passa per la posizione di riposo della molla, l'energia elastica è ovviamente nulla, mentre l'energia cinetica è massima e vale $(m/2)v^2$. La risposta si ottiene uguagliando le due energie, da cui $v = \sqrt{k/m}\Delta$. [12]

[11] **FAC** Anche per il calcolo di questo integrale occorre ricordare la *primitiva* della funzione x^n, che vale, come già ricordato, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

[12] **FAC** La discussione di questo problema si presta anche per determinare per via "fisica" l'energia potenziale elastica. Supponiamo di non avere processi *dissipativi*, cioè di non avere forze di attrito. Questo ci consente di utilizzare il concetto di *conservazione dell'energia totale*, che presenteremo formalmente tra breve. In sostanza, come abbiamo già affermato, in qualsiasi istante del moto del corpo la somma di energia cinetica ed energia potenziale elastica deve essere costante, e pari al valore massimo dell'energia elastica (che in questa derivazione che stiamo affrontando ora è un'incognita), il valore che si ha quando la massa raggiunge la massima ampiezza di oscillazione e la velocità, ovvero l'energia cinetica, è nulla.

4.7 Conservazione dell'energia

Il concetto di conservazione dell'energia è fondamentale per la comprensione di una varietà di fenomeni, non solo di natura meccanica. In realtà abbiamo già ampiamente utilizzato questo concetto, specie per la soluzione degli esercizi. Possiamo ora enunciarlo così: in un dato processo, *la somma algebrica delle variazioni di energia deve essere uguale al lavoro fatto dall'esterno sul sistema*. Nell'applicare questo concetto, spesso definito come *principio*, occorre porre attenzione ad individuare correttamente il lavoro fatto dall'esterno sul sistema, in particolare per quanto riguarda il segno, come vedremo per l'attrito nel prossimo esercizio. Inoltre, come conseguenza di quanto enunciato, possiamo affermare che, quando non ci sono forze di attrito, cioè non ci sono processi *dissipativi*, allora la somma di energia cinetica ed energia potenziale (di qualsiasi tipo) resta *costante nel moto*[13]

4.7.1 Esercizio: il giro della morte

Consideriamo ancora un impianto di montagne russe, e supponiamo che nel suo tracciato sia previsto un "giro della morte". Immaginiamo che tutte le forme di attrito siano trascurabili, che il raggio della circonferenza su cui si svolge (sperabilmente) il giro della morte sia R, e che la massa del carrello sia m. Quanto deve valere la velocità v_0 che il carrello deve avere alla base del giro della morte (cioè all'ingresso della circoneferenza) affinché non cada[14] mentre percorre la circonferenza stessa?

Soluzione. Cominciamo con il notare che, affinché il carrello possa percorrere la circonferenza del giro della morte, occorre che ci sia una forza centripeta, diretta radialmente verso il centro della circonferenza, e di modulo pari a $F_C = m\omega^2 R$; ω è la velocità angolare del moto, che è legata alla velocità lineare (tangenziale) v attraverso la relazione $\omega = v/R$, per cui, sostituendo, si può scrivere $F_C = mv^2/R$. Notate che non stiamo assumendo che

Allora deve essere $U_{ela,max} = E_{kin,max}$, avendo indicato con $E_{kin,max}$ il massimo valore dell'energia cinetica, che si ha quando la velocità è massima, cioè quando la massa passa per l'origine. Ricordiamo ora l'espressione della velocità $v(t)$ per un moto oscillatorio quale quello che stiamo considerando, cioè con le sue specifiche condizioni iniziali (ampiezza massima dell'oscillazione, cioè posizione iniziale, pari a Δ, velocità iniziale nulla): si ha $v(t) = -\omega\Delta \sin^2(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{k/m}$. D'altra parte, il massimo dell'energia cinetica si ha negli istanti in cui la velocità è massima, cioè la funzione seno vale uno, e allora $v_{max} = -\omega\Delta$ ed $E_{kin,max} = (m/2)v_{max}^2 = (k/2)\Delta^2$, avendo esplicitato il valore di ω. Dunque, $U_{ela,max} = E_{kin,max} = (k/2)\Delta^2$, e poiché il massimo dell'energia elastica si ha quando $x(t) = \Delta$, possiamo concludere che, in generale, l'energia potenziale elastica ha espressione $U_{ela} = (k/2)x^2$, come volevamo "dimostrare".

[13] In realtà la definizione di processo *dissipativo* ha proprio a che fare con questa osservazione: un processo dissipativo è proprio un processo in cui parte dell'energia "si dissipa", e quindi essa non è più ripartita solo tra forma cinetica e forma potenziale. Le forze di attrito, come sarà visto anche nell'esercizio seguente, sono ottimi esempi di forze *non conservative*, che danno luogo a dissipazione di energia. Notate che, a causa di processi microscopici che coinvolgono i concetti di calore e temperatura, molto spesso la dissipazione di energia implica un riscaldamento del corpo che si sta considerando.

[14] Stiamo supponendo che il carrello non sia vincolato alla guida in modo da impedire, sempre e comunque, la caduta; le regole di sicurezza imporrebbero di installare dei sistemi appositi per evitare incidenti!

il moto sia circolare uniforme, dato che la velocità può (anzi, deve, come vedremo fra breve) cambiare istante per istante; tuttavia le relazioni che abbiamo scritto sono ancora valide, a patto di considerare i valori istantanei delle velocità.

Per percorrere il giro della morte, occorre che il carrello arrivi al punto più alto della circonferenza (che si trova ad una quota $h = 2R$ rispetto al suolo, essendo pari al diametro della circonferenza) con una velocità sufficientemente alta, come ci suggerisce anche l'esperienza comune. Chiamiamo v_{alto} il modulo della velocità del carrello nel punto più alto della circonferenza. Quando si trova nel punto più alto, la forza peso del carrello, che ha direzione verticale, e quindi radiale verso il centro per questo punto particolare, gioca il ruolo della forza centripeta. Dunque deve essere, per i moduli, $F_P = F_C$, cioè $mg = mv_{alto}^2/R$, ovvero, risolvendo, $v_{alto} = \sqrt{gR}$. Notate che questo valore è il minimo ammissibile perché il carrello non cada: se la velocità fosse maggiore, allora alla forza centripeta potrebbe contribuire la reazione vincolare esercitata dai binari, ma se la velocità fosse minore, non ci sarebbe modo di avere una sufficiente forza centripeta, ed il carrello cadrebbe.

