

Appunti di Fisica Generale  
anno accademico 2007/08

Francesco Fuso<sup>1</sup>  
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa  
Largo Pontecorvo 3, 56127 Pisa

versione 6 - 09.11.07

<sup>1</sup>tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

# Indice

Nota per i lettori	iii
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Dimensioni ed unità di misura	2
1.2 Grandezze e prefissi	3
1.3 Precisione e cifre significative	3
<b>2 Moto del punto</b>	<b>5</b>
2.1 Posizione e spostamento	5
2.1.1 Velocità e derivata	7
2.1.2 Spostamento ed integrale	10
2.1.3 Esercizio: approccio complicato al moto rettilineo uniforme	12
2.1.4 Accelerazione e moto uniformemente accelerato	13
2.1.5 Esercizio: approccio complicato al moto uniformemente accelerato	16
2.1.6 Esercizio: caduta di un oggetto	17
2.1.7 Esercizio: cavalli che si rincorrono	18
2.1.8 Esercizio: evitare un tamponamento tra treni	19
2.1.9 Esercizio: una strana legge del moto	20
2.1.10 Esercizio: un moto vario	20
2.2 Sistemi di riferimento e moto in più dimensioni	21
2.2.1 Legge del moto e traiettoria	23
2.2.2 Esercizio: legge oraria e traiettoria	24
2.2.3 Esercizio: il moto parabolico	25
2.2.4 Esercizio: colpire lontano	25
2.3 Vettori	26
2.3.1 Alcune operazioni con i vettori	29
2.3.2 Esercizio: la caccia al tesoro	31
2.3.3 Composizione delle velocità	32
2.4 Moto circolare e circolare uniforme	33
2.4.1 Esercizio: traiettorie fantasiose	37
2.4.2 Esercizio: moto circolare uniformemente accelerato	37
2.4.3 Moto armonico	38
2.4.4 Esercizio: condizioni iniziali in un moto armonico	41

<b>3</b>	<b>Forze, equilibrio, movimento di corpi puntiformi</b>	<b>43</b>
3.1	Massa e densità di massa . . . . .	43
3.2	Legge di Newton . . . . .	44
3.2.1	Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale . . . . .	46
3.3	Forza peso . . . . .	47
3.3.1	Esercizio: lancio di una pietra . . . . .	47
3.4	Reazione vincolare e terzo principio della dinamica . . . . .	48
3.4.1	Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare . . . . .	49
3.4.2	Esercizio: moto su un piano inclinato . . . . .	51
3.5	Funi inestensibili . . . . .	52
3.5.1	Esercizio: equilibrio di un corpo legato a due funi . . . . .	53
3.5.2	Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo . . . . .	53
3.6	Carrucole senza massa . . . . .	55
3.6.1	Esercizio: la carrucola mobile . . . . .	56
3.6.2	Esercizio: piano inclinato, due masse e carrucola fissa . . . . .	57
3.6.3	Esercizio: due masse ed una carrucola fissa (macchina di Atwood) . . . . .	58
3.7	Forze ed accelerazione centripeta . . . . .	59
3.7.1	Esercizio: la fionda . . . . .	59
3.7.2	Esercizio: una circonferenza su un piano verticale . . . . .	60
3.8	Forza elastica . . . . .	61
3.8.1	Esercizio: massa, piano inclinato e molla . . . . .	64
3.8.2	Esercizio: molla e massa con velocità iniziale diversa da zero . . . . .	65
3.8.3	Oscillazioni forzate . . . . .	66
3.9	Forze d'attrito . . . . .	67
3.9.1	Attrito statico . . . . .	68
3.9.2	Esercizio: spingere o tirare . . . . .	69
3.9.3	Esercizio: piano inclinato con attrito statico . . . . .	69
3.9.4	Esercizio: l'auto che sbanda in curva . . . . .	70
3.9.5	Esercizio: un gioco da luna park . . . . .	70
3.9.6	Attrito dinamico . . . . .	71
3.9.7	Esercizio: frenata a ruote bloccate . . . . .	71
3.9.8	Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico . . . . .	72
3.9.9	Attrito dipendente dalla velocità . . . . .	72
3.9.10	Esercizio: velocità limite di un paracadutista . . . . .	74
3.9.11	Oscillatori realistici . . . . .	74
3.10	Forza gravitazionale (e cenni al teorema di Gauss) . . . . .	77
3.10.1	Esercizio: il peso su un altro pianeta . . . . .	79
3.10.2	Esercizio: il satellite geostazionario . . . . .	79
3.10.3	Esercizio: viaggio al centro della Terra . . . . .	79
3.11	Forza elettrica . . . . .	80
3.11.1	Campo elettrico . . . . .	81
3.11.2	Esercizio: l'atomo planetario . . . . .	82
3.11.3	Esercizio: un sistema di tre cariche elettriche . . . . .	83

