Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2005/06
parte nuova di Meccanica del Corpo Rigido

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3 (già Via Buonarroti 2), 56127 Pisa

versione 4a - 04.04.06

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Capitolo 1

Movimento di corpi estesi

La meccanica che abbiamo considerato finora ci ha permesso di definire le leggi che regolano il moto di punti materiali, o di sistemi che possono essere considerati come punti. Idealmente, un punto non ha dimensioni fisiche, e quindi l'unico moto a cui può essere soggetto è quello di *traslazione* (la posizione del punto percorre una traiettoria che è una curva continua).

La realtà ci insegna che, in tantissimi casi che coinvolgono sistemi *estesi* (dotati di dimensioni), il movimento non coinvolge solo traslazioni, ma anche *rotazioni*, che talvolta si compongono tra loro dando luogo a moti parecchio complessi. In questo capitolo ci occupiamo brevemente del moto di corpi estesi, in particolare dei *corpi rigidi*. Nel nostro approccio cercheremo di scivere qualcosa di analogo alle leggi che abbiamo visto per i punti materiali, facendo in modo di costruire un approccio simile che valga per i corpi rigidi. Finora abbiamo sostanzialmente[1]:

- definito la massa come caratteristica del punto materiale;
- stabilito l'energia cinetica e le leggi di bilancio che ne fanno uso;
- scritto la legge fondamentale del moto (il principio di Newton);
- definito la quantità di moto e sfruttato principi di conservazione.

Vedremo ora come i metodi ed i concetti espressi in ognuno di questi punti possono essere estesi per trattare il moto dei corpi rigidi.

1.1 Centro di massa per sistemi continui

Un **corpo rigido** è, per definizione, un sistema materiale (cioè dotato di massa) con la caratteristica che tutti gli elementini in cui esso può essere idealmente suddiviso hanno una distanza reciproca che si mantiene costante ed inalterata. Un esempio elementare di corpo rigido è un insieme di punti materiali collegati tra loro da aste di massa trascurabile, che

[1] L'elenco non è in ordine cronologico, ma è funzionale al contenuto di questo capitolo.

costituiscono un sistema *discreto* (le masse si trovano in posizioni discrete, cioè separate fra loro, e reciprocamente fissate). Anche se talvolta useremo questo tipo di sistemi, è chiaro che di interesse pratico maggiore sono i cosiddetti sistemi materiali *continui*, in cui la materia, cioè la massa, è distribuita in modo continuo nello spazio. Essi saranno in genere descritti dalla *densità di massa* ρ_m,[2] che abbiamo già definito come:

$$\rho_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \ . \tag{1.1}$$

Questa definizione tiene conto della possibilità che la distribuzione di massa sia non omogenea ed uniforme[3], cioè, formalmente, detta $\vec{r}$ la posizione di un punto del corpo rispetto ad una qualche origine, che sia $\rho_m(\vec{r}) = \mathrm{d}m(\vec{r})/\mathrm{d}V$.

Notate che, affinché questi sistemi possano essere considerati dei corpi rigidi durante un qualche processo, occorre che la distanza reciproca fra i vari elementini di volume (e quindi di massa) in cui possono essere *idealmente* suddivisi rimanga costante ed inalterata durante il processo considerato. Molti campioni di materiale solido costituiscono una buona approssimazione per corpi rigidi, almeno finché i processi considerati non sono troppo "violenti". Per intenderci, un pezzo di metallo è una buona approssimazione di corpo rigido in tante situazioni, ma l'approssimazione non vale più se mettiamo lo stesso pezzo di metallo sotto una trancia, che lo fa a pezzettini. Anche senza arrivare a processi distruttivi, occorre molto spesso tenere conto dell'**elasticità** del materiale, che in questi appunti non trattiamo, la quale sotto l'azione di una forza esterna può modificare la distanza reciproca fra elementini del corpo.

Abbiamo già definito in precedenza il **centro di massa** per un sistema discreto come un punto particolare il cui vettore posizione $\vec{r}_{CM}$ è dato dall'equazione:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma_i \vec{r}_i m_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i \vec{r}_i m_i}{M} \ , \tag{1.2}$$

dove la somma è estesa su tutti gli elementi di massa m_i che compongono il sistema, e che si trovano in posizione $\vec{r}_i$ (questi vettori sono spiccati da una certa origine, che è la stessa rispetto alla quale andrà considerato il vettore $\vec{r}_{CM}$), e $M = \Sigma_i m_i$ è ovviamente la massa totale del sistema.

Nel caso di un corpo rigido continuo, l'Eq. 1.2 deve essere ovviamente adeguata per tenere conto della natura continua del sistema. Questo genere di adeguamento segue le regole che, in fisica, si applicano molto spesso. In sostanza si può immaginare di suddividere idealmente il corpo in tanti elementini, di dimensioni *infinitesime*. Ognuno di questi elementini avrà un piccolo volume, che indichiamo con $\mathrm{d}V$, a cui corrisponderà un altrettanto piccola quantità di massa, che indichiamo con $\mathrm{d}m$. Inoltre, dato che la suddivisione ideale in elementini infinitesimi fa sì che il loro numero tenda ad infinito, la sommatoria di Eq. 1.2 diventerà formalmente un'integrale. Tenendo conto della definizione di densità di massa, si ha sempre $\mathrm{d}m = \rho_m \mathrm{d}V$. Avremo quindi:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{massa} \vec{r} \mathrm{d}m}{\int massa \mathrm{d}m} = \frac{\int_{volume} \vec{r} \rho_m \mathrm{d}V}{\int_{volume} \rho_m \mathrm{d}V} \ . \tag{1.3}$$

[2] Qualche volta ci dimenticheremo del pedice m!

[3] Per corpi omogenei ed uniformi è semplicemente $\rho_m = m/V$.

Gli integrali che abbiamo scritto vanno intesi esattamente in base alla loro definizione, che è quella di *somma su inifiniti elementi infinitesimi*. Quindi fare l'integrale non significa, solo e soltanto, applicare un operatore matematico ad una funzione (cioè trovare la "primitiva" della funzione stessa), cosa che può sulle prime creare qualche problema; ad esempio, gli estremi di integrazione non sono facilmente esprimibili come valori di una variabile, e per questo motivo nell'Eq. 1.3 li abbiamo indicati con i pedici *massa*, *volume*, che servono per ricordarci che la somma (cioè l'integrale) va estesa sull'intero sistema considerato. Per meglio capire il significato dell'integrazione, tenete anche presente che, essendo M la massa totale del sistema, si ha:

$$M = \int massa \mathrm{d}m = \int volume \rho_m \mathrm{d}m \; . \tag{1.4}$$

Notate qui due aspetti importanti. In primo luogo l'integrando di Eq. 1.3 è un vettore, e questo, normalmente, significa che l'espressione deve essere intesa componente per componente. Di conseguenza, quando un sistema giace nello spazio reale (a tre dimensioni), dovremo in genere eseguire tre operazioni di integrazione, ovvero risolvere tre integrali, uno per ognuna delle componenti cartesiane di $\vec{r}_{CM}$. Inoltre l'integrazione nel volume, che è ben definita dal punto di vista matematico, può essere un'operazione di una certa complessità, dato che implica di svolgere in generale un integrale "triplo". Per esempio, quando la funzione $\rho_m(\vec{r})$ dipende da più di una variabile spaziale, cioè in tutti quei casi in cui il corpo non è omogeneo ed uniforme e ρ_m dipende da più di una coordinata, il problema di determinare $\vec{r}_{CM}$ può essere relativamente difficile da risolvere. Vedremo tra breve che gli integrali che servono in questo ambito possono essere spesso ricondotti a integrali in una sola dimensione, cioè quelli "ordinari". Questo è sicuramente vero quando si ha a che fare con sistemi dotati di *simmetrie* spaziali (ad esempio, sbarrette, cilindri, sfere, etc.), che sono quelli di maggiore interesse per noi. Notate anche che talvolta , quando ad esempio si devono esaminare sistemi a geometria piana (delle superfici), è possibile che l'integrale di volume venga "naturalmente" sostituito con un integrale a dimensione minore, per esempio di superficie, come vedremo in qualche esempio.

Ferma restando la definizione di $\vec{r}_{CM}$, vale la pena di ricordare che, quando il sistema è omogeneo ed uniforme, ovvero nelle direzioni in cui il sistema è omogeneo ed uniforme, cioè quando ρ_m è una costante, allora è semplice individuare la posizione del centro di massa, che corrisponde al *centro geometrico* del sistema[4]. Per esempio, in una sfera omogenea il centro di massa giace nel centro, in una sottile sbarra omogenea si trova "a metà" della sbarra stessa, e così via.

Il centro di massa gioca un ruolo fondamentale nello studio della dinamica del sistema. Infatti, come dimostreremo tra breve, quando un corpo rigido è sottoposto a delle forze *esterne*, il centro di massa *trasla* sotto l'azione di queste forze come se fosse un punto materiale dotato di massa M (la massa totale del corpo). Di conseguenza, i problemi di dinamica del corpo rigido possono essere risolti in due "fasi", volte ad individuare rispettivamente le caratteristiche del moto *traslazionale* e *rotazionale*. Quanto affermato

[4]Più precisamente, il centro di massa coincide con l'intersezione degli assi di simmetria della figura geometrica che rappresenta il sistema.

corrisponde a dire che la traslazione del corpo rigido equivale a quella di un punto materiale che ha tutta la massa del corpo e si trova nella posizione del centro di massa.