D'altra parte, il moto avviene in assenza di attriti o altre forze dissipative, per cui l'energia meccanica totale E_{tot}, cioè la somma di energia potenziale gravitazionale ed energia cinetica, è una costante del moto. All'ingresso della circonferenza, cioè a quota zero (rispetto al suolo), possiamo porre l'energia potenziale pari a zero, per cui, con i dati del problema: $E_{tot} = (m/2)v_0^2$. Nel punto più alto della circonferenza, invece, l'energia potenziale gravitazionale rispetto al suolo vale mgh, e quindi $E_{tot} = (m/2)v_{alto}^2 + 2mgR$. Uguagliando le due espressioni di E_{tot} riferite alle due diverse posizioni troviamo un legame tra v_0 e v_{alto}: $v_{alto}^2 = v_0^2 - 4gR$. Sostituendo questo valore nella relazione trovata in precedenza a proposito della forza centripeta e forza peso, si ha che, al minimo, deve essere $v_0 = \sqrt{5gR}$; per valori della velocità iniziale minori di questo, il carrello è destinato a cadere, per valori maggiori il giro della morte può essere compiuto completamente.

4.7.2 Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico (FAC)

Un corpo puntiforme di massa m arriva con velocità v alla base di un piano inclinato di altezza h e lunghezza l. Sapendo che il corpo scivola (non rotola) sul piano e che il coefficiente di attrito dinamico vale μ_d, qual è la distanza d percorsa dal corpo sul piano inclinato prima di fermarsi?

Soluzione. Alla base del piano inclinato il corpo possiede un'energia cinetica $E_{kin,0} = (m/2)v^2$, che diventa zero alla fine, quando il corpo si ferma, per cui $\Delta E_{kin} = -(m/2)v^2$. Detta h' l'altezza raggiunta dal corpo, la variazione di energia potenziale gravitazionale vale $\Delta U_g = mgh'$. Ora notiamo che, per ragioni di similitudine geometrica, si ha $d = lh/h'$ (si faccia anche riferimento alla figura del par.3.4.2), per cui il lavoro della forza di attrito dinamico (una forza "esterna" rispetto al corpo) fatto durante il movimento del corpo vale $\mathcal{L}_{a,d} = -N\mu_d d$ (notate il segno meno, che tiene conto del fatto che la forza di attrito ha verso opposto allo spostamento). Resta da calcolare la reazione vincolare N, che, come già discusso in altri esercizi, ha modulo uguale alla proiezione della forza peso in direzione ortogonale al piano: $N = mg\cos\theta$, θ essendo l'angolo tra il piano e l'orizzontale. Dai dati geometrici del problema e dalla trigonometria possiamo calcolare $\cos\theta = l/\sqrt{l^2-h^2}$, da cui $\mathcal{L}_{a,d} = -mg\mu_d ld/\sqrt{l^2-h^2}$. A questo punto applichiamo la conservazione dell'energia: $\Delta E_{kin} + \Delta U_g = \mathcal{L}_{a,d}$, cioè:

$$-\frac{m}{2}v^2 + mg\frac{h}{l}d = -mg\mu_d\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}d\ , \tag{4.9}$$

da cui si risolve per d:

$$d = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g\frac{h}{l} + g\mu_d\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}}\ . \tag{4.10}$$

Dato che la questione dei segni è parecchio delicata (qui e sempre), conviene fare una verifica basata sul buon senso. Quindi provate a vedere cosa succede al risultato se cambiate i parametri (per esempio, se la velocità iniziale cambia, o se annulate l'attrito, o anche se modificate i parametri geometrici). Se le cose non vanno "come vi aspettate", ricontrollate il procedimento!

Notate anche con attenzione che in questo esercizio la presenza di una forza di attrito, e del lavoro *dissipativo* ad essa associato, fa sì che la somma di energia cinetica e potenziale non rimane costante durante il processo. Fosse stato così, allora il problema avrebbe avuto una soluzione più semplice, formalmente la stessa del piano inclinato senza attrito che abbiamo già affrontato in precedenza. Chiaramente, inoltre, la presenza della forza di attrito produce effetti che dipendono dallo spazio percorso sul piano inclinato, e non solo dalla differenza di quota sperimentata dal corpo. Infatti, la forza di attrito è *non conservativa*, e dunque il lavoro che essa fa in uno spostamento qualsiasi dipende dalla particolare traiettoria dello spostamento stesso.

4.7.3 Esempio: dissipazione di energia nelle oscillazioni smorzate (FAC)

Consideriamo un oscillatore armonico costituito da una massa m attaccata ad una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Supponiamo il moto unidimensionale, diretto lungo X. In assenza di smorzamento, la soluzione del moto con le condizioni iniziali $x_0 = x_i$ e $v_0 = 0$ è, come visto nel capitolo precedente: $x(t) = x_i\cos(\omega t)$, mentre la legge oraria della velocità è $v(t) = dx(t)/dt = -\omega x_i \sin(\omega t)$. Energia cinetica ed energia potenziale elastica sono, ovviamente, funzione del tempo: in particolare è $E_{kin}(t) = (m/2)v(t)^2 = (m/2)\omega^2 x_i^2\sin^2(\omega t)$ e $U_{ela}(t) = (k/2)x_i^2\cos^2(\omega t)$. L'energia totale E_{tot}, cioè la somma di energia cinetica ed energia potenziale, è:

$$E_{tot} = \frac{x_i^2}{2}(m\omega^2\sin^2(\omega t) + k\cos^2(\omega t)) = \frac{x_i^2}{2}k(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))\ , \tag{4.11}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo ricordato che $\omega^2 = k/m$. Ora, la trigonometria stabilisce che la somma dei quadrati di seno e coseno fa sempre uno, e quindi l'energia totale è *costante nel tempo*, e vale $E_{tot} = (k/2)x_i^2$. Notate che questo valore equivale all'energia potenziale elastica all'istante iniziale: infatti, all'inizio la velocità è nulla, e quindi l'energia è solo elastica. Durante l'evoluzione temporale del sistema, l'energia elastica si converte in energia cinetica (e viceversa): per esempio, come abbiamo giòsservato, quando la massa passa per la posizione di riposo della molla, $x = 0$ per come abbiamo scelto il sistema di riferimento, l'energia si è trasformata interamente in energia cinetica, che qui assume il suo valore massimo.