---

3.11.4	Esercizio: un sistema di due cariche elettriche . . . . .	84
3.11.5	Esercizio: elettrone in campo elettrico uniforme . . . . .	85
3.11.6	Esercizio: carica, campo elettrico e forza peso . . . . .	86
3.11.7	Esercizio: molla e campo elettrico . . . . .	86

# Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce da lezioni di fisica generale per diversi corsi di laurea, non ha alcuna pretesa di costituire il testo “unico” per la preparazione all’esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario (ed anche in molti testi per la scuola superiore). Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, con pochi discorsi, senza tabelle e con pochissime figure<sup>1</sup>, è soprattutto quello di fornire una sorta di “programma esteso” del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti, con particolare riferimento alla soluzione di semplici esercizi.

## Revisioni:

1. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;
2. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;
3. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;
4. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;
5. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;
6. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;
7. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;
8. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;

---

<sup>1</sup>A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo!

9. Versione 6, 9.11.07: versione leggermente rivista dei capitoli 1 e 2 ed aggiunta di cenni sulle oscillazioni forzate e smorzate in cap. 3;

# Capitolo 3

## Forze, equilibrio, movimento di corpi puntiformi

Nel capitolo precedente ci siamo occupati di stabilire le principali leggi che regolano il moto di un corpo una volta che siano note alcune sue caratteristiche cinetiche (velocità, accelerazione, condizioni iniziali, etc.). Ora intendiamo chiederci quali cause fisiche sono in grado di provocare il moto di un corpo, o eventualmente il suo stato di equilibrio; tali cause sono collegate all'esistenza di *forze*. Nel nostro studio avremo modo di incontrare e anticipare problematiche che, pur avendo un legame diretto con i concetti di forza, si riferiscono ad argomenti che vanno oltre la meccanica, e riguardano, ad esempio, l'elettrostatica.

### 3.1 Massa e densità di massa

La massa, che si indica generalmente con  $m$  e si misura nel sistema mks con il kilogrammo, kg, è una grandezza *scalare* che caratterizza un sistema materiale (un corpo allo stato solido o liquido, un gas). In natura la massa è associata alle particelle che costituiscono la materia: infatti è possibile attribuire una massa agli atomi ed ai suoi vari componenti (protoni, neutroni, elettroni, ed anche alle particelle subnucleari). Protone e neutrone hanno all'incirca la stessa massa, che vale  $m_P \approx 1.6 \times 10^{-27}$  kg; l'elettrone è circa 1800 volte più leggero, essendo  $m_e \approx 9.1 \times 10^{-31}$  kg. La massa del protone (e del neutrone) è all'incirca corrispondente alla cosiddetta **unità di massa atomica**, usata nella fisica e chimica della materia ed indicata in genere con il simbolo u.m.a. (o a.m.u.).

Potendo attribuire una data quantità di massa agli elementi che costituiscono la materia, è piuttosto ovvio immaginare che la massa di un corpo dipenda non solo da “di che cosa” esso è fatto, ma anche da “quanto” esso è. Infatti è esperienza comune che la massa dipende dal *volume* e che, per corpi che sono costituiti dalla stessa materia (intesa anche come “distribuzione spaziale” del materiale) e che si trovano nelle stesse condizioni, maggiore è il volume e maggiore è la massa.

Allora, se  $V$  è il volume del corpo considerato, ed il corpo stesso è *omogeneo*, possiamo introdurre la **densità di massa**  $\rho_m = m/V$ , con unità di misura nel sistema mks  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,

come grandezza che lo caratterizza. Ogni sostanza ha la sua densità di massa caratteristica, che dipende da come è stato “costruito” il corpo considerato (“di cosa è fatto”), e anche dalle condizioni in cui esso si trova, ad esempio temperatura e pressione<sup>1</sup>. Per fare un paio di esempi, l’acqua, in condizioni ordinarie (temperatura ambiente e pressione atmosferica) ha  $\rho_m \approx 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , mentre per l’aria la densità è circa mille volte minore; per un pezzo di piombo, si ha  $\rho_m \approx 11 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Il **peso specifico** di una sostanza è definito come rapporto tra la sua densità di massa e quella dell’acqua (a temperatura e pressione ambiente) ed è una grandezza di uso pratico abbastanza diffuso. Si rimanda alle tabelle per altri valori della densità di massa delle varie sostanze.