Vediamo di mostrare che questa affermazione, molto importante per i suoi risvolti pratici, è vera. Cominciamo con il ricordare che, come nel caso di un sistema discreto, si ha per velocità ed accelerazione del centro di massa, formalmente:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\int_{volume} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\rho_m \mathrm{d}V}{\int_{volume} \rho_m \mathrm{d}V} \; \vec{a}_{CM} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{CM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\int_{volume} \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\rho_m \mathrm{d}V}{\int_{volume} \rho_m \mathrm{d}V} \; . \tag{1.5}$$

Consideriamo ora un corpo rigido sottoposto ad una forza $\vec{F}$,[5] e suddividiamolo idealmente in elementini. Su ogni elementino agirà una forza *infinitesima* $\mathrm{d}\vec{F}$ che, per il principio di Newton applicato ad ogni singolo elementino di massa $\mathrm{d}m$, deve essere $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{a}\mathrm{d}m$, avendo indicato con $\vec{a}$ l'accelerazione del singolo elementino. Formalmente si ha allora:

$$\vec{F} = \int_{corpo} \mathrm{d}\vec{F} = \int_{massa} \vec{a}\mathrm{d}m = \int_{massa} \mathrm{d}m\vec{a}_{CM} = M\vec{a}_{CM} \; . \tag{1.6}$$

Quindi ai fini traslazionali il corpo rigido si comporta come un punto materiale la cui posizione è espressa da $\vec{r}_{CM}$ e la cui massa corrisponde alla massa totale M del corpo. Notate che, se ci sono diverse forze che agiscono sul corpo, per esaminarne la dinamica *traslazionale* non occorre tenere conto di dove queste forze sono applicate; vedremo invece che questo sarà un elemento determinante per la dinamica rotazionale. Osservate anche che quanto affermato vale quando la forza è di origine gravitazionale, cioè per la forza peso, e in questo caso il centro di massa prende spesso il nome di **baricentro**.

1.1.1 Esercizio: una sbarretta che trasla

Supponete di avere una sottile sbarretta *omogenea* di massa M, lunghezza L e sezione di area (trascurabile) S che può muoversi senza attrito sul piano orizzontale XY. Agli estremi della sbarretta sono collocate due cariche elettriche puntiformi, di massa trascurabile, e valore q_1 e q_2. Sul piano agisce un campo elettrico uniforme e costante $\vec{E}$, diretto lungo la bisettrice del piano XY (cioè ad un angolo $\theta = 45$ gradi rispetto all'asse X) e di ampiezza E. All'istante iniziale $t_0 = 0$ la sbarretta si trova ferma ed allineata con l'asse X, in modo che un suo estremo si trova nella coordinata $x = 0$, e l'altro nella coordinata $x = L$. Come si scrive la legge oraria del moto del centro di massa della sbarretta?

Soluzione. Essendo la sbarretta omogenea dal punto di vista della distribuzione di massa, il centro di massa si trova evidentemente al centro geometrico della sbarretta stessa. La posizione iniziale del centro di massa è allora: $x_{CM,0} = L/2$, $y_{CM,0} = 0$ (abbiamo trascurato la sezione della sbarretta). Poiché il moto avviene su un piano orizzontale senza attriti, la forza di gravità non contribuisce alla dinamica essendo sempre equilibrata dalla reazione vincolare. Le uniche forze che agiscono sono quelle di natura elettrica tra campo e cariche. Si ha quindi $\vec{F} = q_1\vec{E} + q_2\vec{E}$, cioè, componente per componente e tenendo

[5] Chiaramente indichiamo con $\vec{F}$ la forza *totale* che agisce sul corpo (la "risultante delle forze), cioè, nel caso in cui ci siano diverse forze $\vec{F}_i$ che agiscono sul corpo, si ha $\vec{F} = \Sigma_i \vec{F}_i$.

conto dell'orientazione del campo elettrico: $F_X = (q_1 + q_2)E_X = (q_1 + q_2)E\cos\theta$ ed $F_Y = (q_1 + q_2)E_Y = (q_1 + q_2)E\sin\theta$. Queste forze sono costanti ed uniformi, per cui il moto di traslazione del centro di massa è uniformemente accelerato nella direzione di $\vec{E}$. Si ha quindi $x_{CM}(t) = L/2 + (F_X/(2M))t^2$, $y_{CM}(t) = (F_Y/(2M))t^2$, avendo tenuto presenti le condizioni iniziali del moto come specificate nel testo del problema. Notate ancora che in questo problema abbiamo semplicemente sommato (vettorialmente) fra loro le forze sulla sbarretta, anche se queste agivano su punti diversi!

1.1.2 Come si può "integrare sul volume" (e "sulla superficie")

Prima di proseguire nella definizione delle leggi per il moto rotazionale, conviene soffermarsi su alcune semplici regole che ci verranno spesso in aiuto per il calcolo di integrali di volume (e di superfici) in geometrie dotate di simmetrie rilevanti. Il problema fondamentale che si incontra in questi casi è quello di esprimere nel modo giusto l'elementino di volume (o di superficie) che serve per ridurre l'integrale ad un'integrale a una dimensione, che tutti sappiamo calcolare. Ovviamente questa "riduzione" della difficoltà del problema non può essere generalizzata a casi qualsiasi; fortunatamente, però, la maggior parte dei casi di interesse prevede proprio sistemi dotati di geometrie simmetriche.

Ricordatevi che la nozione di *simmetria* può essere facilmente (e vantaggiosamente) collegata a quella di *invarianza*. Vediamo alcuni casi esemplificativi.

- Diciamo che la simmetria è 'emphlineare quando le grandezze che caratterizzano il sistema possono dipendere solo da una coordinata cartesiana; nel caso in cui la geometria considerata giaccia nello spazio a tre dimensioni, si intende che per le altre due coordinate cartesiane ci sia invarianza, cioè le grandezze del sistema non dipendono dal valore di queste due coordinate.

- Parleremo di simmetria *circolare* quando le grandezze del sistema possono dipendere solo dalla distanza da un punto (il centro); c'è quindi invarianza rispetto alla variabile angolare (ricordate i sistemi di coordinate polari!).

- Come estensione della precedente, se siamo nello spazio tridimensionale e troviamo invarianza anche rispetto ad una coordinata cartesiana (l'asse di un cilindro di cui il cerchio è una sezione), abbiamo simmetria *cilindrica*.

- Infine, la simmetria si dice *sferica* quando c'è invarianza rispetto a due variabili angolari (ricordate il sistema di coordinate sferiche).

Nelle situazioni di elevato grado di simmetria è in genere facile scrivere l'elemento di volume in modo che esso dipenda da una sola coordinata (non necessariamente cartesiana). Consideriamo ad esempio una sbarretta di sezione S; identificando il suo asse con la direzione dell'asse X, avremo che la simmetria lineare implica che le grandezze che caratterizzano il sistema (ad esempio, la densità di massa, oppure, come vedremo, la densità di carica, di corrente e quant'altro) possono dipendere solo da x. Allora l'elemento di volume si può esprimere come $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$, che, appunto, dipende dalla sola coordinata x.[6]

Vediamo il caso cilindrico; supponiamo per chiarezza di avere a che fare con un cilindro di altezza h, e chiamiamo r la distanza di un punto generico del cilindro dal suo asse. Le grandezze del sistema possono dipendere solo da r. L'elemento di volume può essere individuato nel piccolo volume occupato da un *guscio* cilindrico di raggio interno r generico, raggio esterno $r + \mathrm{d}r$ (lo "spessore" del guscio è infinitesimo, e vale $\mathrm{d}r$) ed altezza h. Il volumetto di questo cilindro può essere stimato ("al primo ordine") come quello di un prisma che ha area di base $2\pi rh$ ed altezza $\mathrm{d}r$, cioè si ha $\mathrm{d}V = 2\pi r\mathrm{d}r$.[7]

Nel caso sferico possiamo ragionare in termini simili a quelli adottati per il cilindro. Anche qui le grandezze che caratterizzano il sistema possono dipendere solo da r. In questo caso, però, non avremo un guscio cilindrico, bensì sferico, con raggio interno r e raggio esterno $r + \mathrm{d}r$. Quindi l'area di base del prisma varrà $4\pi r^2$ ed avremo allora $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$.

Infine, per completezza, vediamo il caso di simmetria circolare, che si riferisce ovviamente a un problema a due dimensioni. Quello che si deve determinare è allora un elemento di superficie, $\mathrm{d}S$, che può essere individuato nell'area di un sottile anello, di raggio interno r e raggio esterno $r + \mathrm{d}r$ e superficie $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$. In pratica, cioè, otteniamo la superficie di base del guscio cilindrico che era elemento di volume nel problema a simmetria cilindrica.

Vediamo di applicare alcune di queste affermazioni in calcoli di massa e centri di massa (vedremo altre applicazioni più in là in questo capitolo).

1.1.3 Sbarretta disomogenea

Avete una sottile sbarretta di sezione di area S e lunghezza L, disposta lungo l'asse X in modo che un suo estremo si trovi in $x = 0$ e l'altro in $x = L$. La sbarretta è disomogenea, e infatti la sua densità di massa dipende dalla distanza da un estremo (cioè dalla coordinata X) secondo la legge: $\rho_m(x) = \rho_0 x/L$, con ρ_0 costante. Quanto vale la massa M? Dove si trova il centro di massa?

Soluzione. Il problema ha chiaramente simmetria lineare. La massa si determina allora invertendo la definizione di densità di massa, cioè dalla $M = \int_{massa} \mathrm{d}m = \int_{volume} \rho_m \mathrm{d}V$. Questa espressione, sostituendo l'espressione dell'elemento di volume appropriato, dà luogo ad un semplice integrale lungo X esteso sulla sbarretta: $M = \int_{volume} \rho_m(x)\mathrm{d}V = \int_0^L \rho_m(x)S\mathrm{d}x = \int_0^L \rho_0(x/L)S\mathrm{d}x = \rho_0(S/L)\int_0^L x\mathrm{d}x = \rho_0 S(L/2)$, dove abbiamo usato l'espressione di ρ_m data nel testo ed abbiamo integrato la "funzione" x in $\mathrm{d}x$ così come sappiamo fare.

Per il calcolo del centro di massa occorre servirsi della definizione opportuna: $x_{CM} =$

[6] In sostanza è come se, per determinare l'elemento di volume, avessimo già "integrato lungo le direzioni trasverse" (la Y e la Z).

[7] Per rendervi conto di cosa sia questo prisma, pensate che il vostro sottile guscio cilindrico sia un tubo di gomma; se incidete il tubo in direzione parallela al suo asse e lo stendete su un piano, ottenete proprio un sottile prisma che ha, all'incirca, il volume che abbiamo considerato.

