Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2004/05
parte 5

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 3a - 02.01.05

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Nota per i lettori **iv**

1 Introduzione **1**
1.1 Dimensioni ed unità di misura . . . 2
1.2 Grandezze e prefissi . . . 2
1.3 Precisione e cifre significative . . . 3

2 Moto del punto **5**
2.1 Cinematica . . . 5
2.1.1 Velocità . . . 6
2.1.2 Accelerazione . . . 7
2.1.3 Esercizio: cavalli che si rincorrono . . . 9
2.2 Posizione di un punto e moto in più dimensioni . . . 10
2.2.1 Esercizio: il moto parabolico . . . 10
2.3 Vettori . . . 11
2.3.1 Alcune operazioni con i vettori . . . 13
2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro . . . 14
2.3.3 Esempio: composizione delle velocità . . . 15
2.4 Moto circolare uniforme . . . 16
2.4.1 Moto armonico . . . 18

3 Forze, equilibrio, movimento **21**
3.1 Massa e densità di massa . . . 21
3.2 Legge di Newton . . . 22
3.2.1 Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale . . . 23
3.3 Forza peso . . . 23
3.3.1 Esercizio: lancio di una pietra . . . 24
3.4 Reazione vincolare e terzo principio della dinamica . . . 25
3.4.1 Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare (FAC) . . . 25
3.4.2 Esercizio: moto su un piano inclinato . . . 27
3.4.3 Esercizio: la carrucola mobile . . . 28
3.5 Forza di Archimede . . . 29
3.5.1 Esercizio: il pallone aerostatico . . . 30

3.5.2 Esercizio: il densimetro per liquidi . . . 30
3.6 Forza centripeta . . . 31
3.6.1 Esercizio: la fionda . . . 31
3.7 Forza gravitazionale . . . 32
3.7.1 Esercizio: il peso su un altro pianeta . . . 33
3.8 Forza elettrica . . . 33
3.8.1 Esercizio: l'atomo planetario . . . 34
3.9 Forza elastica . . . 35
3.9.1 Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo . . . 37
3.10 Forze d'attrito . . . 39
3.10.1 Attrito statico . . . 39
3.10.2 Esercizio: spingere o tirare . . . 40
3.10.3 Esercizio: piano inclinato con attrito statico . . . 40
3.10.4 Esercizio: l'auto che sbanda in curva . . . 41
3.10.5 Attrito dinamico . . . 42
3.10.6 Esercizio: frenata a ruote bloccate . . . 42
3.10.7 Attrito dipendente dalla velocità . . . 43
3.10.8 Esercizio: velocità limite di un paracadutista . . . 44
3.11 Momento delle forze . . . 45
3.11.1 Esercizio: due bambini sull'altalena a dondolo . . . 46
3.11.2 Esempi di leve . . . 47
3.12 Cenni di statica e dinamica del corpo rigido (FAC) . . . 48
3.12.1 Esercizio: il moto di un tuffatore (FAC) . . . 49
3.12.2 Moto rotatorio del corpo rigido (FAC) . . . 49
3.12.3 Esercizio: il rullo compressore . . . 50
3.12.4 Esempio: equilibrio dei corpi rigidi . . . 51

4 Lavoro, energia, conservazioni 52
4.1 Lavoro meccanico . . . 52
4.1.1 Esercizio: lavoro sul piano inclinato . . . 53
4.2 Energia cinetica . . . 54
4.2.1 Esercizio: la frenata a ruote bloccate rivisitata . . . 54
4.3 Lavoro della forza peso . . . 55
4.3.1 Esercizio: velocità e montagne russe . . . 56
4.4 Energia potenziale gravitazionale . . . 56
4.4.1 Esercizio: lavoro del sollevatore di pesi . . . 57
4.5 Potenziale elettrostatico (FAC) . . . 57
4.5.1 Esercizio: velocità di un elettrone . . . 59
4.6 Energia elastica . . . 59
4.6.1 Esercizio: velocità della "molla" . . . 60
4.7 Conservazione dell'energia . . . 61
4.7.1 Esercizio: il giro della morte . . . 61
4.7.2 Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico (FAC) . . . 62

4.7.3 Esempio: dissipazione di energia nelle oscillazioni smorzate (FAC) . 63
4.8 Il primo principio della termodinamica 64
4.8.1 Esercizio: mangiare e faticare 65
4.9 Potenza 65
4.9.1 Esercizio: potenza e velocità 66
4.10 Quantità di moto 66
4.10.1 Conservazione della quantità di moto 67
4.10.2 Esercizio: il rinculo 67
4.10.3 Esercizio: il fuoco d'artificio 68
4.11 Urti 69
4.11.1 Esercizio: il pallone contro la parete 71
4.11.2 Esercizio: urto centrale tra palline del biliardo (FAC) 72
4.11.3 Esercizio: pesce grande mangia pesce piccolo 73
4.11.4 Esercizio: il crash test 74

5 Temperatura e calore 75
5.1 Pressione 75
5.1.1 Esercizio: la forza sul coperchio della pentola a pressione 77
5.2 Temperatura 77
5.2.1 Dilatazione termica 78
5.2.2 Esercizio: rotaie ferroviarie 79
5.2.3 Esercizio: variazione della densità con la temperatura 79
5.2.4 Termometri a dilatazione 79
5.2.5 Dilatazione termica dei gas 80
5.2.6 Temperatura assoluta (in gradi Kelvin) 80
5.3 Legge dei gas perfetti 82
5.3.1 Esercizio: trasformazioni di un gas 84
5.4 Origine microscopica di pressione e temperatura (FAC) 86
5.5 Lavoro delle forze di pressione 88
5.5.1 Esercizio: lavoro nella dilatazione termica di un gas, di un liquido e di un solido 89
5.6 Temperatura e calore 90
5.6.1 Esercizio: una trasformazione adiabatica 91
5.6.2 Capacità termica, calore specifico ed energia interna 91
5.6.3 Esercizio: il thè freddo 94
5.6.4 Esercizio: cottura "alla pietra" 94
5.6.5 Esercizio: la bomba calorimetrica 95
5.6.6 Esercizio: potenza e riscaldamento di un gas 96
5.6.7 Calore nelle transizioni di fase (FAC) 96
5.6.8 Esercizio: il thè freddo con ghiaccio 97
5.7 Cenni sul secondo principio della termodinamica (FAC) 98

6 Fluidi e correnti elettriche 100
6.1 Pressione in fluidi in equilibrio . . . 100
6.1.1 Esercizio: il manometro differenziale a molla . . . 103
6.2 Fluidi ideali in moto stazionario . . . 103
6.2.1 Portata di un condotto . . . 104
6.2.2 Esercizio: il riempimento di una botte . . . 105
6.3 Materiali conduttori di corrente . . . 105
6.3.1 Densità di carica elettrica e corrente . . . 107
6.3.2 Esercizio: velocità degli elettroni in un filo di rame . . . 108
6.3.3 Densità di corrente (FAC) . . . 108
6.4 Teorema di continuità per la portata . . . 109
6.4.1 Esercizio: il tubo da giardino . . . 109
6.5 Lavoro e potenza delle forze di pressione per un fluido incomprimibile in movimento . . . 109
6.6 Il teorema di Bernoulli . . . 110
6.6.1 Alcune conseguenze del teorema di Bernoulli . . . 112
6.6.2 Esercizio: velocità, sezione, pressione in un tubo . . . 114
6.6.3 Esercizio: la botte bucata . . . 114
6.7 Viscosità e fluidi reali . . . 115
6.7.1 Fluidi in movimento in regime laminare . . . 116
6.7.2 Legge di Hagen-Poiseuille . . . 116
6.7.3 Esercizio: un impianto di irrigazione . . . 117
6.7.4 Esercizio: le iniezioni . . . 118
6.7.5 Resistenza idraulica e tubi in serie e parallelo . . . 118

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce dalle lezioni del Modulo di Fisica per il corso di Matematica e Fisica per studenti di STPA (e TACREC), non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario o di scuola media superiore. Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, senza discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Nota importante: a partire dalla Versione 2b, alcune parti del testo, alcuni esercizi ed alcune note a pié di pagina, indicate con il simbolo **FAC** , sono da ritenersi di studio *facoltativo* per gli studenti dei corsi di laurea STPA e TACREC.

Revisioni:

1. Versione 1, 14.09.04: non rilasciata;

2. Versione 2, 18.10.04: cap.1, cap.2 con revisioni sostanziali;

3. Versione 2b, 22.10.04: cap.1, cap.2 con correzioni minori, cap.3; introdotta indicazione delle parti facoltative;

4. Versione 2c, 30.10.04: modifiche minori ai parr.2.4.1, 3.9, 3.10.6 ed altre aggiunte facoltative; aggiunto es.3.10.1; cap. 4;

5. Versione 2d, 08.11.04: correzione di errore di stampa nella soluzione del par.4.7.1; dichiarato FAC il par.4.7.2;

6. Versione 3, 10.12.04: modifiche minori ai parr.3.11, 4.3, 4.9; cap. 5;

7. Versione 3a, 02.01.05: qualche correzione di battitura al cap. 5; cap. 6; cap. 7

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 6

Fluidi e correnti elettriche

In questo capitolo tratteremo di problemi che riguardano la statica e la dinamica dei fluidi. Come già anticipato altrove, i fluidi sono sistemi materiali che, a differenza dei corpi rigidi, non hanno una "forma" (geometrica) propria. Per questo motivo, per lo studio della meccanica di tali sistemi si deve seguire un approccio specifico, concettualmente simile a quello che abbiamo adottato per i fenomeni che coinvolgono temperatura e calore. In particolare, in questo capitolo ci occuperemo soprattutto di sistemi allo stato *liquido*, cioè fluidi *incomprimibili*, dotati di un volume definito e costante. Per questi sistemi adotteremo strategie che prevedono di impiegare grandezze medie, come ad esempio la pressione e la velocit'à media degli elementini in cui possiamo immaginare di suddividere il sistema.