Se il corpo non è omogeneo, cioè la materia non è distribuita in modo *uniforme* all’interno del suo volume (pensate, ad esempio, a un corpo che non sia completamente costituito della stessa sostanza, ma abbia delle cavità, dei “vuoti”, al suo interno, per esempio un pezzo di gommapiuma), allora la definizione appena data fornisce un valore *medio* (cioè mediato *sul volume*) della densità di massa. Seguendo la solita tecnica che già abbiamo usato (ad esempio, per definire la velocità istantanea), sarà possibile costruire una **densità locale** del corpo, che in genere sarà funzione della posizione (e quindi di un vettore posizione  $\vec{r}$ ), prendendo in considerazione la massa (molto piccola, al limite infinitesima)  $dm$  contenuta in un volumetto molto piccolo (al limite infinitesimo)  $dV$ . Si potrà quindi scrivere

$$\rho_m(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV} . \quad (3.1)$$

Questa espressione indica in modo compatto l’operazione di derivata di una funzione (la massa locale del corpo, che è, o può essere, funzione della posizione) rispetto ad un volume. Il concetto che questa derivata propone è diverso rispetto alle derivate “più comuni”, ad esempio quelle rispetto al tempo che si trovano nella definizione di velocità e accelerazione. Infatti in questi casi si trattava di funzioni (rispettivamente posizione e velocità) di una singola variabile (il tempo), mentre la derivazione rispetto al volume coinvolge tre variabili (le tre coordinate).

In questo capitolo ci troveremo in genere in condizioni (corpi approssimati come punti geometrici) che ci consentono di trascurare i problemi relativi a corpi (estesi) disomogenei e quindi di non preoccuparci della corretta definizione della densità di massa. Tuttavia nel seguito vedremo come sia importante considerare con attenzione la densità di massa locale in numerosi problemi (ad esempio, determinazione del centro di massa e del momento di inerzia in corpi estesi).

## 3.2 Legge di Newton

Faremo riferimento, per ora, a *corpi puntiformi*, detti anche **punti materiali**. Questa approssimazione può sembrare abbastanza irrealistica, dato che la presenza di una massa implica che il corpo occupi un certo volume. Tuttavia essa è utile per trattare numerose

<sup>1</sup>Nel capitolo dedicato alla terminologia accenneremo ad alcuni motivi che determinano la dipendenza di  $\rho_m$  dalla temperatura.



situazioni, in particolare tutte quelle in cui il moto del corpo è solo **di traslazione**, cioè non coinvolge *rotazioni* rispetto ad un qualche asse; infatti è chiaro che un corpo che possa essere approssimato geometricamente ad un punto (che è senza dimensioni!) non può subire alcun tipo di rotazione. In futuro vedremo come questa approssimazione costituisca un elemento essenziale nel nostro modello per la dinamica dei corpi estesi.

Dunque, la **dinamica** che intendiamo trattare in questo capitolo si occupa di stabilire la cinematica di un corpo puntiforme sottoposto a una o più forze; in modo simile, la **statica** del punto materiale studia le condizioni per cui non c'è moto per un corpo puntiforme che inizialmente si trovi in quiete.

Il concetto fisico di forza è legato all'enunciato del cosiddetto secondo principio della dinamica, o legge di Newton, che stabilisce una proporzionalità diretta, tramite il coefficiente (dimensionato!)  $m$ , tra la forza ed il vettore accelerazione:

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (3.2)$$

Dunque la forza  $\vec{F}$  è un *vettore* che ha dimensioni di [massa][accelerazione], cioè ha unità di misura  $\text{kg m/s}^2$ ; a questa unità, derivata da unità fondamentali, si dà nel sistema mks il nome di Newton (abbreviazione N). Notate che l'operazione che collega forza a massa, cioè la moltiplicazione per uno scalare, non modifica la direzione e il verso, ma solo il modulo (e la dimensione, essendo  $m$  dimensionato) del vettore. Quindi direzione e verso della forza sono gli stessi che per l'accelerazione, mentre il modulo dipende *linearmente* dal valore della massa.