$(\int_{massa} x\mathrm{d}m)/M = (\int_0^L x\rho_m(x)\mathrm{d}V)/M = (\rho_0 S/(ML))\int_0^L x^2\mathrm{d}x = (\rho_0 S/(ML))(L^3/3) = (2/3)L$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il risultato precedente. Come vedete, il centro di massa, che, nel caso omogeneo, si sarebbe trovato a distanza $L/2$ dall'estremo, qui si sposta "più lontano"[8].

1.1.4 Esercizio: centro di massa di un cilindro disomogeneo

Un cilindro di raggio R ed altezza h è realizzato con un materiale disomogeneo, caratterizzato da una densità di massa che dipende dalla distanza r rispetto all'asse secondo la legge $\rho_m = \rho_0 R/r$ (in pratica la densità tende a diventare infinita in prossimità dell'asse, per poi diminuire verso la periferia). Dove si trova il centro di massa del cilindro?

Soluzione. Vediamo di capire cosa si può verificare senza fare calcoli. Intanto, il sistema ha sicuramente simmetria cilindrica, dato che la grandezza che lo caratterizza (ρ_m) dipende solo dalla distanza r rispetto all'asse. Essa, quindi, non dipende dalla variabile angolare, né da quella assiale (che qui porremo lungo l'asse Z). Le considerazioni di simmetria ci suggeriscono che il centro di massa deve continuarsi a trovare al "centro" (geometrico) del sistema, perché la disomogeneità non rompe la simmetria cilindrica. Quindi il centro di massa apparterrà all'asse, e si troverà a metà dell'altezza del cilindro. Se volete, potete provare a determinare la posizione del centro di massa secondo le regole che abbiamo stabilito prima: questo è ovviamente possibile, ma richiede una certa attenzione per non cadere in errori dovuti al carattere vettoriale della grandezza in questione. Come consiglio, si impara che, quando possibile, è sempre meglio servirsi di questioni di simmetria e geometria!

1.1.5 Esercizio: il volume della sfera

Tutti sapete (dovete sapere!) che la sfera di raggio R ha volume $V = (4/3)\pi R^3$. Ora che abbiamo stabilito qualcosa sull'integrazione a più dimensioni, e tenendo conto che il volume deve discendere da una qualche operazione di integrale, siamo in grado di trovare questo noto risultato attraverso il calcolo?

Soluzione. Se pensate al significato dell'operazione di integrale, vedete subito come si possa scrivere, formalmente: $V = \int_{volume} \mathrm{d}V$. Ora, la sfera è certamente un sistema a simmetria sferica, per cui certamente si può porre $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$; quindi l'integrale diventa $V = \int_0^R 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\pi R^3/3$, come doveva uscire.

1.2 Il prodotto vettoriale

Uno strumento matematico caratteristico dello studio dei moti rotazionali è il **prodotto vettoriale**. Dati due vettori (generici) $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si definisce il loro prodotto vettoriale (o

[8]Notate che tutto quello che qui abbiamo risolto avremmo potuto determinarlo anche in funzione di una *densità lineare di massa*, formalmente definibile come $\lambda_m(x) = \rho_m(x)S$ e dotata delle dimensioni di una massa su una lunghezza.

prodotto vettore) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ come un *vettore* che ha[9]: direzione ortogonale a quella di entrambi i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$; verso determinato attraverso la *regola della mano destra* (vedi dopo); modulo dato dal prodotto $|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ θ essendo l'angolo compreso tra le direzioni di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

La regola della mano destra stabilisce in sostanza che disponendo pollice, indice e medio della mano destra come se fossero gli assi di un sistema cartesiano (destrorso), allora pollice, indice e medio rappresentano direzione e *verso* dei vettori rispettivamente $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, che quindi formano una terna ortogonale destrorsa.

Notate delle ovvie grosse differenze tra prodotto vettoriale e prodotto scalare (che avevamo già definito qualche capitolo addietro): quest'ultimo dà come risultato uno scalare (come dice il nome!) che è massimo quando i vettori da moltiplicare tra loro sono mutuamente paralleli. Il prodotto vettoriale dà invece un vettore il cui modulo è massimo quando i vettori di partenza sono ortogonali fra loro. Inoltre, ragionando ad esempio sulla regola della mano destra, si può vedere che il prodotto vettoriale non gode di proprietà commutativa, dato che $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (anzi, si tratta di un prodotto anticommutativo).

Spesso, quando sono note le componenti cartesiane dei vettori di partenza, conviene sfruttare una tecnica per il calcolo del vettore prodotto (meglio, delle sue componenti cartesiane) che si basa sullo scrivere una sorta di matrice 3×3 costruita in questo modo: la prima riga riporta i versori degli assi cartesiani (ad esempio $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, [10]nella seconda si scrivono le componenti del primo vettore da moltiplicare, per intenderci a_X, a_Y, a_Z, e nella terza quelle del secondo vettore da moltiplicatre, cioè b_X, b_Y, b_Z. A questo punto il vettore prodotto si trova, componente per componente, usando la stessa tecnica che si sfrutta per calcolare il determinante della matrice, cioè attraverso le cosiddette "matrici ridotte".

1.2.1 Esercizio: le componenti del prodotto vettoriale

Vediamo di applicare questo metodo al calcolo del prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{a} = (a_X, a_Y, a_Z)$ e $\vec{b} - (b_X, b_Y, b_Z)$. Che direzione ha il prodotto $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ quando $a_X = a_Z = 0$? E quando $a_X = a_Y = a_Z = a$ e $b_X = b_Y = b_Z = b$?

Soluzione. Se applichiamo il metodo del determinante della matrice (provateci!), troviamo: $c_X = a_Y b_Z - a_Z b_Y$, $c_Y = -a_X b_Z + a_Z b_X$, $c_Z = a_X b_Y - a_Y b_x$. Dunque, nel primo dei due casi propostim si vede subito che $c_Y = 0$, ed infatti il vettore risultato, dovendo essere ortogonale a entrambi quelli di partenza, ed essendo $\vec{a}$ parallelo all'asse Y, non può avere componenti lungo Y (sarà su un piano ortogonale all'asse Y). Nel secondo caso si vede che $c_X = c_Y = c_Z = 0$, ed infatti i due vettori da moltiplicare sono paralleli fra loro.

[9]Talvolta il prodotto vettoriale si indica come $\vec{c} = \vec{a} \bigwedge \vec{b}$.

[10]I versori delle tre direzioni cartesiane si chiamano spesso anche $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.

1.2.2 Velocità angolare vettoriale

Trattando del moto circolare di un punto materiale[11], abbiamo già introdotto le grandezze velocità ed accelerazione angolare, rispettivamente $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ e $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$, dove con θ indichiamo la variabile angolare che parametrizza la posizione del punto. Già in quella sede annunciammo che, talvolta, conviene esprimere queste grandezze in *forma vettoriale*. In sostanza, si tratta di attribuire loro una direzione e un verso.

Ora questa precisazione può tornarci utile, e quindi vediamo come si può attribuire direzione e verso alla velocità angolare. Diremo che la direzione è *ortogonale* al piano dell'orbita (circolare) ed il verso è positivo per una rotazione antioraria e negativo per una oraria. Questa convenzione sul segno corrisponde ad un'altra formulazione della regola della mano destra: se immaginate di avere una vite e di avvitarla girando nel verso della rotazione del moto, allora il verso positivo è quello in cui la vite avanza (si avvita). Abbiamo così creato il vettore $\vec{\omega}$.

Le stesse considerazioni, poi, potranno anche essere applicate per definire il vettore $\vec{\alpha}$, avendo l'accortezza di sostituire nel ragionamento la velocità (angolare) allo spostamento (angolare).

Avendo dato queste definizioni, è possibile dimostrare la seguente relazione che vale tra velocità angolare del punto, $\vec{\omega}$, velocità lineare (*tangenziale*), $\vec{v}$, e *raggio vettore*, $\vec{r}$ (si tratta del vettore che parte dal centro dell'orbita e raggiunge la posizione istantaneamente occupata dal punto sull'orbita circolare): $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Ricordando che, per un'orbita circolare, raggio vettore e velocità tangenziale sono sempre ortogonali fra loro ed appartengono entrambi al piano dell'orbita, potete provare a verificare che questa espressione è coerente con la scelta dei segni che abbiamo stabilito e con l'espressione dati per i moduli, che avevamo già scritto nella forma $v = \omega r$. Analogamente, detta $\vec{a}$ l'accelerazione *tangenziale* (non la centripeta!) del punto, si ha $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$. D'altra parte entrambe le affermazioni possono essere dedotte a partire dalla relazione tra variabile spostamento angolare del punto, $\Delta\theta$, e corrispondente spostamento lineare ΔS (cioè quello misurato in metri compiuti lungo la circonferenza), che recita, per i moduli: $\Delta S = \Delta\theta r$. Infatti, per trovare le relazioni che legano fra di loro velocità ed accelerazioni angolari e lineari basta operare di derivata rispetto al tempo, e, essendo il raggio dell'orbita r una costante (se il moto è circolare), si ottengono facilmente le espressioni appena scritte.

[11] Ponete attenzione su di un punto, che è abbastanza cruciale, ma molto semplice: quando un punto percorre una circonferenza sta compiendo un moto di rotazione, ma in questo capitolo ci occupiamo espressamente di un *corpo rigido* che sta ruotando attorno ad un asse, che eventualmente può attraversare il corpo stesso. Dunque le situazioni sono ben diverse, anche se, come vedremo, diverse definizioni e molte conclusioni ed affermazioni possono essere condivise in entrambi i casi. Se volete, potete considerare il moto circolare di un punto come un esempio semplicissimo di moto di rotazione di un corpo rigido, costituito da *un solo punto materiale* (e quindi un po' singolare...), attorno ad un asse passante per il centro dell'orbita ed ortogonale a questa.