Oltre ad esaminare il comportamento di liquidi ideali e reali, che, come vedremo nel seguito, hanno caratteristiche legate alla presenza di attriti viscosi, tratteremo anche delle principali proprietà della corrente elettrica. Infatti, una corrente elettrica può essere vista, sotto molti aspetti, come un fluido di cariche elettriche, che si muovono per effetto di forze di natura elettrica. Questa commistione tra argomenti di tipo apparentemente diverso potrà essere utile per mettere in evidenza alcune particolarità del comportamento di circuiti e sistemi elettrici che altrimenti potrebbero essere più complesse da interpretare. Nel capitolo cercheremo, dove possibile, di trattare gli argomenti elettrici in parallelo con il comportamento dei fluidi, riservandoci di trattare nel prossimo capitolo alcuni aspetti specifici dei circuiti elettrici.

6.1 Pressione in fluidi in equilibrio

Abbiamo già introdotto la pressione nel capitolo precedente, dove abbiamo trattato diffusamente del comportamento termodinamico dei gas. Se individuiamo una superficie S all'interno di un fluido, la pressione P è una grandezza *scalare* data dal rapporto $P = F/S$, dove F è la forza che il fluido esercita sulla superficie considerata ($\vec{F}$ è ortogonale alla superficie). Abbiamo anche mostrato come, in un fluido in condizioni di *equilibrio*, all'interno del quale tutti gli elementini in cui possiamo immaginare di suddividerlo sono fermi (cioè non hanno moto relativo), la pressione non dipenda dall'orientazione della superficie (almeno a patto di considerare piccole superfici) e sia costante nel tempo (altrimenti gli elementini del fluido potrebbero mettersi in moto relativo).

Ci chiediamo ora da quale grandezza può dipendere il valore della pressione in un fluido in equilibrio. Notate che, benché le affermazioni che faremo sono valide per qualsiasi tipo di fluido, esse hanno una rilevanza particolare per i liquidi, per un motivo che vi sarà chiaro fra breve. Supponiamo di avere un recipiente contenente del fluido, di densità ρ,[1] che si trova in equilibrio. Immaginiamo di disegnare idealmente un volume, di forma per esempio cilindrica (superficie di base S ed altezza h, l'altezza essendo diretta verticalmente): questo cilindro contiene una massa di fluido $m = \rho Sh$, sulla quale agisce la forza peso di modulo $mg = \rho Shg$. Confrontiamo ora le forze che agiscono sulla base superiore (F_{sup}) ed inferiore del cilindro (F_{inf}): si ha $F_{inf} = F_{sup} + mg = F_{sup} + \rho Shg$. Poiché le superfici superiore ed inferiore sono uguali, questa relazione si traduce in un'analoga relazione tra le pressioni; detta $\Delta P = P_{inf} - P_{sup}$ la differenza tra le pressioni sulla base inferiore e superiore del cilindro, si ha: $\Delta P = (\rho Shg)/S = \rho hg$. Quindi la pressione è maggiore alla base del cilindro, la differenza essendo linearmente proporzionale alla altezza e alla densità del fluido, ed essendo indipendente da quanto è grande la superficie di base. Osservate che, dato che la densità ρ di un liquido è, normalmente, molto maggiore di quella di un gas, il risultato è particolarmente rilevante per i liquidi, come anticipato sopra. Talvolta si dà il nome di *legge di Stevino* a questa conclusione, che, come abbiamo visto, è solo conseguenza della forza peso che agisce su una certa porzione di fluido.

Se immaginiamo di immergerci in profondità all'interno di un fluido in equilibrio, ad esempio l'acqua del mare (in assenza di "correnti", altrimenti non saremmo in condizioni di equilibrio), abbiamo che sulla nostra testa si trova una *colonna di fluido* di altezza sempre crescente via via che si scende. Ad esempio, alla profondità $h = 10$ m sotto il livello del mare, la differenza di pressione vale $\Delta P = \rho_{acqua} gh$; ricordando che $\rho_{acqua} \approx 10^3$ Kg/m^3 e che $g \approx 9.8$ m/s^2, si ha un aumento di pressione $\Delta P \approx 10^5$ Pa, equivalente a circa 1 atm. Poichè il nostro corpo è progettato per funzionare alla pressione atmosferica, è chiaro che devono essere presi particolari accorgimenti quando si decide di andare sott'acqua, specialmente ad alta profondità[2].

Vediamo ora alcune importanti conseguenze di quanto affermato sopra. All'interno di un fluido in equilibrio, la pressione locale, che cioè si riferisce ad un volumetto di fluido, dipende solo dalla quota a cui si trova questo volumetto. Dunque, la pressione (in un liquido all'equilibrio) dipende dall'altezza alla quale la misuriamo. Se ci si mantiene alla stessa quota, la pressione è uguale dappertutto (affermazione nota anche come *legge di Pascal*). Notate che questa constatazione l'abbiamo già (implicitamente) usata quando abbiamo derivato la spinta di Archimede, nel capitolo dedicato alle forze. In quel capitolo, trovammo che la spinta di Archimede, quella che provoca il galleggiamento dei corpi, è in

[1] Ricordate che $\rho = m/V$, dove m e V sono rispettivamente massa e volume del fluido considerato. In questo esempio supponiamo di avere un fluido *omogeneo e uniforme*, cioè la cui densità non varia con la posizione.

[2] Notate che la presenza della colonna d'aria che ci sovrasta costituendo l'atmosfera è il meccanismo che dà origine alla pressione atmosferica; il suo valore diminuisce salendo verso l'alto, ed infatti le cabine degli aeroplani devono essere "pressurizzate".

sostanza legata all'"assenza" di un certo volume di fluido, o, meglio, al fatto che in questa volume la densità è diversa che nel resto del fluido.

Un'altra importante conseguenza è il *principio dei vasi comunicanti.* Se abbiamo diversi recipienti aperti (senza tappo), ad esempio cilindri di sezione[3] diversa, oppure recipienti con forme arbitrarie, tutti *collegati tra loro* e riempiti con lo stesso fluido, le superfici libere del fluido nei vari recipienti devono trovarsi tutte alla stessa altezza. Infatti, la superficie libera (il "pelo" del liquido) è a contatto con l'ambiente (i recipienti sono aperti) e quindi ci deve essere equilibrio con la pressione atmosferica. D'altra parte, poiché i recipienti sono collegati fra loro, ci deve essere equilibrio fra le pressioni del fluido in essi contenuto. Affinché la pressione sia la stessa per tutti i recipienti occorre che l'altezza della colonna di fluido sia anche la stessa, cioè che le superfici libere si trovino tutte alla stessa quota.

Infine, quanto abbiamo stabilito serve anche a giustificare l'impiego di unità di misura della pressione basate su misure di lunghezza, più precisamente dell'altezza di una colonna di fluido. L'esempio più comune è l'unità di misura "millimetri di mercurio" (simbolo mmHg), che è ben nota a tutti[4], ma frequentemente ci si riferisce anche a "metri d'acqua" (mH_2O), specialmente negli impianti termoidraulici.

La misura della pressione mediante colonne di fluido è proprio quello che fu fatto, ad esempio, da Torricelli (dal cui nome discende l'unità di misura torr, che è un nome alternativo per mmHg, per cui 1 torr = 1 mmHg) che impiegò per questo scopo del mercurio[5]. Nel suo esperimento usò un tubo di vetro, aperto da una parte e riempito di mercurio. Tenendolo tappato, lo rovesciò in modo che l'estremo apribile si ritrovasse sommerso all'interno di una bacinella di fluido (Torricelli usò anche in questo caso del mercurio, ma ci si potrebbe servire di un qualsiasi altro liquido immiscibile con il mercurio). A questo punto, Torricelli stappò il tubo, mettendo il mercurio contenuto nel cilindro in contatto con quello della bacinella: all'equilibrio, la pressione alla base del cilindro prodotta dalla colonna di mercurio, che vale $\rho_{Hg}gh$,[6] deve uguagliare la pressione generata dall'atmosfera

[3]Ci riferiremo spesso, in questo capitolo, a "sezioni" (di tubi cilindrici o di altre figure geometriche a tre dimensioni). In termini geometrici, la sezione di un certo solido (figura geometrica a tre dimensioni) è la superficie (figura geometrica a due dimensioni) che si ottiene tagliando il volume con un dato piano. Intanto, notate che normalmente per ottenere le sezioni useremo spesso dei piani perpendicolari ad un asse di simmetria della figura tridimensionale; avendo a che fare con un tubo cilindrico, intenderemo normalmente delle sezioni ottenute tagliando il cilindro stesso con un piano perpendicolare al suo asse, che sono, chiaramente, dei cerchi. Inoltre, spesso chiameremo per semplicità sezione l'area della sezione stessa, e quindi attribuiremo alla sezione una grandezza, con dimensioni del quadrato di una lunghezza (m^2 nel sistema mKs), che è proprio la sua area.

[4]Ad esempio, essa è comunemente impiegata per misurare le pressioni sanguigne. Notate che la pressione sanguigna è sempre misurata come *differenza* rispetto alla pressione ambiente. Infatti la pressione ambiente è dell'ordine di 760 mmHg, come vedremo nel seguito, mentre la pressione sanguigna è dell'ordine del centinaio di mmHg. Se si trattasse di una misura "assoluta", e non "relativa", i vasi sanguigni si chiuderebbero per effetto della pressione esterna!

[5]Il mercurio è un metallo molto denso che si trova allo stato liquido a temperatura ambiente.

[6]L'operazione di riempire completamente il cilindro e di tenerlo tappato finché questo non è stato immerso nella bacinella, assicura che sopra alla colonna di mercurio ci sia del "vuoto", e quindi la pressione sulla faccia superiore della colonna sia trascurabile.

sul fluido della bacinella, che si "trasmette" fino alla base inferiore della colonna. Allora la pressione atmosferica deve essere $P_{atm} = \rho_{Hg} g h$; tenendo conto che, a temperatura e pressione ambiente, è $\rho_{Hg} \approx 13.6 \times 10^3$ Kg/m^3, si ha che l'altezza della colonna di mercurio è $h \approx 760$ mm; come già detto, alla pressione che dà luogo ad un'altezza di un millimetro di mercurio si dà il nome di mmHg, o torr, e allora la pressione atmosferica risulta di circa 760 mmHg, o torr.