È quindi possibile dare una definizione *operativa* di forza: un corpo di massa  $m$  che ha un'accelerazione  $\vec{a}$  sta subendo una forza data dall'Eq.3.2. Il meccanismo fisico (macroscopico) che origina tale forza dipende dal tipo di sistema e dalla classe di interazioni che si considerano. La fisica ha, nel corso del tempo, impegnato numerosi sforzi per individuare le forze "fondamentali" che regolano i fenomeni naturali; il nostro scopo non è quello di discutere questo argomento, ma in seguito ci limiteremo a proporre una specie di casistica e vedremo alcune "tipologie" di forze, suddividendole in modo fenomenologico. Anticipiamo da subito che, come l'esperienza quotidiana insegna (pensate alla forza che fa cadere in terra un oggetto), alcune tipologie di forza non richiedono necessariamente un contatto tra corpi, potendosi sviluppare "a distanza".

Invertendo l'Eq.3.2 si ottiene l'accelerazione determinata da una certa forza su un punto materiale dotato di una certa massa:

$$\vec{a} = \vec{F}/m . \quad (3.3)$$

Se più forze  $\vec{F}_i$  sono applicate allo stesso punto materiale, vale il **principio di sovrapposizione**:  $\vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i/m$ , dove il simbolo  $\Sigma_i$  denota una somma (vettoriale) su tutte le forze applicate. Talvolta a questa somma vettoriale di forze si dà il nome di *risultante*. Nella soluzione dei problemi in cui sono coinvolte più forze è spesso utile disegnare preliminarmente il loro diagramma vettoriale, chiamato anche **diagramma di corpo libero**, che consiste in un disegno schematico dei vettori forza che agiscono sul punto. Questo diagramma consente di avere una visione preliminare e qualitativa degli effetti delle forze sul corpo stesso.

Come già affermato, il problema fondamentale della **dinamica** è quello di stabilire il moto di un punto materiale, cioè la sua cinematica, a partire dalla conoscenza delle forze applicate. La **statica** del punto materiale<sup>2</sup> si occupa invece di determinare le condizioni sulle  $\vec{F}_i$  che producono un'accelerazione nulla e che quindi non sono in grado di mettere in movimento il corpo se questo è inizialmente fermo. Questa affermazione costituisce parte del cosiddetto **primo principio della dinamica**, noto anche come principio d'inerzia; se il corpo si muove di moto rettilineo uniforme, quando la risultante delle forze applicate è nulla rimane nel suo stato di moto. In buona sostanza, la risultante delle forze nulla implica che non c'è accelerazione, e quindi la velocità (sia essa nulla o costante) non viene alterata. Ricordiamo che, nella casistica dell'equilibrio, si distingue spesso tra equilibrio **stabile, instabile, indifferente**, a seconda che il corpo, posto in posizione di equilibrio e perturbato con un *piccolo* spostamento, ritorni spontaneamente alla posizione di equilibrio, se ne allontani definitivamente, oppure assuma una nuova posizione di equilibrio.

La conoscenza delle forze che agiscono su un corpo permette di scrivere l'**equazione del moto** (di traslazione) del corpo stesso, cioè, in generale, di stabilire la dipendenza dell'accelerazione  $\vec{a}$  dalla risultante delle forze applicate  $\Sigma_i \vec{F}_i$  attraverso l'Eq. 3.3. Concretamente, per un corpo di massa  $m$  sottoposto all'azione delle forze  $\vec{F}_i$ , l'equazione del moto non è altro che l'Eq. 3.3 che riscriviamo ancora per chiarezza:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\Sigma_i \vec{F}_i}{m} . \quad (3.4)$$

Il secondo elemento che abbiamo posto nell'espressione, la derivata seconda rispetto al tempo del vettore posizione  $\vec{r}$  del punto considerato, discende dalla definizione di accelerazione e serve per rendersi conto che l'equazione del moto è in genere un'equazione differenziale. La sua soluzione, complementata dalle condizioni iniziali, è rappresentata da *funzioni* del tempo, in particolare dalle leggi orarie del moto. È chiaro che per risolvere l'equazione del moto ci serviremo di tutte le considerazioni svolte nel Cap. 2 ed è anche chiaro che saremo in grado di determinare effettivamente le leggi orarie solo per un ristrettissimo numero di situazioni fisiche (ad esempio, moti uniformemente accelerati, circolari uniformi, armonici). Quindi, di fatto, saremo in grado di risolvere l'equazione del moto solo per casi "semplici"<sup>3</sup>

### 3.2.1 Esercizio: tre forze applicate allo stesso punto materiale

Su un corpo di massa  $m=0.5$  kg, che approssimeremo come un punto materiale, agiscono tre forze<sup>4</sup>:  $\vec{F}_1 = (3, -1, 2)\text{N}$ ;  $\vec{F}_2 = (3, 6, -2)\text{N}$ ;  $\vec{F}_3 = (-4, -3, 0)\text{N}$ . Supponendo che all'is-

<sup>2</sup>Se invece di un punto materiale si considera un corpo esteso, che può quindi ruotare attorno ad un asse, la condizione di staticità può richiedere ulteriori discussioni, come vedremo nei prossimi capitoli.