Nel capitolo precedente abbiamo stabilito che, in presenza di un attrito viscoso, le oscillazioni sono smorzate nel tempo, e la soluzione diventa (con le stesse condizioni iniziali citate prima): $x(t) = x_i \exp(-\gamma t)\cos(\omega t)$, con $\gamma = \beta/m$. Questo significa che, periodo dopo periodo, l'ampiezza dell'oscillazione si riduce esponenzialmente nel tempo, e di conseguenza l'energia elastica massima (quella che si ha quando la velocità si annulla, cioè quando si raggiungono i punti estremi dell'oscillazione) non rimane costante. Si ha infatti: $U_{ela}(t) = (k/2)x_i^2 \exp(-2\gamma t)$, dove abbiamo usato la proprietà della funzione esponenziale $(\exp(\alpha))^2 = \exp(2\alpha)$, con α costante generica. Allora anche l'energia totale deve diminuire nel tempo, con l'andamento $\exp(-2\gamma t)$, cioè deve esistere un meccanismo di dissipazione dell'energia. In altre parole, l'energia totale non si conserva nel processo, perché viene in parte dissipata a causa della presenza del termine di attrito viscoso nell'equazione del moto.

4.8 Il primo principio della termodinamica

Come vedremo in seguito, la termodinamica si occupa di processi in cui la *temperatura* gioca un ruolo di rilievo. La temperatura ha un legame stretto (spesso direttamente proporzionale) con l'energia ed il lavoro, come è anche suggerito da numerosi fenomeni che ben conoscete (ad esempio, se strisciate la mano su una superficie la sentite riscaldare proprio per effetto del lavoro fatto dall'attrito).

In ambito termodinamico il trasferimento di energia da un corpo ad un altro si dice passaggio di **calore**. Quindi il calore, che indichiamo con il simbolo Q[15], non è altro che una "forma di energia", da considerare nel principio di conservazione. Come le altre variazioni di energia, anche il calore ha un segno: la convenzione è $Q > 0$ se il calore *viene acquistato dal sistema*, $Q < 0$ se *viene ceduto*. Inoltre, normalmente, per scrivere la conservazione di energia che è alla base del primo principio della termodinamica, si considera il lavoro $\mathcal{L}$ *fatto dal sistema* sull'esterno. Tale lavoro ha generalmente *segno opposto* rispetto al lavoro di un operatore esterno, come abbiamo considerato finora in questo capitolo.

Con queste precisazioni, detta ΔU la variazione di *energia interna* del sistema, il primo principio della termodinamica recita:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U \ . \tag{4.12}$$

Torneremo in un prossimo capitolo a discutere brevemente le conseguenze del primo principio della termodinamica in alcune situazioni fisiche.

[15]La corretta unità di misura per il calore è il Joule, ma talvolta si usa ancora la caloria, simbolo cal. L'equivalenza fra le due unità di misura è: 1 cal = 4.186 J.

4.8.1 Esercizio: mangiare e faticare

La vostra massa è $m = 60$ Kg e dovete salire a piedi in cima a un grattacielo alto $h = 150$ m. Supponendo (in modo assolutamente irrealistico) che l'energia da voi consumata nella salita vi sia fornita da biscottini farciti, ognuno con un potere calorico $\Delta Q = 5$ KJ e che l'energia dei biscottini serva solo per farvi salire le scale, quanti biscottini dovete mangiare per avere la forza di arrivare in cima? (Trascurate ogni attrito ed ogni dissipazione di energia!)

Soluzione. Dovete fare un lavoro pari all'aumento di energia potenziale gravitazionale: $\mathcal{L} = mgh$.[16] L'energia associata a questo lavoro, secondo il testo del problema, è data dai biscottini, che vi forniscono complessivamente un'energia $Q = \mathcal{L}$. Detto n il numero di biscottini, deve essere $n\Delta Q = Q = \mathcal{L} = mgh$. Numericamente esce $\mathcal{L} \approx 9$ KJ: quindi meno di due biscottini sarebbero sufficienti. Notate, comunque, che il problema è molto poco realistico. In primo luogo il nostro corpo non è una macchina perfetta, ma presenta vari tipi di attriti e dissipazioni di energia che "consumano" parte delle calorie acquisite. Inoltre, a parte che per alimentare continuamente le funzionalità di base del nostro corpo (cuore, polmoni, cervello, etc.), le calorie che acquistiamo servono in gran parte, nel complesso meccanismo metabolico, a mantenere costante la nostra temperatura. Quindi abbiamo un rilevante termine ΔU che abbiamo trascurato (fortuna, altrimenti saremmo tutti ampiamente sovrappeso!).

4.9 Potenza

La potenza W (ancora un termine di vasto uso comune) è definita come il *lavoro compiuto in un intervallo di tempo* (ovvero, il lavoro compiuto nell'unità di tempo, un secondo nel sistema mKs):

$$W = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} . \tag{4.13}$$

Notate che questa espressione, a rigore, fornisce un valore di potenza mediato nel tempo, cioè che essa è valida per una variazione di lavoro che non dipende dal particolare intervallo di tempo considerato [17][18].

[16] Se preferite, potete considerare questo come un aumento della vostra energia interna, anche se una simile impostazione crea qualche confusione, come capirete meglio in seguito, ed è sconsigliata.

[17] **FAC** Come già ampiamente visto con altre grandezze, la definizione di potenza prevede in realtà un passaggio al limite per $\Delta t \to 0$, con conseguente operazione di derivata, per cui formalmente si ha $W = \frac{d\mathcal{L}}{dt}$. Il passaggio inverso prevede un'integrazione: $\mathcal{L} = \int_1^2 W(t)dt$. Notate che, se W non dipende dal tempo, si ha semplicemente $\mathcal{L} = W\Delta t$, come vedremo nel prossimo esercizio.