Quello realizzato da Torricelli è un esempio di *barometro* (strumento che serve per misurare la pressione atmosferica), ovvero di *manometro* (strumento per misurare pressioni, o differenze tra pressioni). Con la tecnologia moderna esistono numerosi metodi alternativi per misurare pressioni, in genere basati su "trasduttori" di forza in segnali elettrici. Comunque manometri di tipo Torricelli sono ancora usati in alcuni settori, ad esempio per misure medico-fisiologiche, dove spesso si usano fluidi di densità minore rispetto al mercurio, come l'acqua o diversi tipi di alcool, allo scopo di avere una maggiore "sensibilità" strumentale (piccole variazioni di pressione corrispondono a variazioni di altezza della colonna facilmente misurabili).

6.1.1 Esercizio: il manometro differenziale a molla

Un manometro a molla è costituito da due camere, separate da un setto mobile di superficie S, scorrevole senza attrito in direzione orizzontale. Il setto è vincolato, nel suo movimento, da una molla di costante elastica k disposta lungo la direzione di spostamento del setto. Se una delle due camere è a contatto con la pressione atmosferica P_{atm} e nell'altra si fa il "vuoto" (cioè, con delle pompe meccaniche, si diminuisce la densità del gas che vi è contenuto finché la pressione scende a valori trascurabili rispetto a P_{atm}), quanto vale la compressione (o estensione, a seconda di come è costruito lo strumento) Δl della molla?

Soluzione. Sui due lati del setto c'è una differenza di pressione che vale, in modulo, $\Delta P \approx P_{atm}$ (questo risultato si ottiene considerando praticamente nulla la pressione nella camera in cui è stato fatto il vuoto). Corrispondentemente c'è una differenza tra le forze che agiscono sul setto, che vale $\Delta F = \Delta P S = P_{atm} S$. Questa forza agisce nella direzione e verso che va dalla camera a contatto con l'atmosfera verso la camera in cui c'è il vuoto, e produce una compressione (o estensione) che vale, in modulo, $\Delta l = P_{atm} S/k$.

6.2 Fluidi ideali in moto stazionario

Passiamo ora ad occuparci del moto dei fluidi, cioè della fluidodinamica. In questo ambito è bene distinguere fra fluidi *ideali* e fluidi *reali*. Consideriamo un tubo all'interno del quale scorre il fluido, la cui velocità sarà ragionevolmente diretta lungo l'asse del tubo stesso. Immaginiamo ora di "affettare" idealmente il tubo "per lungo" in tante fettine, cioè suddividiamo idealmente il fluido in tanti strati, o *lamine*, sovrapposte, ed individuiamo una velocità caratteristica per ognuna delle lamine: per un fluido ideale tale velocità è *la stessa per tutte le lamine* (il fluido "si muove in modo omogeneo") mentre vedremo che, a causa delle forze di attrito viscoso che abbiamo già avuto modo di incontrare, in un fluido reale la velocità caratteristica è diversa tra le diverse lamine (in particolare è nulla al bordo, dove il fluido tocca la parete del tubo, e massima al centro).

Quindi per un fluido ideale è possibile definire una velocità (fluida, cioè che non si riferisce ad una singola particella) $\vec{v}$ che risulta la stessa per tutti i volumetti che lo costituiscono. Inoltre applicheremo qui di seguito un'ulteriore approssimazione, anch'essa piuttosto ragionevole. Ci riferiremo in pratica ad una situazione **stazionaria**: questo non significa che non c'è movimento del fluido, ma che la velocità non subisce variazioni nel tempo. È come se, idealmente, aveste "aperto il rubinetto" di alimentazione del tubo molto tempo prima di quando decidete di studiare il fluido, in modo tale che la velocità ha avuto sufficiente tempo per raggiungere una condizione di equilibrio[7]. Infine, considereremo generalmente dei *fluidi incomprimibili*, cioè dei liquidi (ideali), per i quali è più agevole definire volumi che non cambiano durante i processi considerati.

6.2.1 Portata di un condotto

Quando un fluido percorre un tubo, o un condotto di forma qualunque, il processo può essere caratterizzato dalla **portata**, che rappresenta praticamente una misura della quantità di materiale che attraversa il condotto nell'unità di tempo. In fluidodinamica si definiscono sia la **portata in massa** che la **portata in volume**, che si riferiscono rispettivamente alla quantità in massa o in volume trasportata in un secondo. Indichiamo le due grandezze rispettivamente con Q_m e Q_V; se consideriamo un intervallo temporale Δt, ed indichiamo con Δm e ΔV rispettivamente la quantità di massa e di volume che attraversano la sezione nel tempo Δt, avremo $Q_m = \Delta m/\Delta t$ e $Q_V = \Delta V/\Delta t$. Queste grandezze avranno unità di misura nel sistema mKs rispettivamente Kg/s e m^3/s. Se il fluido è incomprimibile, cioè se, avendo definito un volume ΔV questo non cambia nel tempo per effetto di qualche causa, si ha un ovvio legame diretto tra di loro attraverso la densità ρ del fluido: $\Delta m = \rho \Delta V$, e quindi $Q_m = \rho Q_V$. A causa di questo semplice legame, considereremo solo la portata in volume Q_V, potendo dedurre facilmente la portata in massa a partire da questa.

Consideriamo allora un liquido ideale di densità ρ che si muove in modo stazionario con velocità $\vec{v}$ all'interno di un tubo. Consideriamo una sezione qualsiasi del tubo, che avrà una superficie S, e supponiamo che la direzione della velocità sia *ortogonale* alla sezione considerata[8].

Supponiamo di identificare idealmente il "fronte" del fluido che, ad un dato istante, si trova ad attraversare la sezione S. Dopo un intervallo di tempo Δt,[9] questo fronte di fluido si sarà spostato di una distanza $d = v\Delta t$, con v modulo della velocità. Il volume

[7] Fate attenzione: in questo caso equilibrio non significa assenza di moto!

[8] **FAC** Questa assunzione consente di semplificare la nostra discussione, ma non è sempre verificata. Nel caso in cui $\vec{v}$ formi un angolo qualsiasi con la normale alla sezione, il cui versore indichiamo con $\hat{n}$, allora tutte le nostre affermazioni dovranno essere corrette, nel senso che, nelle relazioni in cui compare il modulo della velocità del fluido, v, dovremo intendere la sua *componente ortogonale* alla superficie, che è data dal prodotto scalare $\vec{v} \cdot \hat{n}$.

[9] **FAC** Per essere rigorosi, sceglieremo Δt breve, al limite infinitesimo, ed opereremo il consueto passaggio al limite che significa introdurre, matematicamente, delle *derivate rispetto al tempo*.

di fluido ΔV che ha attraversato nell'intervallo temporale Δt la sezione S è allora quella contenuta all'interno del cilindro (o prisma, se il tubo non ha sezione circolare) la cui superficie di base è S, mentre l'altezza è d, per cui $\Delta V = Sd = Sv\Delta t$. Quindi si ha: $Q_V = \Delta V/\Delta t = \S v$ (e $Q_m = \rho S v$): la portata è proporzionale al *prodotto tra la velocità e la sezione*[10]: nel caso della portata in massa il fattore (dimensionato!) di proporzionalità è la densità del fluido considerato.

6.2.2 Esercizio: il riempimento di una botte

Avete una botte di forma cilindrica, con diametro $d_B = 50$ cm, ed altezza $h = 90$ cm. La riempite di vino (qui considerato un liquido ideale) usando un tubo di diametro $d = 2.5$ cm in cui il vino scorre con portata costante nel tempo, ed osservate che per riempirla completamente occorre un intervallo di tempo $\Delta t = 5.0$ minuti. Quanto la velocità v con cui il vino scorre nel tubo?

Soluzione. La portata in volume Q_V del tubo deve essere tale da riempire il volume V_B della botte in un intervallo di tempo Δt. Poiché per ipotesi il riempimento avviene con una portata *costante*, si ha semplicemente $Q_V = V_B/\Delta t = \pi(d_B/2)^2 h/\Delta t$, dove abbiamo esplicitato il volume della botte in funzione dei dati del problema. Ricordando il legame fra portata e velocità v del vino nel tubo, si ha $v = Q_V/S$, dove la sezione del tubo è, in funzione dei dati del problema, $S = \pi(d/2)^2$. Sostituendo la portata determinata sopra si ottiene: $v = \pi(d_B/2)^2 h/(\Delta t \pi(d/2)^2) = h(d_B/d)^2/\Delta t$. Numericamente (fate attenzione a convertire tutti i dati in unità di misura coerenti fra loro, cioè metri e secondi) si ottiene $v = 1.2$ m/s.

6.3 Materiali conduttori di corrente

L'esistenza e l'utilità della *corrente elettrica* sono ben note a chiunque. Abbiamo già avuto modo di ricordare che in natura esistono delle cariche elettriche; più precisamente, la carica elettrica può avere segno negativo o positivo, e gli elementi di carica sono costituiti rispettivamente da elettroni e protoni (o ioni positivi di carica unitaria). Abbiamo anche detto che la carica elettrica è *discreta*, cioè non si trovano in natura delle particelle che portino una frazione della carica dell'elettrone o del protone. Ricordiamo che la carica elettrica si misura, in unità compatibili con il sistema mKs, in Coulomb, simbolo C, e che l'unità elementare di carica vale circa 1.6×10^{-19} C.

Fondamentalmente, la corrente elettrica è costituita da un *flusso* di cariche elettriche che si spostano da un punto all'altro. Molto spesso questo spostamento avviene mediante *fili conduttori*, ad esempio i fili di rame che costituiscono un impianto elettrico. Per il momento, ci limitiamo a considerare delle correnti elettriche **continue**, nelle quali il flusso di cariche va considerato di tipo *stazionario* nel senso che abbiamo prima chiarito

[10]**FAC** Per tenere conto del fatto che la velocità potrebbe non essere ortogonale alla superficie della sezione di tubo considerata, l'affermazione va corretta scrivendo che la portata è proporzionale al prodotto tra *componente ortogonale* della velocità e sezione.

a proposito dei fluidi. In questo caso, mettendo insieme tutte le riflessioni che abbiamo appena riportato, è intuitivo considerare la corrente elettrica come un *fluido di cariche elettriche*. Più precisamente, se ci riferiamo a corrente che fluisce in fili elettrici, il fluido può essere immaginato come costituito di elettroni, che si muovono in modo stazionario.