<sup>3</sup>Fate attenzione al fatto che le nostre difficoltà sono nello scrivere la *soluzione* dell'equazione del moto, non nello scrivere l'equazione del moto! Scrivere l'equazione del moto richiede infatti soltanto di esprimere in modo corretto le forze che agiscono sul corpo considerato.

<sup>4</sup>Ricordiamo che un modo compatto di esprimere grandezze vettoriali è quello usato qui, in cui la terna di componenti è scritta tra parentesi e le componenti sono separate da una virgola.

tante  $t_0 = 0$  il corpo si trovi fermo all'origine del sistema di riferimento, determinatene la legge oraria del moto.

**Soluzione.** Calcoliamo la risultante delle forze, cioè la forza  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ . Sommando componente per componente, risulta  $\vec{F} = (2, 2, 0)\text{N}$ . L'accelerazione vale allora  $\vec{a} = \vec{F}/m = (4, 4, 0) \text{ m/s}^2$ . Essendo l'accelerazione costante ed uniforme (il testo del problema non cita cause che ne facciano variare il valore col tempo!), il moto sarà uniformemente accelerato. Inoltre, poiché la velocità iniziale è nulla (parte da fermo) lungo le tre direzioni, e quindi anche lungo  $Z$ , e l'accelerazione non ha componenti lungo  $Z$ , il moto si svolgerà sul piano  $XY$  (cioè la coordinata  $z$  sarà sempre  $z = 0$ ). Le leggi orarie del moto nelle due direzioni rilevanti sono allora:  $x(t) = (a_x/2)t^2$ ,  $y(t) = (a_y/2)t^2$ ,  $z(t) = z_0 = 0$ , dove nell'ultimo passaggio si è supposto di porre l'origine dell'asse  $Z$  sul piano in cui il punto si trova inizialmente. Poiché  $a_x = a_y$ , il moto è rettilineo e, dato che vale a qualsiasi istante l'uguaglianza  $x(t) = y(t)$ , esso si svolge lungo la bisettrice del piano  $XY$ .

### 3.3 Forza peso

Tutti i corpi (dotati di massa!) che si trovano sulla faccia della terra sono sottoposti, come è ben noto, ad un'accelerazione verticale (“verso il basso”) pressoché costante ed uniforme, che si indica con  $\vec{g}$  ed il cui valore, è, a Pisa,  $|\vec{g}| \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ . La sua origine è dovuta alla *forza gravitazionale*, di cui parleremo in seguito, e per questo motivo il valore dipende leggermente dalla latitudine e dall'altitudine del luogo considerato.

L'accelerazione gravitazionale dà luogo ad una forza, di modulo  $mg$  e diretta verticalmente verso il basso, che agisce su tutti i corpi dotati di massa  $m$ . Questa forza è la **forza peso**, o semplicemente peso del corpo di massa  $m$ ,  $\vec{F}_P = m\vec{g}$ .

#### 3.3.1 Esercizio: lancio di una pietra

Vi arrampicate su un albero e, da un'altezza  $h$ , lanciate una pietra di massa  $m$ , imprimendole una velocità iniziale di componenti note  $v_{hor}$  e  $v_{vert}$  nelle direzioni rispettivamente orizzontale e verticale. Supponiamo inoltre di lavorare con un sistema di riferimento i cui assi sono diretti verso destra e verso l'alto, nelle direzioni rispettivamente orizzontale e verticale, e che entrambi le componenti della velocità iniziale siano positive (tutto questo per dire che tirate la pietra verso destra e verso l'alto!). A quale distanza orizzontale  $d$  dal punto di lancio la pietra ricade al suolo? Considerate la pietra come un punto materiale e supponete che nel moto della pietra sia assente qualsiasi forza che non sia la forza peso (modo prolisso per dire, tra l'altro, che trascuriamo ogni forza di *attrito*, di cui tratteremo in seguito).