[18] **FAC** Ricordate che, essendo $\vec{s}$ lo spostamento del punto materiale considerato, la definizione di lavoro meccanico è $\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Se la forza $\vec{F}$ è *costante nel tempo*, allora, applicando l'operazione di derivata temporale che serve per determinare la potenza, si ha $W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, dove la forza, essendo costante, è stata "tirata fuori" dall'operazione di derivata e si è usata la definizione di velocità (vettoriale) $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$. Quindi, nel caso di forza costante che faccia muovere il punto materiale con velocità $\vec{v}$, la potenza è data dal prodotto scalare tra forza e velocità.

Le dimensioni della potenza sono quelle di un lavoro su un tempo, e all'unità di misura corrispondente si dà nel sistema mKs il nome di Watt, simbolo W (unità la cui esistenza è ben familiare a tutti).

4.9.1 Esercizio: potenza e velocità

Un'automobile di massa $m = 10^3$ Kg è spinta da un motore di potenza *costante* $W = 100$ KW (corrispondono a circa 130 Cv, unità tradizionale per la potenza, ancora in uso in ambito motoristico). Inizialmente l'auto è ferma, e quindi accelera per effetto del motore per un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ s percorrendo un tratto di strada in piano. Trascurando ogni attrito, quanto vale la velocità finale v dell'automobile?

Soluzione. Il lavoro compiuto dal motore vale $\mathcal{L} = W\Delta t$. Questo lavoro serve per aumentare l'energia cinetica da zero (all'inizio l'auto è ferma) fino al valore finale $(m/2)v^2$. Quindi, per la conservazione dell'energia: $W\Delta t = (m/2)v^2$, da cui $v = \sqrt{2W\Delta t/m}$. Il risultato numerico dà $v \approx 45$ m/s, cioè circa 160 Km/h! Nella realtà, per fortuna, l'accelerazione di un'auto di questa potenza è meno bruciante per vari motivi, quali l'attrito e le dissipazioni, la difficoltà di trasferire a terra la potenza (ogni sgommata dissipa energia in calore) e il fatto che un motore (a scoppio) non ha potenza sempre costante[19].

4.10 Quantità di moto

La quantità di moto, che indichiamo con $\vec{p}$, è una grandezza *vettoriale* la cui introduzione non comporta nuove leggi fondamentali, ma che, soprattutto per il suo principio di conservazione, può essere utile nella comprensione di una vasta classe di problemi e fenomeni. In particolare, ci sono delle situazioni fisiche in cui l'interazione tra corpi avviene tramite forze di *intensità rilevante e durata temporale molto ridotta* (**forze impulsive**), come ad esempio negli urti e collisioni tra corpi rigidi. In queste situazioni fisiche, come vedremo fra breve, ragionare in termini di quantità di moto (e della sua conservazione) rende semplice l'interpretazione dei fenomeni.

La definizione di partenza per la quantità di moto di un corpo dotato di massa m e velocità $\vec{v}$ è:

$$\vec{p} = m\vec{v} \; . \tag{4.14}$$

Le dimensioni sono quelle di una massa per una velocità; non esiste un'unità di misura dedicata per questa grandezza, per cui si usano i Kg m/s.

Supponiamo ora di avere un processo che coinvolge un corpo con massa costante, nel quale vogliamo conoscere la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}$; ricordando che, per definizione della cinematica, $\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$ e che la legge di Newton stabilisce $\vec{F} = m\vec{a}$, si ha: $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m\vec{a}\Delta t = F\Delta t$. Pertanto, la variazione di quantità di moto di un corpo è

[19] **FAC** Fate attenzione al fatto che una potenza costante non implica una forza costante. Infatti, se provate a risolvere questo esercizio esprimendo il lavoro come prodotto di forza e spostamento, e dall'accelerazione ottenuta dalla forza provate a dedurre la velocità, potreste trovare un risultato diverso (ed errato). Provate!

pari al prodotto della forza su di esso applicata per la durata temporale dell'applicazione[20]. A quanto appena affermato si dà spesso il nome di *teorema dell'impulso*.

4.10.1 Conservazione della quantità di moto

Supponiamo di avere due corpi di massa m_1 e m_2 che interagiscono *solo* fra di loro, per esempio tramite un urto. Chiamiamo $\vec{F}_{1,2}$ la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1, e $\vec{F}_{2,1}$ quella esercitata dal corpo 1 sul corpo 2. Per il principio di azione e reazione (il terzo principio della dinamica), queste due forze sono *uguali e opposte* in verso. Allora, se prendiamo in considerazione le variazioni delle quantità di moto dei due corpi e chiamiamo Δt la durata temporale dell'interazione, sarà:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{1,2}\Delta t = -\vec{F}_{2,1}\Delta t = -\Delta\vec{p}_2 \ , \tag{4.15}$$

cioè le variazioni di quantità di moto sono *uguali e opposte* in verso.

A questo punto possiamo definire la quantità di moto *totale* del sistema: $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. La variazione della quantità di moto totale è allora $\Delta\vec{p}_{tot} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$. Quindi *la quantità di moto totale si conserva* nel processo.

Notate che, anche se per la dimostrazione ci siamo serviti di due corpi (ed abbiamo immaginato un'interazione collisionale), il risultato trovato è ben più generale: in ogni sistema **isolato**, cioè in cui le forze si esercitano solo tra i suoi componenti (non ci sono forze esterne), la quantità di moto totale si conserva *come vettore*, a prescindere da come è realizzato il sistema[21].

4.10.2 Esercizio: il rinculo

Un tiratore al piattello spara un proiettile di massa $m_p = 4$ g che lascia il fucile con velocità $v = 250$ m/s. Sapendo che l'insieme dei processi chimico-fisici che portano all'espulsione del proiettile (percussione della cartuccia, esplosione, sparo, etc) avvengono in un intervallo di tempo $\Delta t = 50$ ms, quanto vale in modulo la forza F di rinculo sulla spalla del tiratore?