Infatti, il filo elettrico non è altro che un pezzo di metallo *conduttore* (cioè che permette il passaggio degli elettroni), per esempio di rame, che è stato trafilato a formare un sottile (e lungo) cilindro. In una visione molto semplificata della materia, possiamo immaginare che il nostro filo di rame sia costituito da un insieme (molto numeroso) di atomi di rame, i quali sono legati (chimicamente) tra loro a formare un solido, cioè un sistema all'interno del quale gli atomi sono distribuiti spazialmente con un certa regolarità[11]. Per le proprietà atomiche dei metalli, in particolare del rame, questa situazione dà luogo, approssimativamente, ad un *reticolo* di ioni di carica positiva unitaria, che consideriamo fissi nello spazio[12], circondati da una "nuvola" di elettroni, portatori di carica negativa elementare, che sono liberi di muoversi (per meglio dire, "relativamente liberi", come vedremo in seguito). Questa differenza di mobilità tra ioni del reticolo ed elettroni è fondamentalmente dovuta alla differenza di dimensioni e di massa che esiste fra le due specie (gli elettroni sono più "piccoli" e leggeri, e quindi si muovono più facilmente).

Sottolineiamo che il comportamento che abbiamo descritto è (approssimativamente) valido solo nel caso dei metalli, in cui ci sono elettroni liberi che possono partecipare al processo di conduzione. Infatti esistono in natura dei materiali in cui gli elettroni non sono liberi di muoversi come nei metalli. Questi materiali si chiamano *isolanti* o *dielettrici*, e il loro comportamento impedisce la presenza di correnti elettriche al loro interno. Notate anche che, globalmente (cioè su una scala dimensionale sufficientemente ampia), i metalli sono neutri, cioè la quantità di carica negativa è bilanciata dalla stessa quantità di carica positiva. Infatti si suppone che ogni atomo del metallo "metta a disposizione" un elettrone, dando contemporaneamente luogo ad una carica elementare positiva (lo ione).

Quindi un filo elettrico si comporta come una sorta di tubo, all'interno del quale possono muoversi degli elettroni. Tale movimento è legato alla presenza di forze elettriche, quelle di cui abbiamo trattato nel capitolo dedicato alle forze; torneremo in seguito sulle cause che determinano il flusso di elettroni. Il meccanismo descritto, che è alla base del passaggio di corrente elettrica in un filo, non rappresenta l'unica possibilità di avere corrente elettrica, cioè spostamento di cariche. Ad esempio, in una soluzione ionica può esserci migrazione di elettroni e di ioni, e qualcosa di simile si verifica a livello di membrane cellulari per il trasporto di cariche negli organismi viventi. Però il flusso degli elettroni in un filo elettrico rappresenta un esempio così diffuso e comprensibile che vale la pena riferirsi a questo per esaminare le principali caratteristiche della corrente elettrica,

[11]**FAC** Quando gli atomi sono organizzati spazialmente con un elevato grado di regolarità, si parla di *stato cristallino* della materia; i metalli presentano un'organizzazione di questo tipo su una scala dimensionale grande rispetto alla distanza interatomica, che, ricordiamo, è tipicamente dell'ordine di alcuni decimi di nanometro (1 nm = 10^{-9} m).

[12]**FAC** In realtà il reticolo subisce un moto di *agitazione termica*, che comunque produce piccoli effetti per i processi che qui stiamo considerando.

6.3.1 Densità di carica elettrica e corrente

Il nostro filo elettrico conterrà un certo numero N di elettroni liberi; conviene esprimere la quantità di elettroni in forma di densità $n = N/V$, dove V rappresenta un certo volume del filo (stiamo supponendo che la distribuzione di elettroni sia uniforme ed omogenea); n ha le dimensioni di un inevrso di volume, e quindi si misura in m^{-3}. Se pensate che nel nostro modello ogni atomo del materiale che costituisce il filo, ad esempio il rame, mette a disposizione un elettrone, e tenete conto del fatto che la densità dei materiali solidi è normalmente molto alta, potete aspettarvi che il valore numerico di n sia anche molto grande. Proviamo a stimarlo: la densità di massa del rame vale $\rho \sim 9 \times 10^3$ Kg/m^3, mentre la massa atomica del rame è $m_A \approx 63$ uma (il simbolo significa unità di massa atomica, e ricordiamo ancora che 1 uma $\sim 1.6 \times 10^{-27}$ Kg). Dunque, un metro cubo di rame contiene un numero di atomi pari a circa $\rho/m_A \approx 10^{29}$; se ogni atomo fornisce un elettrone, la densità elettronica è allora $n \sim 10^{29}$ 1/m^3.

Ogni elettrone porta una carica elementare $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C; moltiplicando questa carica elementare per la densità elettronica otteniamo una grandezza, che indichiamo con il simbolo ρ_E, che ci dice quanta carica è contenuta in un metro cubo del nostro materiale, e quindi si misura in C/m^3. Nell'esempio del filo di rame che stiamo prendendo in considerazione si ottiene $\rho_E = ne \sim -1.6 \times 10^{10}$ C/m^3. Questa *densità di carica elettrica* rappresenta una grandezza di uso molto generale in elettricità ed elettrostatica, che serve per caratterizzare il comportamento di un materiale rispetto ai fenomeni di natura elettrica.

Dunque, abbiamo individuato che la corrente elettrica in un filo è dovuta ad un flusso di elettroni, che quindi si comportano in modo abbastanza simile ad un fluido (per il momento, ideale) che scorre in un tubo. Se chiamiamo S la sezione del filo e v la velocità media degli elettroni (che supponiamo diretta ortogonalmente alla sezione stessa, affermazione del tutto ragionevole), possiamo definire una "portata in carica elettrica", per il momento indicata con Q_E, in modo del tutto simile a quanto abbiamo fatto per la portata in massa di un fluido. Detta $Q_V = Sv$ la portata in volume, avremo $Q_E = \rho_E Q_V = \rho_E Sv$. Notate che le dimensioni di questa grandezza sono una carica elettrica diviso per un tempo, e quindi l'unità di misura nel nostro sistema sarebbe C/s.

A questa portata in carica elettrica, anzi, alla portata in carica elettrica *cambiata di segno* (per convenzione si preferisce non avere a che fare, nei processi stazionari, con grandezze negative, come uscirebbe considerando un flusso di cariche negative quali sono gli elettroni) si dà il nome di **corrente elettrica**, che qui indichiamo con I. Anche l'unità di misura prende un nome particolare, che è quello di Ampère, simbolo A. Dunque una corrente $I = 1$ A significa che la carica di 1 C viene trasportata (dal filo, in questo caso) nell'intervallo temporale di 1 s. [13] Per fare un esempio numerico che ci permette di

[13]**FAC** Questa osservazione ci dà la possibilità di dare un'altra definizione per la corrente I, che è utile in molti casi: in un processo *stazionario*, detta Δq la quantità di carica che attraverso il conduttore in un intervallo di tempo Δt, si ha $I = \Delta q/\Delta t$. Se il processo non è stazionario (cioè la velocità dei portatori di carica, gli elettroni nel nostro filo, non è costante nel tempo), allora, come di consueto, la definizione prevede di considerare intervalli di tempo molto piccoli, e di scirivere una *derivata rispetto al tempo*:$I = \frac{dq}{dt}$.

capire quanti elettroni vengono coinvolti nel passaggio di corrente, possiamo riferirci ai fili che alimentano le lampadine dei fanali di un'automobile (meglio, per il momento, non considerare un impianto elettrico domestico, dato che in questo caso la corrente elettrica è *alternata*, cioè la velocità degli elettroni cambia periodicamente nel tempo, invertendosi numerose volte in un secondo). Tipicamente, correnti $I \sim 5$ A passano in questi fili; tenendo conto del valore della carica dell'elettrone, che abbiamo scritto prima, esce che in un secondo il filo è attraversato da circa 3×10^{19} elettroni!

6.3.2 Esercizio: velocità degli elettroni in un filo di rame

Abbiamo un filo di rame di sezione $S = 1$ mm^2 attraversato da una corrente *continua* (cioè stazionaria) $I = 10$ A. Supponendo che il fluido di elettroni si comporti in modo ideale, e che la densità di carica elettrica nel filo sia $\rho_E = -1 \times 10^{10}$ C/m^3 (valore in accordo con la stima discussa in precedenza), quanto vale la velocità media v degli elettroni nel filo?

Soluzione. Si ha $I = |\rho_E| S v$, dove abbiamo introdotto il segno di valore assoluto per tenere conto della convenzione sul segno della corrente in condizioni stazionarie), da cui si ricava, numericamente, facendo attenzione ad esprimere la sezione S in m^2, $v = 10^{-2}$ m/s. Notate che questo risultato non è molto verosimile: nella realtà, come accenneremo in seguito, il fluido elettronico è tutt'altro che ideale, cioè privo di viscosità, e inoltre non è detto che tutti gli elettroni messi a disposizione dal rame partecipino al processo di trasporto elettrico.

6.3.3 Densità di corrente (FAC)

Negli esempi fatti finora, sia nel campo dei fluidi che della corrente elettrica, abbiamo sempre supposto che gli elementini di fluido (o gli elementini di carica elettrica) in cui possiamo suddividere il fluido stesso avessero densità uniforme su tutta la sezione del tubo (o del filo elettrico). Soprattutto nel caso elettrico, non è detto che questo si verifichi sempre, e, per tenerne conto, conviene introdurre una *densità di corrente* $\vec{j}$, una grandezza *vettoriale* espressa da $\vec{j} = -\rho_E \vec{v}$, $\vec{v}$ essendo la velocità *vettoriale* dei portatori di carica (il segno meno serve a rispettare la convenzione sui segni che abbiamo già introdotto). La relazione che lega $\vec{j}$ alla corrente elettrica I nel caso generale in cui la densità di corrente dipende dalla posizione, prevede matematicamente di eseguire un *integrale di superficie* sulla sezione S della componente di $\vec{j}$ ortogonale alla sezione stessa. Detto $\hat{n}$ il versore ortogonale alla sezione, e ricordando le proprietà del prodotto scalare come strumento per determinare la proiezione dei vettori lungo una certa direzione, si ha che tale componente può essere espressa come $\vec{j} \cdot \hat{n}$. Quindi si può scrivere $I = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS$.[14]

[14] A questo tipo di integrali di superficie si dà il nome di **flusso** del vettore considerato, in questo caso $\vec{j}$, sulla superficie considerata, in questo caso S.