**Soluzione.** Innanzitutto sottolineiamo un aspetto rilevante per tutti i problemi in cui si ha a che fare con “lanci” di oggetti, aspetto che abbiamo già accennato nel capitolo precedente. L'operazione di lanciare un corpo prevede una serie di movimenti in cui sono coinvolte diverse forze, ad esempio quelle muscolari. La soluzione del problema, però,

prescinde dalla descrizione di tali forze e dei meccanismi connessi. Nella maggior parte dei casi, lanciare un oggetto significa imprimergli una certa *velocità iniziale*, quella che ha, per intenderci, quando lascia la nostra mano. Scriviamo quindi l'equazione del moto per le due direzioni rilevanti nel problema, quella orizzontale, che identificheremo con l'asse  $X$ , e quella verticale, che sarà l'asse  $Z$ , riferendoci all'intervallo temporale in cui l'oggetto "vola" liberamente. Per comodità poniamo l'origine del sistema di riferimento in modo tale che il punto  $x = 0, z = h$  sia il punto di partenza della pietra. Poiché sulla pietra agisce la sola forza di gravità, che è verticale, la legge del moto lungo  $X$  è quella di un moto rettilineo uniforme con velocità iniziale  $v_{hor}$  e posizione iniziale nulla, mentre lungo  $Z$  avremo un moto uniformemente accelerato con accelerazione  $-|\vec{g}|$ , ovvero, con scrittura più semplice,  $-g$ , velocità iniziale  $v_{ver}$  e posizione iniziale  $h$ . Quindi si ha:

$$x(t) = v_{hor}t \quad (3.5)$$

$$z(t) = h + v_{ver}t - \frac{g}{2}t^2. \quad (3.6)$$

Matematicamente, la condizione di arrivo al suolo significa trovare l'istante  $t'$  per cui si ha  $z(t') = 0$ . Si tratta quindi di risolvere un'equazione algebrica di secondo grado, la cui soluzione dà  $t'_{1,2} = (v_{ver} \pm \sqrt{v_{ver}^2 + 2gh})/g$ . La soluzione con il segno meno va scartata, perché fisicamente priva di senso (dà un istante negativo, che quindi ha luogo prima dell'istante iniziale, avendo posto  $t_0 = 0$ ); l'altra indica invece il tempo necessario alla pietra per toccare il suolo. Sostituendo questo tempo nella legge del moto lungo  $X$  si ottiene la distanza  $d$  richiesta dal problema, cioè  $d = x(t') = v_{hor}(v_{ver} + \sqrt{v_{ver}^2 + 2gh})/g$ .

Per esercizio potete provare a scrivere la funzione  $z(x)$  che rappresenta analiticamente la traiettoria dell'oggetto nel piano  $XZ$ ; essa deve avere la forma di una parabola che passa per il punto di partenza della pietra ed intercetta l'asse  $X$  a distanza  $d$  dall'origine.

### 3.4 Reazione vincolare e terzo principio della dinamica

Abbiamo affermato che qualsiasi corpo è soggetto all'accelerazione di gravità. Però un corpo di massa  $m$  appoggiato *in piano* (cioè con la superficie di contatto in direzione orizzontale) per terra, o su un pavimento, un tavolo o quant'altro, se è fermo rimane fermo, non sprofonda verso il centro della terra, né levita verso il cielo. Dunque, l'osservazione ci suggerisce che deve esistere una forza uguale e di verso opposto rispetto alla forza peso, tale cioè da mettere il corpo in condizioni di equilibrio statico. A tale forza si dà il nome di **reazione vincolare**, e qui gli diamo simbolo  $\vec{N}$ . Quindi, nel caso considerato (appoggio su un piano, cioè una superficie orizzontale) si ha  $\vec{N} = -m\vec{g}$ . Questo implica che la risultante delle forze sul corpo è nulla:  $\Sigma_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0$ . Di conseguenza, le condizioni sono statiche dato che l'accelerazione è nulla e la velocità iniziale del corpo è nulla (fermo è e fermo resta!).

Chiaramente l'introduzione della reazione vincolare è una schematizzazione per tenere conto di fenomeni di natura microscopica che avvengono sulla superficie di contatto tra

il corpo ed il piano. In questo modello la reazione ha sempre e solo direzione *ortogonale rispetto alla superficie di contatto*. Come discuteremo nell'Es. 3.4.1, questa è la ragione per cui se l'appoggio avviene su una superficie inclinata il corpo non si trova più in condizioni di equilibrio statico.