Soluzione. Il sistema costituito da proiettile e fucile può essere considerato un sistema isolato ai fini del processo di sparo. La quantità di moto totale all'inizio vale zero, dato che sia proiettile che fucile sono fermi. Pertanto la quantià di moto totale *subito dopo lo sparo* deve anche essere nulla, cioè $0 = \vec{p}_p + \vec{p}_f$, avendo indicato con $\vec{p}_p = m_p\vec{v}_p$ la quantità

[20] Abbiamo qui supposto una massa costante. Se così non fosse, sarebbe $\Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) \neq m\Delta\vec{v}$. Tenete presente, comunque, che il principio di conservazione che stiamo per enunciare vale *anche per corpi a massa variabile*, e ne faremo uso in questo senso in uno dei prossimi esercizi.

[21] **FAC** Esiste un'altra conseguenza notevole della conservazione della quantità di moto totale. In precedenza abbiamo definito il centro di massa, il cui vettore posizione $\vec{r}_{cm}$ è definito come: $\vec{r}_{cm} = \Sigma_i \Delta m_i \vec{r}_i / m$. Derivando ambo i membri, e generalizzando a più di due corpi la quantità di moto totale definita prima, vediamo che $\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \vec{v}_{cm} = \vec{p}_{tot}/m$, dove m è la massa complessiva del sistema. Allora, a patto che la massa complessiva del sistema resti costante e che il sistema sia *isolato*, cioè, ripetiamo, non ci siano forze esterne al sistema stesso, la *velocità del centro di massa* si comporta come la quantità di moto totale, cioè *resta costante*.

di moto del proiettile e con $\vec{p}_f$ quello del fucile. Quindi il fucile acquista una quantità di moto che vale, in modulo, $p_f = m_p v_p$. Poiché il fucile era fermo prima dello sparo, questa rappresenta anche la variazione della quantità di moto del fucile, che, come abbiamo visto, può essere espressa come $F\Delta t$.[22] Allora la soluzione è, in modulo, $F = m_p v_p/\Delta t$, che numericamente vale 20 N[23], una forza tutt'altro che trascurabile (corrisponde al peso di una massa da circa 20 Kg).

4.10.3 Esercizio: il fuoco d'artificio

Il razzo di un gioco pirotecnico, di massa complessiva m, viene sparato verso l'alto, in direzione perfettamente verticale, con una data velocità iniziale v_0. Ad una certa altezza h dal suolo, il razzo si separa in due parti, di massa rispettivamente m_1 ed m_2. La modalità di separazione è tale che la velocità relativa delle due parti ha *solo componente orizzontale*, cioè le due parti, subito dopo l'esplosione che le separa, si muovono in verso opposto l'un l'altra in direzione orizzontale. Dopo aver compiuto il loro volo, le due parti ricadono al suolo. Sapendo che il punto di caduta della parte di massa m_1 dista d_1 dal punto di partenza del razzo, cosa si può dire sul punto di caduta della parte m_2? (Supponete trascurabile l'attrito dell'aria)

Soluzione La soluzione del problema richiede di considerare con molta attenzione tutte le informazioni fornite nel testo. In pratica, il razzo si separa in due parti per effetto di una qualche forza interna, un'esplosione, e l'unica forza che agisce sul sistema e sulle sue parti (trascurando l'attrito dell'aria) è la forza peso dovuta all'accelerazione di gravità. Questa forza è diretta verticalmente, e dunque il sistema (inizialmente il razzo tutto intero, e poi le sue parti) può essere considerato *isolato* in direzione orizzontale per tutta la durata del fenomeno che stiamo analizzando. Di conseguenza, la componente orizzontale della quantità di moto si conserva: essa è nulla all'inizio (il lancio avviene in direzione verticale) e deve essere nulla ad ogni istante. Quindi, dette v_{1h} e v_{2h} le componenti orizzontali delle velocità delle due parti, ad un qualsiasi istante del loro volo deve valere $0 = m_1 v_{1h} + m_2 v_{2h}$. Ora, dato che trascuriamo l'attrito dell'aria e le velocità iniziali sono dirette solo orizzontalmente, il loro moto in direzione orizzontale è di tipo rettilineo uniforme. Inoltre l'istante di caduta è lo stesso per le due parti (si tratta di due "gravi" che hanno la stessa velocità iniziale in direzione verticale e sono soggetti alla stessa accelerazione di gravità, cosa che, come abbiamo già più volte osservato, implica l'affermazione che abbiamo appena fatto). Quindi lo spazio percorso in direzione orizzontale da ognuna delle due parti è, in modulo (i versi sono ovviamente opposti tra loro), linearmente proporzionale alla loro velocità iniziale. Possiamo scrivere: $r_2/r_1 = v_{2h}/v_{1h} = m_1/m_2$, dove l'ultima uguaglianza

[22] Notate che si tratta di una forza impulsiva, vista la brevità del tempo in cui è attiva, e tuttavia va considerata come media del tempo, dato che, ragionevolmente, la forza non rimane costante neanche in tale breve intervallo di tempo.

[23] Nel trovare la soluzione numerica fate attenzione ad usare unità di misura "coerenti" (cioè convertite g in Kg e ms in s) e verificate anche la validità dimensionale del risultato trovato.

deriva dalla conservazione della quantità di moto in direzione orizzontale (ricordate ancora che stiamo lavorando con i moduli). Da qui si ricava $r_2 = r_1 m_1/m_2$.[24]

4.11 Urti

I fenomeni che comportano urti tra corpi rappresentano un ottimo esempio per comprendere l'utilità delle leggi di conservazione che abbiamo introdotto in questo capitolo, in particolare della conservazione della quantità di moto. Infatti, negli urti si sviluppano delle *forze impulsive*, che possono essere molto intense, ma che generalmente hanno una durata molto breve[25]. È ovvio che, con forze di questo tipo, l'impiego dei soli principi della dinamica non permette una descrizione sufficientemente dettagliata e semplice dei fenomeni che si verificano, ed occorre servirsi delle leggi di conservazione. In generale, infatti, lo studio dei processi di urto richiede di determinare le velocità *finali* (cioè subito dopo l'urto) dei partners del processo essendo note le loro velocità *iniziali* (quelle relative all'istante subito prima dell'impatto). Dato che le velocità sono grandezze vettoriali, potete facilmente avere la sensazione che, negli urti che avvengono nello spazio a due o tre dimensioni, la soluzione dei problemi possa diventare complicata: tipicamente, in urto che avviene nello spazio reale (a tre dimensioni) si devono determinare le tre componenti delle velocità finali dei due corpi che partecipano all'urto, e quindi si possono avere ben sei incognite, per determinare le quali occorrono ben sei equazioni indipendenti. Anticipiamo che in questa sede ci limiteremo a trattare casi con un livello di complessità inferiore (ad esempio, problemi ad una sola dimensione, casi in cui uno dei partners è fermo prima, durante e dopo l'urto, etc.).