6.4 Teorema di continuità per la portata

Il *teorema di continuità* è un nome "pomposo" per esprimere un concetto del tutto ovvio. Se prendiamo un tratto di tubo che non comprende, al suo interno, né pozzi né sorgenti (cioè non ci sono né *perdite* né *aggiunte* per il fluido che scorre nel tratto di tubo), la quantità di fluido che entra deve essere uguale a quella che esce. In queste condizioni la portata (in volume o in massa) deve essere costante per tutto il tubo[15].

Supponiamo ora di avere un tubo la cui sezione è variabile. In particolare, consideriamo due sezioni S_1 ed S_2 poste in due punti diversi del tubo. Ricordando che la portata (in volume) è definita come $Q_V = Sv$, il teorema di continuità porta a scrivere: $S_1 v_1 = S_2 v_2$, dove v_1 e v_2 sono le velocità del fluido (*incomprimibile*, cioè un liquido) quando questo attraverso la sezione S_1 ed S_2, rispettivamente. Quindi la velocità del fluido aumenta quando la sezione diminuisce, e viceversa.

6.4.1 Esercizio: il tubo da giardino

Avete un tubo di gomma da giardino all'interno del quale scorre dell'acqua (un fluido che si può considerare incomprimibile). La sezione del tubo è $S_T = 5$ cm^2, e la velocità dell'acqua al suo interno è $v_T = 5$ m/s. Tenete in mano l'estremità del tubo, e decidete di schiacciarne le pareti in modo che la sua sezione diventi $S_S = 1$ cm^2. Quanto vale la velocità v_S dell'acqua in uscita dalla strozzatura?

Soluzione. Per il teorema di continuità deve essere $v_S = v_T S_T / S_S = 25$ m/s. La velocità dell'acqua che passa per la strozzatura che le vostre dita formano schiacciando l'estremità del tubo aumenta rispetto alla velocità dell'acqua che scorre nel tubo. Questo è proprio il motivo per cui, per fare in modo che il getto d'acqua percorra una distanza maggiore, si chiude parzialmente l'uscita del tubo: la velocità di uscita maggiore permette all'acqua di allontanarsi di più che non se essa uscisse dal tubo non schiacciato. Ovviamente, questo sistema ha dei limiti pratici (altrimenti si sarebbe trovato un sistema per imprimere una velocità arbitrariamente ad un fluido): il carattere viscoso dei fluidi, di cui tratteremo brevemente nel seguito, tende a ridurre la velocità di scorrimento quando i fluidi sono costretti ad attraversare sezioni ristrette.

6.5 Lavoro e potenza delle forze di pressione per un fluido incomprimibile in movimento

Abbiamo già visto, nel capitolo dedicato alle trasformazioni termodinamiche di un gas, il ruolo delle forze di pressione nel compiere un lavoro meccanico; in quel capitolo, trattando

[15] **FAC** Nella corrente elettrica, il teorema di continuità significa, in pratica, che la stessa quantità di carica che entra in un filo elettrico deve uscirne. Questa affermazione richiama, in modo naturale, un concetto generale, quello della *conservazione della carica elettrica*, che è quindi una caratteristica della materia che rimane costante.

di gas, cioè fluidi che non hanno un volume proprio, e quindi possono essere compressi, abbiamo legato l'espressione del lavoro alla variazione di volume (espansione, compressione). Qui, invece, ci interessiamo di liquidi, sistemi che consideriamo idealmente incomprimibili e molto poco dilatabili.

Se prendiamo in considerazione un liquido in movimento, abbiamo ugualmente la possibilità che una certa quantità di fluido si sposti per effetto delle forze di pressione, e quindi abbiamo i due ingredienti (forza e spostamento) del lavoro meccanico. Consideriamo un liquido ideale che si muove con velocità v attraverso un tubo, la cui sezione è S, e chiamiamo P la pressione del fluido misurata su questa stessa sezione. In un (piccolo) intervallo di tempo Δt, il fronte del fluido che si trova a passare per la sezione S si sposta di un tratto $\Delta s = v\Delta t$. Ricordando il legame tra pressione e forza ($P = F/S$), si ottiene facilmente che il lavoro delle forze di pressione in questo intervallo di tempo è $\mathcal{L} = PSv\Delta t = PQ_V\Delta t$, dove abbiamo introdotto la portata in volume del fluido nel tubo. Notate che, mentre nel caso dei gas il segno del lavoro (compiuto dal sistema) poteva essere determinato in modo univoco (positivo o negativo nel caso di espansioni o compressioni del sistema), qui il segno dipende in definitiva dal verso dello spostamento, come si ha in generale nel caso del lavoro meccanico.

Avendo definito il lavoro compiuto nell'unità di tempo, è possibile determinare la *potenza* W sviluppata dalle forze di pressione. Si ha infatti $W = \mathcal{L}/\Delta t = PSv = PQ_V$, cioè la potenza è direttamente proporzionale sia alla pressione che alla portata. Questo risultato non è particolarmente rilevante nel caso dei liquidi ideali, dato che raramente si è interessati alla potenza in questo ambito. Vedremo invece nel prossimo capitolo che questo argomento è di grande importanza nel caso dei fluidi di cariche elettriche (correnti) che scorrono in tubi (fili elettrici) reali.

6.6 Il teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli rappresenta un'importante legge che regola velocità e pressione di un fluido che percorre un fluido. La dimostrazione del teorema si basa sui principi di conservazione e bilancio energetico che abbiamo ampiamente trattato in precedenza, e che in questo caso vengono applicati ad elementi del fluido considerato.

Prendiamo due sezioni di un tubo, S_1 ed S_2, percorse da un fluido (ideale) di densità ρ in movimento stazionario (cioè con velocità costante nel tempo sulle varie sezioni). Indichiamo con v_1 e v_2 le velocità del fluido quando attraversa le due sezioni, e con P_1 e P_2 la pressione misurata sulle due sezioni. Per essere in grado di interpretare una categoria di fenomeni la più vasta possibile, complichiamo la situazione considerata facendo in modo che le due sezioni si trovino ad altezze (quote) diverse, h_1 ed h_2. [16]

[16] h_1 ed h_2 rappresentano a rigore le altezze dei *centri* delle due sezioni rispetto ad un piano di riferimento (ad esempio, il suolo). Notate che nel seguito considereremo che le dimensioni longitudinali delle sezioni considerate (per intenderci, il diametro del tubo) sia molto più piccolo della loro altezza, in modo da poter considerare approssimativamente che *tutti* gli elementi di fluido che attraversano la sezione S_1 si trovino ad altezza h_1, e, analogamente, *tutti* quelli che attraversano la sezione S_2 si trovino ad altezza h_2.

Calcoliamo la variazione di energia meccanica (cioè la variazione della somma di energia cinetica ed di energia potenziale gravitazionale) per un elemento di fluido che "passa" dalla sezione S_1 alla sezione S_2. Questa variazione di energia meccanica deve essere uguale al lavoro delle forze che agiscono sul fluido, cioè delle forze di pressione. Cominciamo con l'energia cinetica, e consideriamo a questo scopo la (piccola) quantità di massa di fluido Δm che attraversa la sezione S_1 nel (piccolo) intervallo di tempo Δt; come già osservato in precedenza, questa piccola quantità di fluido è quella contenuta in un cilindro (supponendo un tubo circolare) che ha base S_1 ed altezza $v_1 \Delta t$. Quindi, tenendo conto che la densità del fluido è ρ, si ha $\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = Q_m \Delta t$, dove abbiamo introdotto la portata in massa Q_m. Osservate che, per il teorema di continuità (iltubo non ha pozzi o sorgenti), un'analoga quantità Δm attraversa la sezione S_2 nello stesso intervallo di tempo Δt. Poiché queste quantità di massa sono in movimento, possiamo associare ad esse dell'energia cinetica; avremo quindi, per il fluido che passa nelle due sezioni S_1 ed S_2, $E_{K1} = \frac{\Delta m}{2} v_1^2$ ed $E_{K2} = \frac{\Delta m}{2} v_2^2$. La *differenza* di energia cinetica sarà allora: $\Delta E_K = \frac{\Delta m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$.

Abbiamo detto che nell'intervallo di tempo Δt la stessa quantità di fluido attraversa le due sezioni considerate; dunque è come se, in questo Δt, la massa Δm passasse dalla sezione S_1, che si trova ad altezza h_1, alla sezione S_2, che si trova ad h_2. Quindi la *differenza* di energia potenziale gravitazionale è $\Delta U_G = \Delta m g(h_2 - h_1)$, con g modulo dell'accelerazione di gravità.

Per la conservazione dell'energia, la somma $\Delta E_K + \Delta U_G$ deve essere uguale al lavoro fatto dalle forze di pressione sul fluido; sulla sezione S_1, tale lavoro, come abbiamo stabilito nel paragrafo precedente, vale $\mathcal{L}_1 = P_1 S_1 v_1 \Delta t$, mentre sulla sezione S_2 avremo $\mathcal{L}_2 = -P_2 S_2 v_2 \Delta t$. Poiché supponiamo di considerare un caso in cui il fluido si sposta dalla sezione S_1 alla sezione S_2, abbiamo messo un segno positivo per il lavoro $\mathcal{L}_1$ per teenere conto del fatto che su questa sezione la pressione "spinge" il fluido, mentre sulla sezione S_2 la pressione "si oppone" al movimento, e quindi abbiamo messo un segno negativo nell'espressione di $\mathcal{L}_2$. Il lavoro "totale" nel processo che stiamo considerando è la somma algebrica di $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, cioè $\mathcal{L} = P_1 S_1 v_1 \Delta t - P_2 S_2 v_2 \Delta t$.