La presenza della reazione vincolare può essere anche considerata una manifestazione del cosiddetto **terzo principio della dinamica**, o principio di **azione e reazione**, il quale stabilisce che se due corpi interagiscono (cioè sono soggetti a forze) tra di loro, uno dei due corpi esercita sull'altro una forza uguale ed opposta a quella che l'altro esercita su di lui. In altre parole, dette  $\vec{F}_{1,2}$  la forza che il corpo 1 esercita sul 2 e  $\vec{F}_{2,1}$  la forza che il 2 esercita sull'1, si ha  $\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = 0$ . Nel caso della reazione vincolare esercitata da un oggetto poggiato, ad esempio, sul piano di un tavolo, l'oggetto esercita una forza verticale sul tavolo e questo "reagisce" con una forza uguale (in modulo e direzione) ed opposta (in verso) che determina l'equilibrio dell'oggetto. Andando avanti nella nostra descrizione, potremo considerare la forza che le zampe del tavolo esercitano sul pavimento, a sua volta bilanciata da una forza di reazione vincolare che il pavimento sulle zampe, e poi potremo prendere in considerazione la forza che il pavimento esercita sulla struttura portante dell'edificio e così via<sup>5</sup>; ovviamente "tutto funziona", cioè il corpo rimane poggiato sul tavolo, a patto che tutti gli elementi siano dotati della giusta rigidità e non cedano o si rompano sotto il peso.

### 3.4.1 Esercizio: stabilità di un corpo su una guida semicircolare

Supponiamo di avere una massa puntiforme  $m$  vincolata a muoversi su una guida semicircolare di raggio  $R$ , disposta, con la concavità verso l'alto come in Fig.3.4.1, su un piano verticale in presenza dell'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ . Trascuriamo ogni forza diversa da peso e reazione vincolare (e quindi ogni forma di attrito) ed escludiamo anche la possibilità di moto di rotolamento, che d'altra parte non può verificarsi se consideriamo una massa puntiforme. Qual è la posizione di equilibrio della massa, e di che tipo di equilibrio si tratta? (Nella soluzione, indichiamo la posizione della massa attraverso l'angolo  $\theta$  compreso tra direzione verticale e raggio che punta alla posizione della massa, vedi Fig.3.4.1)

**Soluzione.** Il senso comune ci dà immediatamente la risposta al quesito: la posizione di equilibrio è  $\theta = 0$ , cioè con la massa nella posizione più bassa della guida (al centro della concavità). L'equilibrio è stabile, dato che la massa, spostata dalla sua posizione di equilibrio, tende a tornarci. Lo scopo di questa discussione è capire (quantitativamente) il perché di questo comportamento. Le sole forze che agiscono su  $m$  sono la forza peso  $m\vec{g}$ , sempre verticale e diretta verso il basso, e la forza di reazione vincolare, che qui chiamiamo  $\vec{F}_N$ , sempre diretta, per ipotesi, in direzione ortogonale alla superficie che "vincola" la massa, cioè la guida. All'equilibrio ( $\theta = 0$ ) la direzione della reazione vincolare è verticale (diretta verso l'alto), e quindi essa può annullare completamente la forza peso: la risultante

<sup>5</sup>Quante e quali forze ha senso considerare dipende da qual è il sistema che stiamo studiando; se si tratta dell'oggetto poggiato sul tavolo, allora è ovviamente sufficiente limitarsi alle forze che su questo corpo agiscono.

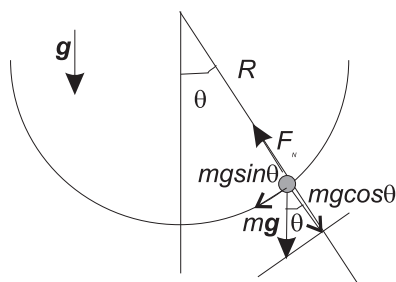


Figura 3.1: Rappresentazione dell'esercizio della massa su guida semicircolare riportato nel testo e diagramma di corpo libero con indicazione delle forze per la massa  $m$ . L'angolo compreso tra forza peso e prolungamento del raggio è pari all'angolo  $\theta$  tra verticale e raggio  $R$  per ovvi motivi di similitudine geometrica.

delle forze è nulla e la massa è in equilibrio. Per  $\theta \neq 0$ , invece, la reazione vincolare non è verticale, e quindi non può annullare completamente la forza peso.