1.3 Momento di inerzia ed energia cinetica rotazionale

Siamo finalmente in grado di individuare l'"analogo" *rotazionale* della semplice espressione $E_K = (m/2)v^2$ che stabilisce l'energia cinetica *traslazionale*. Questo è il primo passo della nostra ricerca delle leggi per il moto di rotazione. L'espressione che andiamo cercando per l'energia cinetica sarà formalmente simile a quella appena scritta, ma dovrà contenere, al posto della velocità (lineare, cioè traslazionale) v, la velocità angolare ω cha apparirà al quadrato. Fosse altro che per ragioni dimensionali, il fattore moltiplicativo non può però più essere la massa m del punto, ma dovremo individuare un'altra grandezza (scalare) caratteristica del corpo rigido e della sua rotazione attorno ad un dato asse. Tale grandezza, che si chiama **momento di inerzia** ed ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato (unità di misura Kg m^2), la indicheremo con il simbolo I, e scriveremo:

$$E_{K,rot} = \frac{I}{2}\omega^2 \ , \tag{1.7}$$

dove, aggiungendo il pedice rot, vogliamo sottolineare che si tratta di un'energia cinetica dovuta ad un moto di rotazione.

Il momento di inerzia di un corpo rigido *discreto* è definito come $I = \Sigma_i m_i r_i^2$, dove m_i è la massa elementare di ognuno dei costituenti il corpo, ed r_i è la distanza tra l'elemento di massa i-esimo ed il **polo di rotazione**. Il polo di rotazione, una definizione che useremo ampiamente in questo capitolo, rappresenta l'intersezione tra l'asse attorno a cui avviene la rotazione (che può ovviamente attraversare o meno il corpo rigido sotto esame) e il piano a cui appartengono gli elementi di massa che si stanno prendendo in considerazione nella sommatoria. Come esempio, esaminiamo il caso (limite) del punto materiale di massa m in rotazione circolare uniforme su un'orbita di raggio R. In questo caso $I = mR^2$ (la sommatoria ha un solo elemento!), ed $E_{K,rot} = (I/2)\omega^2 = (m/2)(\omega R)^2 = (m/2)v^2$ è proprio l'energia cinetica del punto, che sapevamo perfettamente calcolare già dalla cinematica.

Nel caso di un corpo rigido *continuo*, ragionando come abbiamo fatto prima per il centro di massa, si trova:

$$I = \int_{massa} r^2 \mathrm{d}m = \int_{volume} r^2 \rho_m \mathrm{d}V \ . \tag{1.8}$$

Notate quindi che il calcolo di I non presuppone di conoscere le proprietà dinamiche del corpo, e quindi I è a tutti gli effetti una *caratteristica del corpo*, che può essere determinata a priori per ogni corpo rigido. Inoltre, come vedete ci sono delle similitudini fra calcolo di $\vec{r}_{CM}$ e calcolo di I, anche se in genere quest'ultimo è più semplice a causa della sua natura scalare (basta calcolare un solo integrale!).

Vediamo di dimostrare che la definizione di Eq. 1.8 conduce all'espressione Eq. 1.7. Allo scopo, suddividiamo un corpo rigido in rotazione con velocità angolare ω attorno ad un qualche asse in tanti elementini di massa dm (e volume corrispondente dV, tale che, detta ρ_m la densità di massa del corpo, si ha d$m = \rho$dV). Ognuno di questi elementini può essere considerato come un punto materiale di massa dm che sta compiendo un moto circolare con un certo raggio r generico attorno al polo di rotazione. Dunque, ogni elemento contribuisce all'energia cinetica con un termine infinitesimo $dE_K = (1/2)v^2 dm$, con v velocità *lineare* di ogni elementino. Per l'energia cinetica totale del corpo possiamo scrivere, sempre ricordando il significato dell'operazione di integrazione: $E_K = (1/2)\int_{massa} v^2 dm = (1/2)\int_{volume} v^2 \rho_m dV$. Ma, nel caso di moto circolareche stiamo considerando per ogni elemento di massa, $v = \omega r$, con, attenzione, ω uniforme per tutto il corpo. Quindi possiamo scrivere: $E_K = (1/2)\int_{volume} v^2 \rho_m dV = (1/2)\omega^2 \int_{volume} r^2 \rho_m dV$, dove abbiamo sfruttato la costanza di ω rispetto alle variabili di integrazione, che ci consente di "portarla fuori" dal segno di integrale. A questo punto è facile notare che l'integrale ottenuto corrisponde proprio alla definizione di I, come volevamo mostrare.

Osservate che l'espressione di I contiene un'ovvia dipendenza dal polo di rotazione. Infatti la scelta del polo di rotazione determina il valore che assume la variabile r. In questo ambito vale la pena di citare una conseguenza del cosiddetto *teorema degli assi paralleli*. Supponiamo di conoscere il valore di I_{CM}, cioè del momento di inerzia rispetto ad un asse di rotazione che passa per il centro di massa del corpo rigido. Proponiamoci ora di calcolare I rispetto ad un asse parallelo al primo, ma che si trova a distanza D. Usando una dimostrazione un po' complicata, che si trova sui testi di fisica, si ottiene $I = I_{CM} + MD^2$. Questa espressione può essere utile per calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse nel caso in cui se ne conosca il valore rispetto al centro di massa.

1.3.1 Esercizio: momento di inerzia di un rotatore rigido

Avete due masse m puntiformi collegate da un'asta rigida di lunghezza L e massa trascurabile. Quanto vale il momento di inerzia I_{CM} per una rotazione attorno ad un asse ortogonale all'asta e passante per il centro di massa? E quanto vale il momento di inerzia I per una rotazione attorno ad un asse parallelo al precedente ma passante per la posizione di una delle due masse?

Soluzione. Si tratta evidentemente di un semplice corpo rigido discreto, fatto di due sole masse puntiformi. Il centro di massa si trova a metà dell'asta, per ragioni di simmetria, e quindi $I_{CM} = m(L/2)^2 + m(L/2)^2 = mL^2/2$. Per quanto riguarda il momento rispetto all'asse passante per una delle due masse, si può applicare il teorema degli assi paralleli, che dà $I = I_{CM} + MD^2 = mL^2/2 + (2m)(L/2)^2 = mL^2$ In alternativa, è facile rendersi conto che, scegliendo la posizione di una delle masse come polo, questa massa non dà contributo al momento di inerzia, che quindi è dato solamente dall'altra massa e quindi vale $I = mL^2$.

1.3.2 Esercizio: momento di inerzia di un cerchione di bicicletta

Un sottile cerchione di bicicletta (senza raggi, senza valvola, etc.) può essere modellato come un sottile guscio cilindrico omogeneo. Supponendo che il raggio del cerchione sia R e la sua massa sia M, quanto vale il momento di inerzia rispetto al centro (cioè per rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano del cerchione e passante per il suo centro)?

Soluzione. Anche questo, grazie alle ipotesi fatte per costruire il modello, è un caso molto semplice da trattare. Infatti, poiché si suppone che il cerchione sia sottile, si ha che tutta la massa è distribuita alla distanza rispetto al polo di rotazione, distanza che coincide con il raggio R. In pratica è come se, nel calcolare l'integrale di volume della definizione di I, l'integrando fosse diverso da zero solo su una circonferenza. Pertanto si può affermare che $I = MR^2$.

1.3.3 Esercizio: momento di inerzia di dischi omogenei e non

Un disco non è altro che un cilindro di altezza generalmente ridotta. Supponiamo di avere due dischi con lo stesso raggio R, massa M e spessore s; il primo è omogeneo, mentre il secondo ha una densità di massa disuniforme, data dalla legge $\rho_{m,2} = \rho_0 r/R$, con r distanza dall'asse. Quanto valgono i momenti di inerzia I_{omo} e I_{dis} nei due casi? (Considerate sempre rotazioni attorno all'asse del disco)

Soluzione. Si tratta di sistemi a simmetria cilindrica, dunque siamo in grado di determinarne il momento di inerzia. Per il primo disco, si ha $\rho_{m,1} =$ costante, e quindi: $I_{omo} = \int_0^R \rho_{m,1}(2\pi sr)r^2 \mathrm{d}r = \rho_{m,1} 2\pi s R^4/4$; ora, notate che la densità di massa, cioè la costante $\rho_{m,1}$ non è un dato del problema, visto che, invece, si conosce la massa M dei dischi. Per il disco omogeneo è immediato scrivere $\rho_{m,1} = M/(\pi R^2 s)$ (la quantità al denominatore è il volume del disco), per cui: $I_{omo} = (M/2)R^2$.

Nel caso disomogeneo si ha: $I_{dis} = \int_0^R \rho_{m,2}(2\pi sr)r^2 \mathrm{d}r = \rho_0 2\pi(s/R)\int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \rho_0 2\pi s R^4/5$; anche qui il valore della costante ρ_0 non è un dato del problema, ma va espressa a partire dalla massa. Visto che il disco è disomogeneo, qui sarebbe errato fare come abbiamo fatto prima, cioè dividere tout court massa per volume; occorre invece risolvere l'integrale: $M = \int_{volume} \rho_{m,2} \mathrm{d}V = \rho_0 2\pi(s/R)\int_0^R r^2 \mathrm{d}r = \rho_0 2\pi s R^2/3$. Sostituendo nell'espressione di prima si ottiene $I_{dis} = (3M/5)R^2$. Confrontando i due risultati si ha $I_{dis} > I_{omo}$; questo è ragionevole, dato che, per come è fatta la densità di massa del disco diomogeneo, una maggiore quantità di massa si trova a maggiore distanza rispetto all'asse, facendo crescere il valore del momento di inerzia.

1.3.4 Bilancio energetico e moto rotazionale

L'espressione $E_{K,rot} = (I/2)\omega^2$ è un modo particolarmente pratico ed immediato per esprimere l'energia cinetica di un corpo in rotazione. Naturalmente se il corpo è dotato *anche* di un moto di traslazione del centro di massa (e vedremo in seguito alcuni esempi significativi), allora l'energia totale, E_K conterrà contributi traslazionali e rotazionali che si sommano tra loro, essendo l'energia una *grandezza additiva*, cioè:

$$E_K = E_{K,rot} + E_{K,trasl} = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{M}{2}v_{CM}^2 \ . \tag{1.9}$$

Vedremo in seguito come, in molti casi di interesse, sia possibile scrivere le due velocità (rotazione, cioè angolare, e traslazione, cioè lineare) l'una in funzione dell'altra.