Quindi il bilancio energetico per il moto dell'elemento di fluido considerato ci fornisce la seguente espressione:

$$P_1 S_1 v_1 \Delta t - P_2 S_2 v_2 \Delta t = \Delta m g(h_2 - h_1) + \frac{\Delta m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \ . \tag{6.1}$$

Questa equazione può essere rimaneggiata portando nel membro di sinistra tutte le grandezze che si riferiscono alla sezione S_1 e a destra quelle che si riferiscono alla sezione S_1:

$$P_1 S_1 v_1 \Delta t + \Delta m g h_1 + \frac{\Delta m}{2} v_1^2 = P_2 S_2 v_2 \Delta t + \Delta m g h_2 + \frac{\Delta m}{2} v_2^2 \ ; \tag{6.2}$$

ricordando che $\Delta m = Q_m \Delta t = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$, si ottiene:

$$P_1 S_1 v_1 \Delta t + \rho S_1 v_1 \Delta t g h_1 + \frac{\rho S_1 v_1 \Delta t}{2} v_1^2 = P_2 S_2 v_2 \Delta t + \rho S_2 v_2 \Delta t g h_2 + \frac{\rho S_2 v_2 \Delta t}{2} v_2^2 \ . \tag{6.3}$$

Notiamo ora che è $Q_V = S_1 v_1 = S_2 v_2$, per cui possiamo dividere il primo e il secondo membro dell'Eq.6.3 per la grandezza $Q_V \Delta t$, ottenendo:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \ , \tag{6.4}$$

cioè la somma dei termini $P + \rho g h + (\rho/2)v^2$ (abbiamo tolto i pedici, perché ci riferiamo a sezioni qualsiasi del condotto) è *costante* in tutto il condotto.

6.6.1 Alcune conseguenze del teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli ha diverse conseguenze di interesse in una varietà di situazioni pratiche. In genere, tali conseguenze sono più evidenti quando ci si restringe a considerare situazioni specifiche, in cui, ad esempio, solo alcune delle grandezze coinvolte nella formulazione del teorema si considerano variabili. Vediamo alcune di queste situazioni (altre le presenteremo a seguire sotto forma di esercizi).

Fluido statico. La prima e più semplice situazione è quella in cui il fluido considerato è *fermo*, cioè la sua velocità è $v = 0$ (dappertutto). In queste condizioni, il teorema di Bernoulli stabilisce che $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$. Applichiamo questa condizione ad una colonna di fluido, alta $h = h_2 - h_1$: allora la differenza $\Delta P = P_2 - P_1$ tra la pressione alla base e sulla cima della colonna deve essere $\Delta P = \rho g h$, che è esattamente quanto avevamo già stabilito esaminando il caso dei fluidi stazionari. Dunque il teorema di Bernoulli "contiene" le leggi dei fluidi stazionari per quanto riguarda la prssione.

Portanza di un'ala È noto che l'ala (di un aeroplano, o di un uccello, specie di quelli che volano planando, ad esempio i gabbiani, i grandi rapaci, o anche le rondini), per funzionare bene, cioè assicurare un efficace galleggiamento nell'aria (questo fenomeno si chiama talvolta **portanza** dell'ala), deve avere un profilo specifico. Tenete presente che un ruolo importante in quello che presenteremo è giocato dal carattere *viscoso* dell'aria, una caratteristica che ancora non abbiamo discusso, e che, anzi, abbiamo per ipotesi escluso nel formulare il teorema di Bernoulli (lo abbiamo applicato a fluidi *ideali*). Tuttavia, i meccanismi di base della portanza possono essere compresi con un'applicazione del teorema di Bernoulli.

Dunque, i profili alari sono generalmente studiati in modo che la velocità di scorrimento dell'aria sulla faccia superiore, che indichiamo con v_1, sia maggiore di quella sulla faccia inferiore, v_2. Sottolineiamo ancora che questo è dovuto alla combinazione di geometria dell'ala e interazione, di tipo viscoso, tra aria e superficie dell'ala. Se consideriamo un'ala "sottile", possiamo ritenere che la quota dell'aria che scorre sulle due facce sia la stessa, cioè $h_1 = h_2$. In queste condizioni il teorema di Bernoulli stabilisce che: $P_1 + (\rho/2)v_1^2 = P_2 + (\rho/2)v_2^2$, dove ρ è la densità dell'aria (piccola, ma non nulla!). Dunque, per soddisfare l'uguaglianza, sapendo che, per ipotesi, $v_1 > v_2$, deve essere $P_2 > P_1$. Quindi la pressione sulla faccia inferiore è maggiore di quella sulla faccia superiore, e questo genera una forza diretta verso l'alto che dà origine alla portanza. Notate che ci sono anche casi in cui il profilo alare viene scelto in modo da ottenere *deportanza*, cioè spinta verso il basso. Questo si verifica, ad esempio, negli alettoni di una macchina da formula uno, dove si sfrutta questa spinta per aumentare la forza con cui le gomme premono sull'asfalto, e quindi la forza di reazione vincolare, con un conseguente aumento della forza di attrito tra asfalto e gomme, che conduce ad un aumento della tenuta di strada.

Il nebulizzatore. I nebulizzatori sono usati in tantissime applicazioni per ridurre un liquido allo stato di “aerosol” (goccioline liquide di piccolissime dimensioni che possono muoversi facilmente nell’aria). Per esempio nebulizzatori sono impiegati nelle boccette di profumo, ma anche nei carburatori dei motori a scoppio ed in una serie di applicazioni tecniche. A grandi linee, il funzionamento del nebulizzatore è il seguente. Un sottile tubicino, generalmente dotato di un’apertura conica (di piccolo diametro) pesca nel liquido, ed affaccia su un condotto, che supponiamo orizzontale. Premendo il tasto, o schiacciando la pompetta di cui esso è dotato, si fa in modo di far scorrere dell’aria nel condotto; la velocità v di quest’aria è ovviamente maggiore di quella che si trova sul pelo del liquido, che è praticamente ferma. Allora, per il teorema di Bernoulli la pressione nel condotto diventa più bassa di quella sul pelo del liquido, e quindi il liquido viene risucchiato all’interno del tubicino; quando arriva alla terminazione conica, il liquido viene disgregato in un insieme di goccioline[17], che quindi possono essere trasportate dall’aria del condotto, ed indirizzate dove si desidera.

Aneurisma e stenosi. Aneurisma e stenosi sono delle patologie del sistema circolatorio che, pur avendo un origine di tipo diverso, hanno un’evoluzione in qualche modo simile, che, nonostante il sangue sia un liquido viscoso, possono essere compresi facilmente applicando il teorema di Bernoulli e il teorema di continuità.

L’aneurisma ha inizio quando un vaso sanguigno (ad esempio, i capillari degli arti inferiori, e allora si parla di “vene varicose”, particolarmente diffuse perchè la pressione sanguigna agli arti inferiori è, ovviamente, maggiore che non agli arti superiori) subisce una dilatazione locale per effetto di un indebolimento delle pareti. Per semplicità, supponiamo che il vaso sia disposto in direzione orizzontale, cioè che non ci siano variazioni di quota. Chiamiamo v_1, P_1 ed S_1 velocità, pressione e sezione del vaso in condizioni ordinarie, cioè non dilatato, e v_2, P_2, S_2 le analoghe grandezze nel punto in cui il vaso è dilatato (sarà ovviamente $S_2 > S_1$). Per il teorema di continuità deve essere $S_1 v_1 = S_2 v_2$, per cui si avrà $v_2 < v_1$, cioè il sangue scorrerà più lentamente nell’aneurisma che nel resto del vaso. Avendo imposto che non ci sono variazioni di quota, il teorema di Bernoulli ci dice che $P_1 + (\rho/2)v_1^2 = P_2 + (\rho/2)v_2^2$, dove ρ è la densità del sangue (dello stesso ordine di grandezza di quella dell’acqua). Allora dovrà essere $P_2 > P_1$, coè la pressione nell’aneurisma deve essere maggiore che nel resto del vaso. Ma una pressione maggiore implica una maggiore spinta di deformazione sulle pareti del vaso: dunque l’aneurisma tenderà ad espandersi sempre più, in una specie di *processo a valanga* che può avere, come esito conclusivo, la rottura del vaso.

La stenosi, invece, ha origine quando il vaso ha una occlusione che ne diminuisce la sezione. Usando la simbologia di prima, qui si ha $S_2 < S_1$, da cui, ragionando come sopra, si ottiene $P_2 < P_1$, cioè la pressione in corrispondenza della stenosi è minore che non nel resto del vaso. Il problema è che questa pressione può diventare così bassa che i tessuti circostanti il vaso possono tendere a comprimere ulteriormente la stenosi. Di

[17]**FAC** La brusca diminuzione di pressione può anche provocare, in funzione della *tensione di vapore* del liquido considerato, un passaggio alla fase di vapore.

nuovo si ha un processo a valanga, stavolta di "segno opposto" rispetto a prima, ma che può ugualmente avere effetti deleteri portando ad un'occlusione pressoché totale del vaso considerato.

6.6.2 Esercizio: velocità, sezione, pressione in un tubo

Vediamo di quantificare il meccanismo dell'aneurisma in un esercizio che si riferisce ad un tubo *orizzontale* percorso da acqua (supposto un liquido ideale di densità $\rho = 10^3$ Kg/m^3, e in condizioni di moto stazionario). Supponiamo che la portata in volume del tubo sia $Q_V = 1$ l/s $= 10^{-3}$ m^3/s, e consideriamone due sezioni di area differente, $S_1 = 1$ cm^2 ed $S_2 = 5$ cm^2. Sapendo che la pressione misurata sulla sezione S_1 è $P_1 = 10$ bar $\approx 1 \times 10^6$ Pa, quanto vale la pressione P_2 sulla sezione S_2?

Soluzione. Per la definizione di portata (e per il teorema di continuità) deve essere: $v_1 = Q_V/S_1$ e $v_2 = Q_V/S_2$. Per il teorema di Bernoulli, considerando che il tubo è orizzontale (non ci sono variazioni di quota), deve essere $P_2 = P_1 + (\rho/2)(v_1^2 - v_2^2) = P_1 + (\rho/2)Q_V(1/S_1^2 - 1/S_2^2)$; svolgendo i calcoli, e ponendo attenzione ad usare unità di misura "coerenti" fra loro, si ottiene $P_2 = 3 \times 10^6$ Pa ≈ 30 bar, cioè $P_2 > P_1$.