La conservazione della quantità di moto *totale*[26] per il sistema considerato, costituito dai corpi che urtano fra loro[27], è uno strumento prezioso per trattare problemi collisionali. Come sarà chiaro dagli esempi ed esercizi che discuteremo in seguito, la natura *vettoriale* della quantità di moto da un lato aggiunge potenza a questo strumento, dato che consente di ottenere relazioni che riguardano le singole *componenti* delle quantità di moto (ovvero, se le masse restano costanti, delle loro velocità), dall'altro impone di analizzare con grande cura se, e lungo quali *direzioni*, il sistema è isolato. Spesso, nonostante l'applicazione della conservazione della quantità di moto totale, la soluzione del problema richiede ulteriori

[24]**FAC** Osservate che la relazione sopra scritta poteva anche essere ottenuta formulando il ragionamento in modo diverso. Poichè la quantitdi moto totale in direzione orizzontale è sempre nulla, deve essere nulla la velocità del centro di massa, che quindi *non si muove* (in direzione orizzontale) per tutto il corso del fenomeno. Questa è una conclusione che si verfica sempre quando si ha a che fare con sistemi isolati in una (o più) direzioni.

[25]In questo ambito ci restringiamo a considerare degli urti "meccanici", in cui si verificano forze di contatto tra superfici di corpi rigidi. Vale la pena di ricordare che in fisica il concetto di collisione viene impiegato anche per altri tipi di interazione, inclusi quelli che non prevedono un reale "contatto" tra corpi.

[26]Totale significa che occorre fare la somma *vettoriale* delle quantità di moto dei corpi che collidono fra loro.

[27]Considereremo solo sistemi costituiti da due corpi che urtano fra loro, anche se i processi collisionali possono in genere coinvolgere un numero arbitrario di partners

equazioni, che possono essere determinate usando le leggi di conservazione dell'energia *totale*[28].

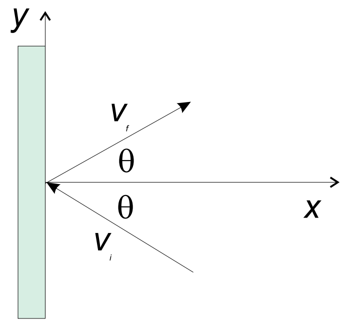
Per quanto riguarda la conservazione dell'energia, si deve distinguere tra *urti elastici* ed *urti anelastici* (o inelastici). Per definizione, nei primi si conserva l'energia cinetica *totale* del sistema di corpi che collidono, nei secondi, invece, parte o tutta l'energia cinetica viene convertita in qualche forma di *energia interna* dei corpi. Infatti, è del tutto ragionevole che la "violenta" interazione collisionale corpi possa portare ad un trasferimento di energia cinetica in energia interna. Per fare qualche esempio, nell'urto di un pallone da calcio ben gonfio contro una parete rigida l'energia cinetica (del solo pallone, la parete, che è l'altro partner del processo collisionale, è evidentemente sempre ferma) si conserva quasi completamente, dato che la natura rigida della superficie di un pallone gonfio fa sì che non ci possa un'efficiente variazione dell'energia interna. Per un pallone sgonfio, invece, durante la collisione si può avere una significativa deformazione della superficie, che coinvolge forze elastiche e quindi variazioni di energia di tipo elastico. Allora, parte dell'energia cinetica iniziale del pallone si converte in energia elastica (che, normalmente, si dissipa dando luogo ad un piccolo aumento di temperatura), ed infatti, come ben sappiamo, un pallone sgonfio tirato contro una parete "torna indietro" più lentamente che non se fosse perfettamente gonfio. Quindi l'impatto su una parete di un pallone sgonfio è un esempio di urto *parzialmente anelastico*[29]. Esistono anche urti *completamente elastici*: una pallina di plastilina che, tirata contro una parete, ci rimane spiaccicata dà un esempio di urto in cui tutta l'energia cinetica viene convertita in qualche forma di energia interna (quella che serve alla plastilina per rimanere attaccata alla parete, e presumibilmente un certo grado di riscaldamento locale).

Infine, osservate che talvolta i metodi che si impiegano per studiare le collisioni possono essere sfruttati anche in processi di disintegrazione di un sistema in più parti componenti, che possono essere visti come collisioni che "procedono all'inverso". In sostanza, questo approccio è già stato da noi impiegato nell'esercizio del gioco pirotecnico discusso in precedenza, dove, in pratica, l'energia (interna) liberata al momento della separazione in più parti viene convertita in energia cinetica dei componenti.

Negli esercizi che tratteremo qui di seguito cercheremo di mettere in luce gli aspetti fondamentali di alcuni processi collisionali limitandoci a quelli che possono essere trattati secondo le regole che abbiamo appena anticipato.

[28] In questo caso, essendo l'energia una grandezza scalare, l'energia totale è l'ordinaria somma delle energie dei corpi che collidono.

[29] **FAC** Tenete presente che, in generale, può essere difficile stabilire il grado di elasticità o anelasticità di un urto. Infatti, oltre alla rigidezza strutturale dei corpi considerati (normalmente corpi con superfici rigide implicano urti elastici), la durata dell'evento collisionale gioca un ruolo importante. Ad esempio, il pallone gonfio subisce, durante l'urto, una certa deformazione elastica della sua superficie, ma questa ha luogo in un intervallo di tempo così breve che l'energia cinetica "non fa in tempo" a convertirsi efficcemente in energia interna.