In generale, comunque, è ovvio che tutto quello che abbiamo stabilito nei precedenti capitoli a proposito dei concetti di bilancio energetico e conservazione dell'energia meccanica è ancora perfettamente valido. Detto $\mathcal{L}$ il lavoro fatto da un operatore esterno sul sistema, e ΔU una variazione di energia potenziale (ad esempio gravitazionale, elastica, elettrica), avremo sempre $\mathcal{L} = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{K,rot} + \Delta E_{K,trasl} + \Delta U$. Se il sistema è isolato, cioè non subisce lavoro, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{K,rot} + \Delta E_{K,trasl} + \Delta U$, cioè si conserva l'*energia meccanica* del sistema. Ci sono casi in cui anche $\Delta U = 0$, e allora $\Delta E_{K,rot} = -\Delta E_{K,trasl}$, cioè l'energia cinetica "si converte" da una "forma" all'altra.

1.3.5 Esercizio: la carrucola massiva

Problemi con pulegge e carrucole (dotate di massa) sono molto frequenti e possono in genere essere risolti con i concetti di questo capitolo. Qui ci occupiamo di un semplice caso che può essere interpretato attraverso principi di bilancio energetico. Supponiamo allora di avere una carrucola "fissa", cioè una puleggia sulla cui gola è avvolta una fune (inestensibile e di massa trascurabile). La puleggia, che in pratica è un disco, è vincolata, attraverso opportune staffe imperniate sul suo asse, ad un solaio rigido. Il ruolo del sistema di staffe è quello di non far cadere in terra la puleggia, cioè, in pratica, di produrre e trasmettere delle forze di reazione vincolare che si oppongono alle altre forze permettendo di avere equilibrio traslazionale per il moto del centro di massa del disco che rappresenta la puleggia. Immaginiamo ora che a un capo della fune sia attaccata una massa m (la puleggia si trova su un piano verticale), e che la puleggia sia un disco omogeneo di massa M, raggio R e spessore s che può ruotare *senza attrito* attorno al suo asse. Nelle condizioni del problema, la massa tende a scendere verso il basso e la puleggia tende a ruotare (in un verso o l'altro, a seconda di come fate il disegno, ma qui è irrilevante). Se ad un certo istante la massa viene lasciata libera di muoversi con una velocità iniziale nulla, quanto vale la velocità angolare ω della puleggia quando la massa è scesa di un tratto Δz? (Supponete che la fune non slitti sulla gola della puleggia, come si verifica quasi sempre)

Soluzione. È un classico esempio di conservazione dell'energia. In sostanza, durante la caduta della massa la fune "si srotola" e questo provoca una rotazione della puleggia. Dunque, l'energia potenziale gravitazionale si converte in energia cinetica, che serve sia per dare velocità (lineare, di traslazione) alla massa m, che per mettere in rotazione la puleggia.

Cominciamo con lo scrivere le "caratteristiche" della puleggia ai fini del moto rotazionale. In sostanza, trattandosi di un disco omogeneo, essa avrà un momento di inerzia $I = (M/2)R^2$ (il calcolo è stato fatto in uno dei precedenti esercizi). La conservazione dell'energia meccanica permette di scrivere: $0 = \Delta E_K + \Delta U = (I/2)\omega^2 + (m/2)v^2 - mg\Delta z = (M/4)R^2\omega^2 + (m/2)v^2 - mg\Delta z$, dove abbiamo sfruttato le condizioni iniziali del problema (tutto è fermo all'inizio) e abbiamo ricordato come si esprime la variazione di energia potenziale gravitazionale (essa interessa solo la massa, dato che la fune ha massa trascurabile e la puleggia non trasla!).

L'equazione scritta contiene due incognite, ω e v. Un aspetto importante di questo problema è scrivere l'una in funzione dell'altra, obiettivo che può essere raggiunto basandosi solo su questioni di carattere "geometrico". Infatti se il moto della puleggia è dovuto allo srotolamento della fune, e se questo avviene senza coinvolgere slittamenti sulla gola della carrucola stessa, vuol dire che c'è un rapporto "uno a uno" tra i punti della fune che, istante per istante, si trovano a contatto con la puleggia e i punti della circonferenza della puleggia stessa. In altre parole, detto ΔS lo spostamento della fune e $\Delta\theta$ il corrispondente spostamento angolare della puleggia, che ha raggio R deve essere: $\Delta S = R\Delta\theta$. Lo stesso tipo di relazione esiste anche tra le velocità (e le accelerazioni). Infatti, formalmente, derivando rispetto al tempo entrambi i membri si ottiene: $v = R\omega$; derivando ancora, con ovvio significato dei simboli: $a = R\alpha$. Allora nel nostro problema, sostituendo $v = R\omega$ e rimaneggiando, si ottiene $mg\Delta z = \omega^2 R^2((M/4) + (m/2))$, da cui è facile ricavarsi ω.

Torniamo ancora sulla relazione trovata tra grandezze angolari e traslazionali: formalmente essa è identica a quella determinata per il moto circolare di un punto, ma ha una motivazione fisica diversa. La stessa espressione la troveremo anche nella soluzione dei problemi del prossimo paragrafo, di nuovo con motivazioni fisiche diverse.

1.4 Rotolamento puro

In questo paragrafo esaminiamo con un po' di dettaglio un esempio dei problemi di moto rotazionale e traslazionale, così importante da essere il protagonista di un paragrafo. Si ha moto di **rotolamento puro** quando un corpo rigido ruota (e trasla!) senza strisciare su una superficie. Esempio tipico è quello di una ruota: tutti sapete che il moto di una ruota può avvenire senza coinvolgere strisciamento, slittamento, sulla superficie, e tutti sapete che le condizioni di rotolamento dipendono dall'attrito tra ruota e strada (se la strada è ghiacciata, allora è difficile evitare lo slittamento!).

Supponiamo allora di avere un cilindro (il nostro modello di ruota, in questo caso) di raggio R e momento di inerzia I, poggiato su una superficie piana. Se si verifica rotolamento puro, allora la generatrice del cilindro che si trova a contatto con lka superficie cambia istante per istante ma, istante per istante, essa è *ferma* rispetto alla superficie. Guardiamo ora al moto di traslazione del centro di massa (il centro geometrico) di questo cilindro; come è arcinoto, questo moto c'è, altrimenti la ruota non servirebbe a farci muovere! Se chiamiamo $\Delta\theta$ lo spostamento angolare della ruota e ΔS il corrispondente spostamento del centro di massa, è facile convincersi che deve valere la relazione $\Delta S = R\Delta\theta$. Possiamo per esempio ragionare come nell'esercizio della carrucola, e vedere che c'è rapporto uno a uno tra le generatrici e i punti di contatto sulla superficie, oppure possiamo individuare un punto sulla superficie del cilindro e metterne in relazione lo spostamento angolare con quello lineare, e quest'ultimo con lo spostamento del centro di massa. In ogni caso troviamo formalmente la stessa relazione vista per la carrucola che, derivata, ci dice che la velocità di traslazione del centro di massa, v_{CM}, è proporzionale alla velocità angolare della ruota: $v_{CM} = R\omega$. Questa affermazione, come nel caso precedente, risulta molto utile per la soluzione dei problemi.

Nel seguito di questo capitolo vedremo che relazione c'è tra forze e moto angolare. Qui ci limitiamo a far notare che la nostra osservazione di buon senso quotidiano su slittamento ed attrito suggerisce che la rotazione sia dovuta proprio alla forza di attrito che si crea tra generatrice del cilindro e superficie. Notate che, se c'è rotolamento puro, la generatrice è, istante per istante, ferma rispetto alla superficie, e di conseguenza l'attrito che è coinvolto nel processo è di tipo *statico*. Allora, non essendoci spostamento, questo attrito *non produce lavoro* e possiamo continuare ad usare i principi di conservazione energetica per i sistemi isolati (anche se questo isolato non è).

1.4.1 Esercizio: barattoli su piano inclinato

Supponete di avere un piano inclinato, di altezza h ed angolo θ rispetto all'orizzontale, ed un barattolo approssimabile come un cilindro di raggio R, momento di inerzia (rispetto all'asse) I e massa M. Il barattolo viene lasciato andare con velocità iniziale nulla dalla sommità del piano inclinato. Quanto vale la velocità che esso ha alla base del piano nel caso in cui questo sia senza attrito (v_{str}) oppure abbia attrito sufficiente a garantire rotolamento puro (v_{rot})?

Soluzione. Il caso senza attrito sappiamo risolverlo assai bene usando gli approcci elaborati per il punto materiale: infatti, se non c'è attrito (e il corpo parte da fermo) non può esserci nessun rotolamento, e il corpo è modellabile con un punto materiale di massa M. La conservazione dell'energia meccanica ci dice allora che: $0 = \Delta U + \Delta E_K = -Mgh + (M/2)v_{str}^2$, da cui $v_{str} = (2gh)^{1/2}$. Se supponiamo rotolamento puro, allora, come già chiarito, la conservazione dell'energia meccanica continua a valere, perché l'attrito *non fa lavoro*. Però dovremo in questo caso tenere in debito conto della rotazione, cioè della presenza del termine rotazionale nell'energia cinetica. Scriveremo allora: $0 = \Delta U + \Delta E_{K,trasl} + \Delta E_{K,rot} = -Mgh + (M/2)v_{rot}^2 + (I/2)\omega^2$. In questa espressione è chiaro che v_{rot} è la velocità del centro di massa del cilindro che sta ruotando con velocità angolare ω e, poiché il rotolamento è puro, avremo $\omega = v_{rot}R$. Sostituendo e riarrangiando otteniamo $v_{rot} = (2Mgh/(M + I/R^2))^{1/2}$; questo valore è minore di quello che si ha per il moto senza attrito dato che parte dell'energia potenziale è finita in energia cinetica di rotazione, che prima non c'era.