Questo semplice esercizio ci mostra un andamento che si verifica in generale quando si considerano fluidi (ideali) che percorrono tubi di sezione variabile: dove la sezione si allarga, la pressione aumenta, e viceversa. Questo effetto (noto talvolta come effetto *Venturi* è peculiare, dato che si potrebbe (erroneamente) pensare che dove il tubo si allarga la pressione diminuisca, e viceversa. Invece, dato il ruolo della velocità di flusso nel teorema di Bernoulli e il suo legame con la sezione del tubo stabilito dal teorema di continuità, la situazione è effettivamente opposta a quanto si potrebbe immaginare.

6.6.3 Esercizio: la botte bucata

Avete una botte di altezza h riempita di un liquido (ideale) di densità ρ. La botte è aperta, e quindi il pelo superiore del liquido si trova a contatto dell'atmosfera, e si trova alla pressione P_{atm}. Alla base della botte praticate un *piccolo* forellino, da cui il liquido può fuoriuscire. Quanto vale la velocità v di uscita del liquido dal forellino?

Soluzione. Anche questo esercizio può essere risolto applicando il teorema di Bernoulli, e la sua soluzione, a cui talvolta si dà il nome di *teorema di Torricelli*, è particolarmente significativa. Per la soluzione, occorre innanzitutto assumere un'approssimazione, che consiste nel porre uguale a zero la velocità del *pelo* del liquido, cioè del liquido che si trova in cima alla botte. Questa approssimazione è ragionevole se si considera che il forellino è piccolo, e quindi il livello della botte calerà molto lentamente. Inoltre occorre osservare che la pressione al forellino, che è a contatto con l'atmosfera esterna, è la stessa (P_{atm}) del pelo del liquido, visto che la botte è aperta. Con queste approssimazioni, il teorema di Bernoulli scritto per le due "sezioni" considerate, rispettivamente il forellino e il pelo del liquido, per le quali, ricordiamo, la differenza di quota è h (per ipotesi), è: $P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + (\rho/2)v^2$, da cui $v = \sqrt{2gh}$. Il risultato è notevole, dato che ci dice che la velocità di uscita del liquido è la stessa di un grave lasciato cadere dalla stessa altezza (verificate!).

6.7 Viscosità e fluidi reali

Abbiamo già avuto modo di incontrare il concetto di viscosità accennando al moto di un corpo in un fluido. In quel contesto, stabilimmo che l'effetto della viscosità, cioè di attriti *dipendenti dalla velocità*, era quello di originare una forza $\overrightarrow{F}_{A,V} = -\beta\vec{v}$ che si opponeva al movimento del corpo (con la conseguente comparsa di fenomeni specifici, come la velocità limite). Questo tipo di attrito è evidentemente dovuto all'interazione tra la superficie del corpo in movimento e i costituenti (le molecole) del fluido in cui esso si trova e, come abbiamo già anticipato, dipende fortemente dal tipo di fluido.

Un'altra osservazione sperimentale, simile a quella che abbiamo già presentato e che serve ancora meglio per illustrare il concetto di viscosità è la seguente. Mettiamo una goccia di un liquido viscoso (praticamente tutti i liquidi lo sono, ma c'è chi lo è più e chi meno: una goccia di olio, o, meglio ancora, una di miele rappresenta un ottimo esempio) su una superficie liscia, e sopra poggiamoci un'altra superficie liscia (come esempi di superfici lisce possiamo considerare dei vetrini da microscopio, che vanno benissimo per questi scopi). In questo modo la goccia si espanderà a formare una *lamina* sottile, di spessore d e superficie S. Se vogliamo che la superficie superiore scorra sulla lamina di liquido con velocità *costante* v rispetto alla superficie inferiore, ci accorgiamo sperimentalmente che dobbiamo applicare una forza *viscosa* F_v, il cui modulo è $F_v = \eta\frac{Sv}{d}$. La costante di proporzionalità η che compare in questa espressione dipende dal fluido considerato (e dalle condizioni, ad esempio pressione e temperatura, a cui si esegue la prova); essa prende il nome di **coefficiente di viscosità** ed ha dimensioni di una pressione moltiplicata per un tempo (verificate!), per cui nel sistema mKs si misura in Pa s, talvolta nota anche come poiseuille, dal nome di un fisiologo francese che studiò la circolazione sanguigna [18]. Valori di η per vari fluidi, in particolare per diversi liquidi, possono essere trovati nelle tabelle; per avere un'idea degli ordini di grandezza, per l'acqua a temperatura ambiente (20 °C) $\eta \approx 10^{-3}$ Pa s, mentre a 37 °C si ha $\eta \approx 0.7 \times 10^{-3}$ Pa s; per il sangue, che è un buon esempio di fluido viscoso, il coefficiente η è circa il triplo di quello dell'acqua; per l'aria, infine, si ha $\eta \approx 2 \times 10^{-5}$ Pa s, un valore nettamente inferiore che per acqua o sangue.

Torniamo ora brevemente al coefficiente β che compare nella legge della forza di attrito viscoso per un corpo in moto in un fluido che abbiamo richiamato all'inizio di questo paragrafo. Poiché il processo fisico coinvolto è lo stesso (la viscosità), ci aspettiamo di trovare una relazione tra β ed η. Questo legame esiste, però in realtà non ha carattere "generale", dato che dipende dalla specifica geometria del corpo considerato. Nel caso di (piccoli) corpi sferici di raggio R, ad esempio una goccia di pioggia che cade nell'aria, si ha la seguente (semplice) relazione, nota come *legge di Stokes*: $\beta = 6\pi R\eta$.

[18] Esistono altre unità di misura per il coefficiente di viscosità, come il Poise (1 Poise = 0.1 Pa s).

6.7.1 Fluidi in movimento in regime laminare

Abbiamo visto quali siano gli effetti della viscosità sul moto di un corpo (esteso), ed abbiamo visto come la forza viscosa sia inversamente proporzionale allo spessore del fluido considerato (lo spessore d della lamina di fluido nell'esperimento di scorrimento di una superficie sull'altra). È ragionevole attendersi che simili forze di attrito abbiano luogo anche quando si considera il moto di un fluido all'interno di un condotto: in questo caso dovremo tenere conto dell'attrito tra il fluido e la pareti del condotto, e dell'attrito tra strati (lamine) sovrapposte del fluido stesso.

Consideriamo allora un fluido reale (viscoso) che scorre in un tubo e, come abbiamo già proposto all'inizio di questo capitolo, immaginiamo di suddividerlo in tante lamine sovrapposte l'una sull'altra: mentre in un fluido ideale (in condizioni di moto stazionario) la velocità delle varie lamine (che supponiamo diretta lungo l'asse del tubo) è la stessa, in un fluido reale la velocità delle varie lamine è diversa. In particolare si ottiene che questa velocità è nulla per la lamina che è a contatto con la parete del tubo, ed è via via crescente per le lamine che si trovano a distanza maggiore della parete, raggiungendo un massimo per la lamina che si trova lungo l'asse del tubo, per poi diminuire ancora fino a zero via via che ci si allontana dall'asse.

Questa situazione, che è tipica per un fluido in movimento in *regime laminare* [19], può essere facilmente compresa dal punto di vista intuitivo: lo spessore di fluido compreso tra le lamine che si trovano vicino all'asse e le pareti del tubo è relativamente grande, e quindi ci aspettiamo che la forza di attrito viscoso sia minore per queste lamine rispetto a quanto si ha per le lamine più vicine alle pareti. Dunque, essendo minore la forza di attrito, ci aspettiamo che la velocità di flusso sia maggiore.

Dato che siamo in presenza di una distribuzione disomogenea di velocità per le varie lamine, fa comodo individuare una *velocità media* del fluido, $\overline{v}$; per un tubo di sezione circolare, si può dimostrare che essa è legata alla velocità v_{max} della lamina che si trova lungo l'asse (cioè la velocità massima tra quelle di tutte le varie lamine) attraverso la relazione $\overline{v} = v_{max}/2$. Chiaramente, la definizione di portata per un condotto percorso da un fluido reale dovrà tenere conto della distribuzione disomogenea di velocità delle lamine, ed infatti in questa definizione sarà necessario introdurre il valore della velocità media. Si ha quindi, per la portata in volume Q_V nel caso di un fluido reale attraverso un tubo di sezione S: $Q_V = S\overline{v} = Sv_{max}/2$.

6.7.2 Legge di Hagen-Poiseuille

Consideriamo un tratto di tubo di sezione *costante* S e lunghezza L percorso da un fluido reale (in moto stazionario in regime laminare). Supponiamo che il tubo sia disposto orizzontalmente, cioè che non ci siano variazioni di quota: il teorema di Bernoulli ci

[19] Ci sono situazioni in cui neanche questa descrizione è valida, in particolare quando si ha a che fare con moti in **regime turbolento** (o vorticoso), che non può essere analizzato con modelli semplici quali quelli che stiamo qui impiegando. Di norma, il regime turbolento si raggiunge quando le velocità del fluido sono piuttosto grandi, o quando la geometria del condotto presenta bruschi cambi di forma e sezione. In questi appunti eviteremo di trattare situazioni di moto turbolento.

suggerirebbe un valore di pressione P costante lungo tutto il tubo, ma, invece, con un fluido reale si osserva che esiste una differenza di pressione ΔP tra fine ed inizio del tubo. Notate che il fallimento del teorema di Bernoulli in questo caso non deve stupirci: ricordate, infatti, che per dimostrare Bernoulli avevamo fatto uso di un bilancio energetico, che qui non è più valido vista la presenza di forze di attrito viscoso, che sono ovviamente non conservative.