[h!]

Figura 4.1: Rappresentazione schematica dell'urto di un pallone contro una parete. Sono indicate tutte le variabili (angolo di incidenza, sistema di riferimento, etc.) rilevanti per la soluzione del problema riportato nel testo.

4.11.1 Esercizio: il pallone contro la parete

Consideriamo per primo proprio l'esempio del pallone tirato contro la parete. Supponiamo che esso abbia massa m ed arrivi sulla parete con una velocità di modulo v_i perpendicolare alla parete (il moto è bidimensionale) e diretta in modo da formare un angolo θ rispetto alla direzione ortogonale alla parete. La situazione è raffigurata in Fig.4.11.1. Quanto vale, in modulo e direzione, la velocità finale v_f subito dopo l'urto, supponendo l'urto perfettamente elastico?

Soluzione. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano XY con l'origine coincidente con il punto di impatto, e prendiamo l'asse Y parallelo alla superficie. In base al testo dell'esercizio, il moto avviene su questo piano. La velocità iniziale $\vec{v_i}$ avrà componenti $v_{i,x}$ e $v_{i,y}$. Disegnando il sistema di riferimento come in figura, si ha $v_{i,x} < 0$ e $v_{i,y} > 0$.[30] L'esercizio richiede di determinare le componenti $v_{f,x}$ e $v_{f,y}$ della velocità subito dopo l'urto.

Il sistema che partecipa all'urto è composto dal pallone e dalla parete, che rimane ovviamente sempre ferma (la sua velocità è nulla sia all'inizio che alla fine del processo collisionale). Esaminiamo quali leggi di conservazione possono essere impiegate. Poiché l'urto è perfettamente elastico, l'energia cinetica si conserva; l'energia cinetica da considerare sarebbe quella *totale*, data dalla somma delle energie cinetiche dei due componenti il sistema. Però, dato che la parete è e rimane ferma, e quindi la sua energia cinetica è sempre nulla. Allora la conservazione dell'energia si scrive: $(1/2)mv_i^2 = (1/2)mv_f^2$, da cui (la massa del pallone rimane inalterata durante l'urto): $v_i^2 = v_f^2$. Fate attenzione al fatto che questa espressione ci dice che il *modulo* della velocità finale è uguale al modulo della velocità iniziale, non che i *vettori* velocità sono uguali. Se fosse così significherebbe che non si sta verificando alcuna interazione tra pallone e parete.

Notate che la conservazione dell'energia cinetica, in cui la velocità compare al quadrato (quadrato del modulo), non ci è utile per determinare le componenti di $\vec{v}_f$. Bisogna quindi servirsi della conservazione della quantità di moto, che è invece una grandezza vettoriale.

[30]**FAC** La trigonometria stabilisce i valori delle componenti a partire dal modulo v_i e dall'angolo θ. Si ha $v_{i,x} = -v_i \sin\theta$ e $v_{i,y} = v_i \cos\theta$.

Preliminarmente, occorre stabilire con attenzione se e lungo quale direzione il sistema può essere considerato isolato. La forza (impulsiva) che si esercita fra parete e pallone può essere schematizzata come una ordinaria reazione vincolare, che ha sempre direzione ortogonale alla superficie, cioè è diretta lungo X (vedi figura). Per il terzo principio della dinamica, una forza uguale ed opposta vettorialmente deve essere esercitata dal pallone sulla parete. Questa forza non ha evidentemente effetti sulla dinamica della parete, che è e resta ferma. Dunque, la parete deve ricevere (attraverso le sue fondamenta!) una forza uguale ed opposta vettorialmente dal "mondo esterno". Questo significa che il sistema non è isolato lungo la direzione X, e quindi non c'è conservazione lungo questa direzione. Invece la quantità di moto totale lungo Y si conserva, e possiamo scrivere, con un ovvio significato dei termini: $p_{i,y} = p_{f,y}$. Ricordando l'epressione della quantità di moto e la circostanza che in questo caso uno dei partners, la parete, ha sempre velocità nulla, si deduce: $mv_{i,y} = mv_{f,y}$, cioè $v_{i,y} = v_{f,y}$. Poiché, ricordando la relazione tra modulo e componenti di un vettore, si ha $v_i^2 = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2$ e $v_f^2 = v_{f,x}^2 + v_{f,y}^2$, e dato che la conservazione dell'energia cinetica totale impone $v_i^2 = v_f^2$, deve essere necessariamente $v_{f,x} = \pm v_{i,x}$ (ricordate le proprietà dell'elevazione al quadrato!). La soluzione con il segno positivo deve essere scartata, perché, come già osservato, significa fisicamente che non c'è alcun urto, ovvero che il pallone sta penetrando con dinamica inalterata dentro la parete.

Allora la soluzione deve essere: $v_{f,x} = -v_{i,x}$, $v_{f,y} = v_{f,x}$, cioè la velocità finale ha componente inalterata in direzione parallela alla parete (la Y) e con segno opposto in direzione ortogonale alla parete (la X). In altre parole, l'angolo θ' che la velocità finale forma con la direzione ortogonale alla parete è uguale all'angolo θ di incidenza. Questo risultato è in accordo, ovviamente, con quanto tutti abbiamo imparato tirando un pallone (gonfio!) contro una parete, o una palla da biliardo contro la parete di un biliardo, o una pallina da tennis in schiacciata contro il terreno[31].

4.11.2 Esercizio: urto centrale tra palline del biliardo (FAC)

Si definisce *urto centrale* quello in cui la velocità relativa tra i corpi che urtano (cioè la velocità con cui i due corpi si avvicinano tra loro) è diretta lungo la congiungente i centri di massa dei corpi. Se si tratta di sfere, la condizione di urto centrale indica che esse impattano l'un l'altra in modo "centrato". In conseguenza di questo, come possiamo capire intuitivamente, la velocità finale relativa è diretta anch'essa lungo la stessa direzione. In sostanza, quindi, il problema è *unidimensionale*, e questo ci permette di trascurare il carattere vettoriale delle quantità di moto, e scriveremo le velocità come componenti lungo la direzione del moto delle palline.