1.5 Momento delle forze

In questo paragrafo cominciamo a chiederci quale sia la "causa fisica" che provoca un moto di rotazione, cercando di trovare analogie con la descrizione che ci ha permesso di individuare nelle forze la causa fisica del moto di traslazione (dinamica del punto, principio di Newton). Partiamo da qualche considerazione intuitiva: noi abbiamo molto spesso a che fare con moti di rotazione, ad esempio quando dobbiamo aprire una porta. Notate che in questo caso il moto è solo di rotazione, dato che i cardini della porta stessa costituiscono un sistema che *vincola* il moto della porta ad essere solo di rotazione attorno all'asse, *assegnato*, dei cardini stessi. In altre parole, i cardini esercitano delle reazioni vincolari che annullano gli effetti traslazionali di qualsiasi forza applicata (almeno finché non applicate forze eccessive, che possono svellere la porta dai cardini e donarle un moto di traslazione!).

Allora, l'evidenza sperimentale quotidiana ci dice che per aprire "efficientemente" una porta dovete applicare una forza "ad una certa distanza" dai cardini, e anche con "un certo angolo". In altre parole, se spingete sui cardini la porta non si apre, e la porta non si apre neanche se la vostra forza la applicate distante dai cardini, ma con una direzione che punta ai cardini stessi. Molto bene: cominciate a vedere che, con i corpi rigidi (la porta lo è con ottima approssimazione), conta andare a vedere *dove* si applicano le forze, cioè cominciate a capire perché una delle caratteristiche elementari dei vettori (e la forza è un vettore) si chiami *punto di applicazione*.

In effetti, la causa fisica del moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un certo asse è il **momento delle forze**, definito come prodotto vettore:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \ , \tag{1.10}$$

dove $\vec{r}$ è un vettore che parte dal *polo di rotazione* (lo abbiamo già definito) e arriva al *punto di applicazione* della forza $\vec{F}$. Precisiamo subito che, come al solito, se di forze ne abbiamo più di una, allora potremo avere sul corpo rigido un momento risultante, o totale, che è la *somma vettoriale* dei singoli componenti $\vec{\tau}_i$, cioè $\vec{\tau}_t ot = \Sigma \vec{\tau}_i$.

Risultando da un prodotto vettoriale, il momento delle forze ha sempre direzione *ortogonale* a quella della forza e del vettore $\vec{r}$ definito sopra; il suo verso si trova applicando la regola della mano destra. Il suo modulo può essere espresso come: $\tau = rF \sin\theta$, dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni di $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Questo modo di esprimere il modulo di $\vec{\tau}$ rende ragione delle nostre osservazioni a proposito dell'apertura della porta: in sostanza, l'operazione è più efficiente quando applichiamo la forza lontano dai cardini (r è più grande) e quando la applichiamo in direzione ortogonale alla congiungente tra cardini e punto di applicazione (θ vale 90 gradi e $\sin\theta = 1$).

Dal punto di vista geometrico, come vi potete rendere facilmente conto con un semplice disegnino, il prodotto $r \sin\theta$ può essere interpretato come la *distanza tra la retta di applicazione della forza e il polo di rotazione*[12]; a questa grandezza si dà spesso il nome di **braccio della forza** e allora il modulo del momento è pari al *prodotto di modulo della forza per il suo braccio.*

Le dimensioni del momento delle forze sono quelle di una forza per uno spostamento; all'unità di misura non si dà nessun nome particolare, e quindi si usa per il momento delle forze l'unità N m. [13]

1.5.1 Esercizio: la porta

Avete una bella porta larga l ed applicate una forza di modulo F in diversi punti e con diverse orientazioni. In particolare nel caso 1 la forza è ortogonale al piano della porta ed applicata all'estremo opposto ai cardini, nel caso 2 la forza è parallela al piano della porta ed applicata sempre all'estremo opposto ai cardini, nel caso 3 la forza è ortogonale alla porta ed applicata sui cardini e nel caso 4 la forza è applicata "in mezzo" e con un

[12] La **retta di applicazione** di una forza è la retta a cui appartiene il vettore della forza stessa.

[13] Osservate che momento delle forze e lavoro hanno le stesse dimensioni, ma "non condividono" l'unità di misura.

angolo ψ rispetto al piano della forza. Quanto vale il momento della forza nei vari casi? (Si intende che va calcolato rispetto ai cardini, cioè il polo è assegnato)

Soluzione. Osserviamo la porta dall'alto: vedremo un segmento di lunghezza l vincolato a ruotare attorno all'asse dei cardini. Applichiamo la definizione di momento. Vedremo che in tutti i casi il momento ha direzione ortogonale al piano del segmento e della forza, cioè il vettore momento ha la direzione dell'asse di rotazione. Il segno dipenderà da come sono orientate porta e forza, cioè dipenderà dal disegnino che farete per schematizzare il problema. Calcoliamo il modulo del momento. Nel caso 1, $r = l$ e $\sin\theta = 1$, per cui $\tau_1 = lF$. Nel caso 2, $r = l$, ma $\sin\theta = 0$, per cui $\tau_2 = 0$ (potete facilmente rendervi conto che il *braccio della forza* è nullo, anche se $r \neq 0$!). Nel caso 3, $r = 0$ e $\sin\theta = 1$, per cui ancora $\tau_3 = 0$. Infine nel caso 4 $r = l/2$ e $\sin\theta = \sin\psi$, per cui $\tau_4 = (l/2)\sin\psi < \tau_1$.

Notate che il fatto che $\tau_3 = 0$ ci fa capire che qualsiasi forza applicata ai cardini dà sicuramente momento nullo. In effetti, sui cardini agiranno delle forze di reazione vincolare, che sicuramente devono esistere per inibire il moto di traslazione della porta, ma queste forze *non producono alcun momento.*

1.6 Equazione del moto di rotazione

Come suggerisce il semplice esempio della porta, è evidente che *il momento delle forze è la causa fisica del moto di rotazione*. Nella nostra analogia concettuale con il moto del punto materiale, dove la legge del moto è quella di Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, abbiamo trovato la grandezza da mettere al primo membro; al secondo membro, al posto dell'accelerazione $\vec{a}$, che è lineare e si riferisce al moto di traslazione, metteremo ovviamente un'accelerazione angolare (presa come vettore), $\vec{\alpha}$. Trattando di energia cinetica, abbiamo già visto che la massa di un corpo non è una buona caratteristica per le proprietà rotazionali, che invece sono ben descritte dal momento di inerzia I. Allora, sulla base di queste semplici ed intuitive motivazioni, possiamo scrivere la **legge del moto rotazionale** come:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \ , \tag{1.11}$$

dove si intende che momento delle forze e momento di inerzia devono essere riferiti *allo stesso polo.*

Questa legge, a cui talvolta si dà il nome di *legge cardinale* del moto di rotazione, permette in linea di principio di determinare l'accelerazione angolare una volta che siano noti il momento delle forze (ovvero *la risultante* dei momenti delle forze, se ce ne è più di uno) e le caratteristiche del corpo, cioè il suo momento di inerzia. Per esempio, se il momento delle forze (totale) è nullo, allora $\alpha = 0$, cioè siamo in condizioni di *equilibrio rotazionale*, di cui parleremo più nei dettagli in seguito. In generale, questa equazione prende il ruolo che il principio di Newton aveva per il punto materiale, consentendo di derivare le *leggi orarie* per lo spostamento e la velocità angolari di un corpo.

Prima di vedere qualche semplice esempio, sottolineiamo ancora che potremo avere a che fare sia con corpi *vincolati* a ruotare attorno ad un asse, come nel caso della porta, che con corpi *liberi*, cioè privi di qualsiasi vincolo ai fini della rotazione. In questo caso potrà essere interessante anche descrivere il moto *traslazionale* del centro di massa. In sostanza, dovremo tenere conto del fatto che la dinamica di questi sistemi potrà essere descritta in termini di traslazione del centro di massa, regolato dall'equazione $\vec{F} = M\vec{a_{CM}}$, e di rotazione *attorno al centro di massa* (cioè prendendo un asse che intercetta la posizione che il centro di massa occupa istante per istante), regolato dall'equazione $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$.

1.6.1 Esercizio: la porta bis

Stessa situazione dell'Es. 1.5.1. Sapendo che il momento di inerzia della porta vale I (per rotazioni attorno ai cardini), quanto vale l'accelerazione angolare α nel caso 1?

Soluzione. Questo è un caso di corpo vincolato a ruotare attorno ad un asse. Dunque, non c'è moto traslazionale. Si trova immediatamente $\alpha = \tau_1/I = lF/I$. Notate che questo è il valore che l'accelerazione nell'istante in cui la forza ha modulo F ed è applicata con braccio l rispetto ai cardini. Per intenderci, se immaginate di continuare ad applicare la forza con la stessa direzione e allo stesso punto della porta, l'accelerazione angolare cambia con il tempo, dato che il momento della forza non è costante. Infatti, nel corso della rotazione, si ha che l'angolo θ cambia per effetto della rotazione stessa, come vedremo nel prossimo esercizio.

1.6.2 Esercizio: la porta ter

Stavolta la domanda è: sapendo che viene applicata all'estremo della porta (a distanza l dai cardini) una forza costante F che mantiene sempre la stessa direzione (misurata rispetto ad un riferimento fisso, non quello della porta!), e che la condizione iniziale è porta ferma, geometria come nel caso 1, cosa si può dire sulla legge oraria del moto di rotazione? (Usate un opportuno angolo $\phi(t)$ per descrivere la rotazione al passare del tempo)

Soluzione. In questo caso dobbiamo proprio cercare di risolvere l'equazione del moto angolare, cioè di rotazione. Supponiamo che l'angolo $\phi(t)$ sia proprio quello compreso tra "direzione della porta" (ci siamo capiti...), che varia nel tempo, e direzione della forza, che invece è costante. All'inizo, cioè all'istante $t_0 = 0$, si avrà $\phi_0 = \theta = \pi/2$ (si deduce dalla descrizione dell'Es. 1.5.1 e dal testo di questo esercizio). Inoltre sappiamo che la velocità di rotazione iniziale è nulla.