Attraverso un modello che tiene conto dell'espressione della forza viscosa F_V a cui abbiamo accennato in un paragrafo precedente e che ne calcola gli effetti in un tubo di sezione circolare, quale quello che stiamo considerando, è possibile dimostrare che la differenza di pressione ΔP dipende in modo lineare dalla lunghezza L del tratto di tubo considerato e dalla viscosità η del fluido, ed è invece inversamente proporzionale alla sezione S del tubo. In altre parole, poiché, come vedremo meglio dopo, la differenza di pressione è in qualche modo una misura di "quanto è difficile" percorrere il tubo, otteniamo un risultato prevedibile con il buon senso: il fluido avrà maggiore difficoltà tanto più esso è viscoso e tanto più il tubo è lungo e stretto.

Quanto appena affermato ha la sua espressione quantitativa nella cosiddetta *legge di Hagen-Poiseuille* per il moto di un fluido viscoso in regime laminare (cioè tale che la distribuzione di velocità delle varie lamine segue l'andamento descritto nel paragrafo precedente). La legge stabilisce che la differenza di pressione ΔP è:

$$\Delta P = 8\pi \frac{\eta L}{S} \overline{v} \;, \tag{6.5}$$

dove, ripetiamo, η e $\overline{v}$ sono la viscosità e la velocità media del fluido, L ed S sono lunghezza e sezione del tubo considerato. Tenendo conto che per la portata in volume si ha, come detto, $Q_V = S\overline{v}$, la legge di Hagen-Poiseuille si può anche scrivere:

$$\Delta P = 8\pi \frac{\eta L}{S^2} Q_V \;. \tag{6.6}$$

6.7.3 Esercizio: un impianto di irrigazione

Supponente di dover realizzare un impianto idraulico in cui una pompa preleva acqua da un bacino e la trasporta, attraverso un tubo di sezione $S = 5.0$ cm^2 e lunghezza $L = 50$ m, in un canale di irrigazione. Supponete che tutti i componenti dell'impianto (bacino, tubo, canale) si trovino alla stessa quota, che la specifica del progetto sia di avere una portata $Q_V = 50$ l/s $= 5.0 \times 10^{-2}$ m^3/s, e che la pressione in uscita al tubo sia quella atmosferica ($P_{atm} \approx 1.0 \times 10^5$ Pa). Quanto deve valere la pressione generata dalla pompa sull'acqua che si trova all'inizio del tubo? (Prendete come viscosità dell'acqua il valore $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ Pa s, e ponete, ovviamente, che il regime del moto sia di tipo laminare)

Soluzione. Occorre applicare la legge di Hagen-Poiseuille, la quale ci dice che la differenza di pressione ΔP tra fine ed inizio del tubo deve valere: $\Delta P = 8\pi\eta L Q_V/S^2$. Sostituendo i valori numerici, e facendo attenzione che tutte le unità di misura siano "coerenti" fra loro, si ottiene $\Delta P \approx 2.5 \times 10^5$ Pa. Notate che questo valore si riferisce ad una *differenza* di pressione (spesso in idraulica viene chiamata *prevalenza*) e la pressione "assoluta" che la pompa deve imprimere all'acqua all'inizio del tubo si trova sommando questa differenza con la pressione in uscita, che è, secondo il testo, pari a P_{atm}, per cui si ha $P = \Delta P + P_{atm} \approx 3.5 \times 10^5$ Pa ≈ 3.5 bar.

6.7.4 Esercizio: le iniezioni

A tutti è noto che iniettare del liquido in un vaso sanguigno, richiede di applicare una certa pressione allo stantuffo della siringa. Allora, immaginiamo di avere una siringa con un ago di sezione $S = 1$ mm^2 e lunghezza $L = 5$ cm,[20] e di dover iniettare un volume $V = 5$ ml di liquido di viscosità $\eta = 10^{-2}$ Pa s in un tempo $\Delta t = 5$ s in un vaso che si trova a pressione $P_{vaso} \approx 10^5$ Pa, che è circa il valore della pressione atmosferica[21]. Quanto vale la pressione P che dobbiamo applicare allo stantuffo della siringa?

Soluzione. Supponendo di iniettare il liquido con una "velocità" costante, si ha $Q_V = V/Deltat$. Allora la differenza di pressione ΔP da imprimere al liquido, che coincide, per l'approssimazione fatta (vedi nota nel testo) con la pressione P da applicare allo stantuffo, è data dalla legge di Hagen-Poiseuille. Il valore numerico risulta $\Delta P \approx 1.2 \times 10^{-2}$ Pa (provate a ritrovare questo valore convertendo tutte le grandezze in unità coerenti fra loro).

6.7.5 Resistenza idraulica e tubi in serie e parallelo

L'Eq.6.6 può anche essere interpretata come una legge che stabilisce una proporzionalità diretta tra differenza di pressione ΔP e portata in volume Q_V. Al fattore di proporzionalità che lega le due grandezze si può dare il nome di *resistenza idraulica* $\mathcal{R}_{idr}$. Si ha: $\mathcal{R}_{idr} = 8\pi\eta L/S^2$, cioè la resistenza aumenta con l'aumentare di viscosità del fluido e lunghezza del tubo, e diminuisce all'aumentare della sezione del tubo stesso. Le unità di misura di $\mathcal{R}_{idr}$ sono Pa s/m^3, ed osserviamo che esse non sono particolarmente significative in termini fisici, mentre invece anticipiamo che il concetto di resistenza avrà un'importanza ben maggiore quando, nei prossimi paragrafi, lo trasferiremo al caso delle correnti elettriche.

In ogni caso, la resistenza idraulica è una grandezza che caratterizza in modo completo il comportamento di un condotto (ovvero di un *circuito idraulico*) quando questo viene attraversato da un fluido reale che si muove in regime laminare. Supponiamo ora di avere due tubi, che hanno resistenza idraulica rispettivamente $\mathcal{R}_{idr1}$ e $\mathcal{R}_{idr2}$.[22] Immaginiamo di collegare i tubi *uno dietro l'altro*: a questo arrangiamento si dà il nome di **collegamento**

[20] Trascuriamo gli effetti che si verificano nel corpo della siringa, che ha una sezione molto maggiore rispetto a quella dell'ago.

[21] Stiamo trascurando il valore della pressione del sanguigna del vaso, che è superiore rispetto alla pressione atmosferica per un valore tipicamente dell'ordine del centinaio di mmHg, equivalenti a qualcosa dell'ordine di 10^3 Pa. Trascuriamo questa pressione per semplificare i calcoli, tenendo conto che anche o stantuffo della siringa si trova alla stessa pressione.

[22] Le resistenze considerate possono anche essere uguali fra loro, come si avrebbe, ad esempio, se si considerassero due tratti di tubo identici, cioè con la stessa lunghezza e sezione, ma, per non perdere in generalità, supponiamo due resistenze di valore diverso.

in serie. Per ognuno dei due tubi possiamo scrivere quanto valgono le differenze di pressione ΔP_1 e ΔP_2 ai loro capi: si avrà $\Delta P_1 = \mathcal{R}_{idr1} Q_{V1}$ e $\Delta P_2 = \mathcal{R}_{idr2} Q_{V2}$, avendo indicato con Q_{V1} e Q_{V2} le portate rispettivamente attraverso il tubo 1 e il tubo 2. Ora, dato che *tutto* il fluido che passa nel tubo 1 deve necessariamente passare anche per il tubo 2, si ha $Q_{V1} = Q_{V2} = Q_V$, avendo indicato con Q_V la portata del sistema complessivo dei due tubi in serie. D'altra parte è anche chiaro che la differenza di pressione complessiva ΔP ai capi della serie dei due tubi deve essere pari alla somma della differenza di pressione ai capi del tubo 1 e del tubo 2, cioè $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2$; sostituendo le espressioni per le differenze di pressione e facendo un po' di algebra, si ottiene: $\Delta P = (\mathcal{R}_{idr1} + \mathcal{R}_{idr2}) Q_V$. Quindi si può determinare la resistenza idraulica complessiva $\mathcal{R}_{serie}$ del sistema di tubi in serie, che vale evidentemente $\mathcal{R}_{idr,serie} = \mathcal{R}_{idr1} + \mathcal{R}_{idr2}$, cioè è *la somma* delle resistenze dei due tubi[23]. Ancora una volta, notiamo che si tratta di un risultato del tutto ragionevole: se la resistenza indica la "difficoltà" che il fluido incontra nell'attraversare un condotto, in una serie di tubi il fluido dovrà affrontare una "somma di difficoltà".

Due tubi possono anche essere montati in un **collegamento in parallelo**; in questa configurazione i due tubi hanno inizio e fine in comune, cioè collegati assieme, e quindi la differenza di pressione è la stessa, cioè $\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P$. Invece la portata attraverso i due tubi non è necessariamente la stessa, e si ha che $Q_V = Q_{V1} + Q_{V2}$. D'altra parte deve essere, come prima, $Q_{V1} = \Delta P_1 / \mathcal{R}_{idr1}$ e $Q_{V2} = \Delta P_2 / \mathcal{R}_{idr2}$. Quindi, tenendo conto del fatto che la differenza di pressione è la stessa per i due tubi, si può scrivere: $Q_V = \Delta P(\frac{1}{\mathcal{R}_{idr1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{idr2}})$, da cui si può ricavare la resistenza idraulica complessiva del sistema dei due tubi in parallelo, $\mathcal{R}_{idr,par}$, per cui vale: $\frac{1}{\mathcal{R}_{idr,par}} = \frac{1}{\mathcal{R}_{idr1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{idr2}}$, cioè per un sistema in parallelo si sommano *i reciproci* delle resistenze dei costituenti[24]. Come risultato, la resistenza complessiva è minore di quella dei singoli tubi, compatibilmente con l'idea intuitiva che la "difficoltà" nel percorrere il circuito diminuisce se si offre al fluido la possibilità di percorrere più "strade". Vedremo nel prossimo capitolo alcune applicazioni nell'ambito dei circuiti elettrici di quanto abbiamo qui affermato.

[23] Il risultato si generalizza facilmente ad una serie con un numero di arbitrario di componenti, e la resistenza complessiva è allora data dalla somma di tutte le resistenze

[24] Il risultato si generalizza facilmente ad un parallelo di un numero arbitrario di tubi: il reciproco della resistenza idraulica complessiva è pari alla somma dei reciproci delle resistenze idrauliche dei singoli tubi