[31]**FAC** In meccanica quantistica, la radiazione luminosa può essere interpretata in chiave *corpuscolare*: in questo ambito, un raggio di luce può essere visto come un fascio di particelle, dette *fotoni*. Queste particelle hanno delle caratteristiche peculiari, ad esempio non hanno massa, ma presentano ugualmente una quantità di moto ben definita. La riflessione speculare di un raggio di luce, che si ha ad esempio quando il raggio viene inviato su uno specchio (di buona qualità), può essere interpretata come un urto tra i fotoni del fascio e la superficie. Quanto descritto nell'esercizio del testo spiega allora la nota proprietà della riflessione luminosa, in cui angolo di incidenza ed angolo di riflessione sono uguali.

Allora, abbiamo due palline da biliardo, di massa m_1 e m_2 (non necessariamente uguale fra loro) che hanno velocità iniziale rispettivamente $v_{1,i}$ e $v_{2,i}$ (evidentemente esse devono avere segni opposti tra loro affinché possa esserci impatto). Quanto valgono le velocità finali $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$? (Supponete un urto perfettamente elastico, come è ragionevole visto l'elevata rigidezza strutturale delle palline da biliardo)

Soluzione. La conservazione dell'energia cinetica totale impone: $(m_1/2)v_{1,i}^2+(m_2/2)v_{2,i}^2 = (m_1/2)v_{1,f}^2 + (m_2/2)v_{2,f}^2$. La conservazione della quantità di moto totale dice, invece: $m_1v_{1,i}+m_2v_{2,i} = m_1v_{1,f}+m_2v_{2,f}$. Queste sono due equazioni indipendenti che consentono di determinare le due incognite $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$. Per trovare la soluzione dobbiamo "lavorare" di algebra. Nella conservazione dell'energia togliamo il fattore 1/2 che compare a moltiplicare tutti i termini, e riscriviamo l'equazione in questa forma: $m_1(v_{1,f}^2 - v_{1,i}^2) = m_2(v_{2,i}^2 - v_{2,f}^2)$. Ricordando che il binomio generico $(a^2 - b^2)$ può essere scomposto nel prodotto $(a - b)(a + b)$, scriviamo la stessa equazione nella forma: $m_1(v_{1,f} - v_{1,i})(v_{1,f} + v_{1,i}) = m_2(v_{2,i}-v_{2,f})(v_{2,i}+v_{2,f})$. D'altra parte anche l'equazione che esprime la quantità di moto può essere riscritta come: $m_1(v_{1,f}-v_{1,i}) = m_2(v_{2,i}-v_{2,f})$. Sostituendo nell'altra equazione si ha: $v_{1,f} + v_{1,i} = v_{2,i} + v_{2,f}$, ovvero $v_{1,f} - v_{2,f} = v_{1,i} - v_{2,i}$, cioè la velocità relativa di allontanamento dopo l'urto è uguale alla velocità di avvicinamento prima dell'urto.

Operando ancora con passaggi algebrici, quelli che ordinariamente si impiegano per la soluzione dei sistemi algebrici lineari, si ottiene:

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2v_{2,i}}{m_1 + m_2} v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1v_{1,i}}{m_1 + m_2} \; . \tag{4.16}$$

Vediamo qualche caso particolare. Se $m_1 = m_2$ si ottiene subito che $v_{1,f} = v_{2,i}$ e $v_{2,f} = v_{1,i}$, cioè le due palline si "scambiano" fra loro le velocità. Se, inoltre, una delle due palline è inizialmente ferma, per esempio $v_{1,i} = 0$, allora essa si mette in movimento con la velocità che l'altra aveva prima dell'urto, mentre l'altra pallina si ferma. Provate da soli a vedere qual è il comportamento di urti in cui le palline hanno masse sensibilmente differenti tra loro: vedrete che il comportamento tende a quello già discusso dell'urto con una parete fissa. Potete anche verificare di quanto si complica il problema se rilassate la condizione di urto centrale.

4.11.3 Esercizio: pesce grande mangia pesce piccolo

Un pesciolino di massa m si muove con velocità v. Alle sue spalle arriva un pesciolone di massa M che si muove nella stessa direzione e verso del pesciolino con velocità V (evidentemente $V > v$). Quando il pesciolone raggiunge il pesciolino, apre la bocca e se lo mangia. Quanto vale la sua velocità V_f subito dopo questo evento (nefasto per il pesciolino)?

Soluzione. Questo problema può essere considerato come un urto completamente anelastico: il sistema, che inizialmente è costituito dai due pesci separati, alla fine comprende solo un elemento, di massa $m + M$. Non possiamo quindi utilizzare la conservazione dell'energia, ma dobbiamo sfruttare la conservazione della quantità di moto totale, che in questo caso (unidimensionale) si scrive: $mv + MV = (m + M)V_f$, da cui $V_f = (mv + MV)/(m + M)$.

4.11.4 Esercizio: il crash test

In un crash test, un'automobile di massa $m = 10^3$ Kg viene lanciata a velocità $v = 36.0$ Km/h contro una barriera fissa ed indeformabile. Si osserva che, subito dopo l'impatto, l'auto "rimbalza" e si muove nella stessa direzione e verso opposto a quello di incidenza sulla barriera con velocità $V = 3.6$ Km/h. Quanta energia è stata "assorbita" dalla "cellula di sopravvivenza" dell'automobile?

Soluzione. In questo esempio si ha a che fare con un urto in cui non si conserva la quantità di moto totale. Infatti la barriera, dovendo rimanere fissa, deve evidentemente subire una forza *esterna* che annulla gli effetti della forza di interazione collisionale. D'altra parte, se così non fosse, dopo il rimbalzo l'automobile dovrebbe muoversi con una velocità di modulo pari alla velocità prima dell'impatto. Neanche l'energia cinetica totale si conserva: la sua variazione vale $\Delta E_{kin} = (m/2)(V^2 - v^2) = -3.96 \times 10^3$ J, che rappresenta proprio l'energia assorbita dalla carrozzeria durante l'urto.