L'equazione del moto da risolvere è allora: $\alpha(t) = (Fl/I)\sin\phi(t)$. Questa è in realtà un'equazione differenziale del secondo ordine. Infatti, se pensate alla definizione di accelerazione angolare come derivata temporale seconda di uno spostamento angolare, si ha $\alpha(t) = \mathrm{d}^2\phi(t)/\mathrm{d}t^2 = (Fl/I)\sin\phi(t)$, con le condizioni iniziali $\phi_0 = \pi/2$ e $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ (velocità iniziale nulla). Questa è un'equazione differenziale un po' difficile da risolvere, però è chiaro che l'accelerazione non resterà costante, cioè il moto angolare non sarà uniformemente accelerato.

1.6.3 Esercizio: una sbarretta che ruota (e trasla)

Stessa situazione di Es. 1.1.1. Qui la domanda è: com'è fatto il moto complessivo del sistema (tenendo conto anche della rotazione)?

Soluzione. La sbarretta sottoposta alla coppia di forze (elettriche) è un ottimo esempio di corpo libero che compie un moto di traslazione e di rotazione. Infatti il centro di massa della sbarretta trasla (con accelerazione uniforme, come avevamo visto). Però la circostanza che le due forze sul piano che agiscono sul sistema abbiano punti di applicazione diversi fa sì che la sbarretta abbia anche un *moto di rotazione attorno al centro di massa.*

Se vogliamo descrivere un po' meglio questo moto di rotazione, dobbiamo come prima cosa calcolare il momento di inerzia I della sbarra per rotazioni attorno al suo centro di massa (cioè il punto di mezzo). Detta S la sezione della sbarretta e ρ la sua densità di massa, supponendo di chiamare asse X il suo asse, abbiamo: $I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho S x^2 \mathrm{d}x = \rho S L^3/12 = ML^2/12$, dove l'ultimo passaggio è motivato dal fatto che, essendo la sbarra omogenea, si ha $\rho = M/(SL)$. [14]. A questo punto calcoliamoci il momento delle forze che agiscono sul sistema; questo momento, che avrà sicuramente direzione verticale (la sbarretta ed il campo elettrico giacciono su un piano orizzontale), dipenderà dall'angolo formato tra sbarretta e campo elettrico che, se la sbarra ruota (e il campo è fisso) sarà funzione del tempo. Ad esempio, nell'istante in cui la sbarretta si trova ad essere parallela all'asse X si avrà che l'angolo tra sbarretta e direzione del campo elettrico vale $\theta = \pi/4$, per cui: $\tau = \tau_1 + \tau_2 = EL/2 \sin(\pi/4)(q_1 - q_2)$. Fate attenzione al segno meno che abbiamo usato: esso è lì per tenere in debito conto il fatto che le forze elettriche che agiscono sulle due cariche tendono a produrre momenti di verso *opposto* rispetto al centro di massa del sistema (il punto di mezzo della sbarretta). Supponendo invece la sbarretta orientata come il campo elettrico, si avrebbe $\theta = 0$ e quindi $\tau = 0$. Vedete come davvero il momento delle forze dipenda dall'orientazione relativa!

1.6.4 Esercizio: la carrucola massiva bis

Stessa situazione dell'Es. 1.3.5. Ora ci chiediamo quanto vale il modulo dell'accelerazione angolare α della puleggia quando la massa m compie la sua discesa.

Soluzione. Dobbiamo qui prendere in considerazione le cause fisiche che provocano la rotazione della puleggia. Nel nostro modello (fune inestensibile di massa trascurabile che si srotola senza slittare sulla gola della puleggia) è intuitivo che la puleggia è messa in rotazione dalla forza che la fune esercita sulla superficie esterna della puleggia. Tale forza corrisponderà in modulo alla tensione T della fune, e sarà applicata esattamente nel punto di contatto tra fune e puleggia, cioè il braccio di questa forza sarà semplicemente R (raggio della puleggia). Detto I il momento di inerzia, avremo allora $\alpha = TR/I$. Questa equazione, però, non basta per risolvere il problema: infatti il valore di T è incognito.

[14] Il momento di inerzia poteva anche essere calcolato usando il teorema degli assi paralleli: a voi provarlo!

Rivolgiamoci ora al moto di traslazione della massa appesa. Tale moto avviene sotto l'effetto di due forze: la tensione della fune, diretta verso l'alto, e la forza peso, che punta in basso. Per la massa m l'equazione del moto (traslazionale, questo corpo può solo avere moto traslazionale per come è fatto il sistema) si scrive: $ma = mg - T$ (avendo supposto accelerazione positiva quella che è diretta verso il basso). Notate che, coerentemente con il modello di fune *inestensibile*, la tensione che essa esercita sulla massa e quella che essa esercita sulla puleggia hanno lo stesso modulo (ma versi opposti). In sostanza, la fune serve a *trasferire la forza da un punto all'altro*. Se mettiamo a sistema le due equazioni del moto, angolare per la puleggia e traslazionale per la massa, vediamo che abbiamo due equazioni e tre incognite (T, α, a). Però, ragionando come nell'Es. 1.3.5, se la corda non slitta possiamo senz'altro affermare che $a = \alpha/R$. Questo ci consente di avere una terza equazione che, messa a sistema con le altre due, conduce al risultato: $\alpha = TR/I = m(g-a)R/I = (mgR - m\alpha R^2)/I$, da cui $\alpha = mgR/(I + mR^2)$. Come si vede, l'accelerazione non dipende dal tempo e quindi il moto è uniformemente accelerato. Notate che, se la puleggia avesse massa nulla, allora $a = g$, cioè la caduta sarebbe libera (la puleggia non servirebbe a un bel niente), mentre in generale si ottiene $a < g$, dato che il fatto che la puleggia (massiva) venga messa in rotazione richiede qualche forma di energia, da sottrarsi a quella disponibile per la caduta della massa m.[15]

1.6.5 Esercizio: barattoli su piano inclinato bis

Stessa situazione dell'Es. 1.4.1 (consideriamo il caso di rotolamento puro). Quanto vale in modulo l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del barattolo quando esso si trova sul piano inclinato?

Soluzione. In questo problema torniamo ad occuparci del moto di rotolamento puro considerando le *forze* che vi partecipano. Abbiamo già intuito che le forze che fanno rotolare il barattolo di questo esercizio sono le forze di attrito *statico* tra generatrice del cilindro e superficie del piano inclinato. In effetti tali forze hanno un momento non nullo rispetto al centro di massa del barattolo: infatti le forze di attrito statico, opponendosi al moto "incipiente" della generatrice, sono dirette parallelamente al piano inclinato, e puntano verso l'alto. Se fate un bel disegnino, vedrete che questa situazione è coerente con il fatto che il barattolo viene messo in rotazione in un certo verso. Inoltre, detto F_A il modulo della forza di attrito, si ha $\tau = RF_A$. Per la legge del moto rotazionale, deve allora essere $\tau = I\alpha = RF_A$, cioè $F_A = (I/R)\alpha$. Il fatto che si osservi rotolamento puro significa che, per le condizioni del problema, la forza di attrito ha esattamente questo valore (che dipende da α).

Se ora esaminiamo la dinamica del centro di massa del barattolo, e ricordiamo i vari esercizi con piani inclinati e punti materiali, possiamo scrivere $Ma_{CM} = Mg \sin\theta - F_A = Mg \sin\theta - (I/R)\alpha$, dove abbiamo considerato la componente della forza peso in direzione parallela al piano (che è ovviamente la direzione dell'accelerazione) e abbiamo sostituito

[15] Un'estensione di questo esercizio, che vi suggerisco di studiare, riguarda la cosiddetta *macchina di Atwood*, una puleggia con una fune che passa attorno alla gola e che porta appesi ai suoi due estremi due masse diverse, m_1 e m_2.

l'espressione di F_A trovata sopra. A questo punto possiamo sfruttare la condizione "geometrica" di rotolamento puro che, come abbiamo già affermato, ci suggerisce $\alpha = a_{CM}/R$. Sostituendo e risolvendo si ottiene $a_{CM} = (g \sin\theta)/(1 + I/(MR^2))$: se non ci fosse rotolamento (puro), allora il termine $I/(MR^2)$ non comparirebbe, e l'accelerazione sarebbe quella che si trova per il punto materiale che si muove senza attrito. Se invece si considera il rotolamento, allora l'accelerazione è sempre minore rispetto a quella del punto materiale senza attrito.

1.7 Momento angolare

L'ultimo tassello del nostro percorso ideale costruito per analogia con il caso del punto di materiale prevede di individuare una grandezza che abbia, in qualche modo, un ruolo simile a quello della quantità di moto. Ricordate che la quantità di moto di una massa m in moto a velocità $\vec{v}$ è una grandezza vettoriale, che si scrive $\vec{p} = m\vec{v}$.

La grandezza che ora definiamo si chiama **momento angolare**, si indica con il simbolo $\vec{L}$ e vale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \; , \tag{1.12}$$

dove $\vec{r}$ è un vettore spiccato dal polo (cioè un certo punto dello spazio) verso il punto di applicazione del vettore $\vec{p}$. Facciamo alcune osservazioni. In primo luogo, apprezzate che in questa definizione, come già in quella di momento delle forze, compare l'"operazione" $\vec{r}\times$. Poi notate che anche questa definizione porta ad una quantità che dipende dalla scelta del polo considerato. Allora anche nei problemi che coinvolgono il momento angolare potrà verificarsi il caso di polo assegnato (un corpo vincolato a ruotare attorno ad un asse ne è sempre un buon esempio) o libero (un corpo che ruota liberamente), e in quest'ultimo caso sarà conveniente scegliere il centro di massa come polo. Le dimensioni di $\vec{L}$ sono ovviamente quelle di una quantità di moto per una distanza, che corrispondono, come potete facilmente verificare, a quelle di un'energia per un tempo. L'unità di misura conveniente sarà allora J s.[16]

Osservate che la definizione di Eq. 1.12 non contiene alcun riferimento al fatto che si stia trattando con un corpo rigido. In effetti tale definizione si può benissimo applicare ad un punto materiale che si trova in movimento, come vedremo anche in un prossimo esercizio. Quando si ha a che fare con corpi rigidi, invece, conviene spesso utilizzare un'altra espressione per la stessa grandezza, espressione che ora deriviamo.

Consideriamo un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse e suddividiamolo idealmente, come al solito, in tanti elementini infinitesimi. Ognuno di questi elementini, dotato di massa $\mathrm{d}m$, darà un contributo infinitesimo alla quantità di moto del corpo, $\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}m\vec{v}$, e di conseguenza al momento angolare rispetto all'asse, $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{r} \times \mathrm{d}m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{v}\mathrm{d}m$, con $\vec{r}$ distanza dell'elementino considerato rispetto al polo, cioè l'asse di rotazione (nell'ultimo passaggio abbiamo solo cambiato l'ordine dei vari termini). Ora possiamo ricordare che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e notare che, per le proprietà del prodotto vettoriale (verificatelo!), si ha

[16] Talvolta ci si riferisce a questa grandezza con il nome di *azione*.

$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} r^2$. Allora potremo scrivere $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{\omega} r^2 \mathrm{d}m$; per determinare il momento angolare complessivo, occorrerà integrare sull'intero corpo, che è tutto caratterizzato dalla stessa velocità angolare, che è quindi costante nell'integrazione. D'altra parte, l'integrale che rimane da fare è proprio quello che dà origine al momento di inerzia I. Si ottiene pertanto:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \ , \tag{1.13}$$

relazione che mostra che il momento angolare ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità angolare, e che torna utile quando si deve calcolare $\vec{L}$ per un corpo rigido in rotazione.

1.7.1 Esercizio: momento angolare in un'orbita circolare

Abbiamo scritto che l'Eq. 1.12 funziona (anche) nel caso di un corpo puntiforme in moto. Supponiamo allora di avere una massa m che percorre un'orbita circolare di raggio R con velocità uniforme e costante v (diretta tangenzialmente, come è ovvio!). Quanto vale il momento angolare $\vec{L}$?

Soluzione. Limitiamoci ad applicare la definizione: tenendo conto che il polo coincide naturalmente con il centro dell'orbita, e quindi $\vec{r}$ è un vettore disposto come il raggio che punta sul corpo, e che la velocità è tangenziale, avremo che il momento angolare ha la direzione dell'asse di rotazione (cioè è ortogonale al piano dell'orbita, con un verso che dipende dal verso di percorrenza dell'orbita stessa) e modulo $L = mvR = m\omega R^2$, con ω velocità angolare.

Il "modello planetario" di un atomo di idrogeno, in voga oltre un secolo fa, prevede proprio che l'elettrone ruoti in un'orbita circolare (molto piccola) attorno al protone. Come probabilmente già sapete, questo modello è affetto da difficoltà insanabili, dato che la perdita di energia (per "irraggiamento") da parte dell'elettrone in moto lo condurrebbe rapidamente a fermarsi e collassare sul protone. Di conseguenza, la materia sarebbe tutta fortemente instabile. Niels Bohr nel secolo scorso stabilì che, nelle particolari condizioni che devono essere rispettate da un elettrone in moto (le condizione della "meccanica quantistica"), il modello planetario può ancora andare bene, purché il momento angolare dell'orbita sia un multiplo intero di una costante universale, detta costante di Planck (simbolo h, valore $h \approx 6.6 \times 10^{-34}$ J s). Deve cioè essere: $L = mvR = m\omega R^2 = nh$, con n intero. Tenendo conto che il raggio dell'orbita del livello fondamentale ($n = 1$) per l'idrogeno è proprio il cosiddetto "raggio di Bohr", $R = a_0 = 5 \times 10^{-11}$ m, e che per l'elettrone $m \approx 10^{-30}$ Kg, provate a calcolare quanto deve valere ω.

1.7.2 Conservazione del momento angolare

Ricordate bene che, quando introducemmo la quantità di moto per lo studio della dinamica del punto, trovammo anche una relazione che "generalizzava" l'equazione del moto: $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$. Anche derivare rispetto al tempo il momento angolare porta ad una relazione interessante; infatti, poiché $\vec{r}$ rimane costante, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \ , \qquad (1.14)$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto della definizione di momento delle forze. Dunque, il momento delle forze che agiscono su un sistema è causa della variazione temporale del momento angolare, così come forze applicate su un sistema erano causa della variazione della quantità di moto.

Poi, proseguendo il ragionamento per il punto materiale, avevamo trovato un'utilissima conseguenza: in un *sistema isolato* le forze interne sono nulle, e quindi la quantità di moto $\vec{p}$ (si intende *totale* per il sistema) si conserva. Un analogo ragionamento si può adottare qui per la rotazione di un corpo rigido. Infatti il principio di azione e reazione ci garantisce che anche *i momenti delle forze interne* sono complessivamente nulli. Dunque, per un *sistema isolato rispetto ai momenti delle forze il momento angolare si conserva.*

1.7.3 Esercizio: il pendolo balistico rivisitato

Avete una sbarretta omogenea lunga D e di massa M, incernierata *senza attriti* ad un suo estremo e libera pertanto di muoversi su un piano verticale. Un proiettile di massa m colpisce l'estremità libera della sbarretta arrivandoci con una velocità orizzontale, di modulo v. In seguito all'urto il proiettile rimane conficcato nella sbarretta, che comincia a ruotare fino a raggiungere una posizione dove forma un angolo θ_{max} rispetto alla verticale. Quanto vale θ_{max}?

Soluzione. Nell'urto si orginano delle forze interne, che quindi hanno momento delle forze nullo. Dunque il sistema è isolato e si conserva il momento angolare $\vec{L}_{tot}$ totale del sistema rispetto ad un polo. Prendiamo come polo il perno di rotazione della sbarretta. Prima dell'urto, questa è ferma, e dunque il suo momento angolare è nullo. Il momento angolare del proiettile prima dell'urto si ottiene invece dalla definizione di Eq. 1.12, e vale: $\vec{L}_{in,pro} = \vec{r} \times (m\vec{v}$. Ora notiamo che $\vec{v}$ ed $\vec{r}$ giacciono sullo stesso piano e sono ortogonali fra loro; inoltre il modulo di $\vec{r}$ è pari alla distanza tra perno e posizione del proiettile subito prima dell'impatto, cioè vale $r = D$, per cui, per i moduli: $L_{in} = L_{in,pro} = mvD$. Subito dopo l'urto il momento angolare, che deve rimanere inalterato, è dovuto alla rotazione del sistema proiettile + sbarretta. Detto ω il modulo della velocità angolare con cui questo sistema inizia a ruotare, si ha, per i moduli: $L_{fin} = L_{fin,sba} + L_{fin,pro} = (I_{sba} + I_{pro})\omega$. Il momento di inerzia della sbarretta lo abbiamo già calcolato più volte, e vale $I_{sba} = (M/3)D^2$. Quello del proiettile possiamo determinarlo applicando la definizione di momento di inerzia alla singola massa m che si trova a distanza D dal polo, ottenendo $I_{pro} = mD^2$. Dunque, dalla conservazione del momento angolare si trova, con un po' di algebra: $\omega = mv/(D((M/3) + m))$.

A questo punto il sistema sbarretta + proiettile prosegue la sua rotazione in un moto in cui, a causa dell'assenza di attrito, si conserva l'energia meccanica. In pratica il sistema si arresta quando tutta l'energia cinetica è stata "convertita" in energia potenziale. Tenendo conto che, quando la sbarretta forma l'angolo θ_{max} rispetto alla verticale, il centro di massa del sistema ha aumentato la sua quota di una quantità $D(1-\cos\theta_{max})$, si può scrivere: $(M+m)gD(1-\cos\theta_{max}) = (I_{pro}+I_{sba})\omega^2/2$, da cui può essere ricavato il valore di θ_{max}.[17]

1.7.4 Esercizio: la danzatrice sui pattini

Le danzatrici su pattini eseguono spesso delle "piroette": esse girano su se stesse e poi, ad esempio allargando le braccia o stendendole lungo il corpo, modificano la velocità di rotazione. Supponendo trascurabile ogni forma di attrito, ed immaginando che il processo di allargare o stendere le braccia sia dovuto unicamente a forze esercitate dalla danzatrice (forze *interne* al sistema danzatrice + braccia), questo fenomeno può essere facilmente interpretato come un effetto della conservazione del momento angolare. Abbiamo dunque un cilindro omogeneo di raggio R, altezza h, massa M (pessima approssimazione per una danzatrice...) che ruota attorno al suo asse con velocità angolare di modulo ω_1. Ad un tratto, per effetto di forze interne, una parte m della massa del cilindro cambia configurazione, e viene a trovarsi ad una distanza D dall'asse del cilindro (è come se la danzatrice avesse allargato un braccio; per semplificare supponiamo trascurabile la massa del braccio e immaginiamo che m sia una massa puntiforme collocata sulla mano - come vedete modellare la povera danzatrice è sempre più difficile!). Quanto vale la velocità angolare ω_2 in questa nuova configurazione geometrica?

Soluzione. Dato che deve conservarsi il momento angolare, deve essere $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, dove I_1 e I_2 sono i momenti di inerzia nelle due configurazioni. I_1 è quello di un cilindro che ruota attorno al suo asse: $I_1 = (M/2)R^2$ (lo abbiamo già calcolato). Nel nostro modello, quando il braccio viene allargato, in pratica il momento di inerzia diventa quello di un cilindro di massa $M-m$ (supponiamo che il raggio resti lo stesso) e di una massa m che si trova a distanza D dall'asse. Quindi, ricordando che il momento di inerzia di un sistema composto è dato dalla somma dei vari contributi, potremo scrivere: $I_2 = (M-m)/2R^2 + mD^2$. È evidente che, generalmente, $I_2 > I_1$; pertanto la velocità angolare nella nuova configurazione sarà $\omega_2 = (I_1/I_2)\omega_1 < \omega_1$.

1.8 Statica del corpo rigido

DA COMPLETARE!

[17] Potete provare a risolvere questo problema anche servendovi solo della conservazione della quantità di moto: provateci!