Vediamo di quantificare questi effetti, disegnando il diagramma di corpo libero quando la massa si trova alla posizione  $\theta \neq 0$  generica. La reazione vincolare, essendo sempre ortogonale alla superficie di vincolo (e quindi anche alla semicirconferenza disegnata in figura, che è la sua sezione), è *radiale* e diretta verso il centro della semicirconferenza (stiamo in pratica utilizzando un sistema di coordinate *polari*). Dato che la presenza del vincolo implica che la massa non sprofondi all'interno della guida, né che essa leviti verso l'alto, non ci deve essere moto lungo la direzione radiale, e quindi la risultante delle forze in *questa direzione* deve essere nulla. Allora il modulo della reazione vincolare, tutta e solo radiale, deve essere uguale al modulo della *proiezione* della forza peso in direzione radiale. La trigonometria (vedi figura) ci suggerisce che tale proiezione vale in modulo  $mg \cos \theta$ . D'altra parte, poiché la reazione vincolare agisce solo in direzione radiale, solo la componente della forza peso in questa direzione sarà "compensata". Nella direzione ortogonale alla radiale, cioè nella direzione *tangenziale*, la forza peso ha componente non nulla, che fa muovere la massa, una volta che questa sia stata spostata dalla posizione di equilibrio, con un'accelerazione di modulo  $g \sin \theta$ . Il verso della proiezione della forza, e quindi dell'accelerazione, come si deduce facilmente dalla figura è tale da far tornare la massa verso la posizione di equilibrio, che quindi risulta stabile.

Anche se non richiesto esplicitamente dal testo del problema, scriviamo l'*equazione del moto* per la massa  $m$ , cioè l'accelerazione a cui essa è sottoposta in funzione della posizione in cui si trova (cioè del valore di  $\theta$ ). Dato che il moto avviene in direzione tangenziale, l'accelerazione avrà solo questa componente, e allora l'equazione del moto sarà  $a = -g \sin \theta$ , dove il segno negativo tiene proprio conto della circostanza che la forza, per spostamenti  $\theta > 0$ , tende a muovere la massa nel senso che fa diminuire il valore di  $\theta$ . Dato che, come discusso nel Par. 2.4, l'accelerazione tangenziale è legata all'accelerazione angolare  $\alpha = d^2\theta/dt^2$  dalla relazione  $a = \alpha R$ , possiamo anche scrivere l'equazione del moto per la variabile *angolare*  $\theta$  nella forma  $\alpha = d^2\theta/dt^2 = -(g/R)\theta$ . Come nel caso del pendolo semplice, a cui accenneremo in seguito e che in sostanza è lo stesso sistema

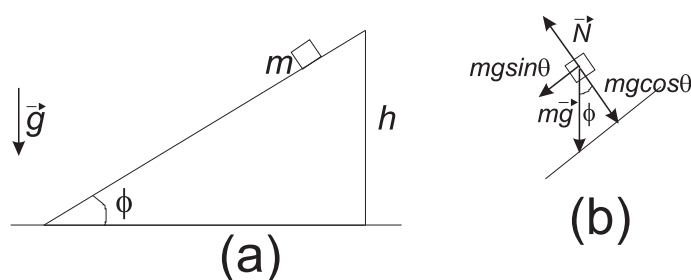


Figura 3.2: Rappresentazione dell’esercizio sul piano inclinato riportato nel testo (a) e diagramma di corpo libero (b) con indicazione delle forze. L’angolo compreso tra la direzione verticale e quella ortogonale al piano è uguale all’angolo tra piano ed orizzontale (indicato con  $\phi$  in figura) per ragioni di similitudine tra triangoli.

fisico che stiamo considerando qui, è possibile mostrare che, per piccoli valori di  $\theta$  vicino alla posizione di equilibrio, la forza “di richiamo” dipende linearmente da  $\theta$  attraverso un coefficiente (dimensionato) di segno negativo, il coefficiente  $-g/R$ . In altre parole, questa forza dà luogo ad un moto oscillatorio attorno a  $\theta = 0$ , ovvero la soluzione dell’equazione del moto considerata (per piccole oscillazioni, cioè  $\theta \ll 1$ ) è quella del moto armonico.

### 3.4.2 Esercizio: moto su un piano inclinato

Poggiate un corpo di massa  $m$ , che approssimerete ad un punto materiale (quindi trascurando i possibili effetti di rotolamento o ribaltamento), su un piano inclinato che forma un angolo  $\phi$  rispetto alla direzione orizzontale (vedi Fig.3.4.2). Quanto vale l’accelerazione che agisce sul corpo? (Trascurate ogni attrito e supponete fisso il piano inclinato.)

**Soluzione.** Disegniamo, come in figura, il diagramma di corpo libero, cioè i vettori delle forze che agiscono sul corpo: avremo la forza peso,  $m\vec{g}$ , diretta verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare,  $\vec{N}$ , diretta verso l’alto e con direzione *ortogonale* rispetto alla superficie di contatto, cioè il piano inclinato. Il corpo non sprofonda nel piano inclinato (purché questo sia abbastanza rigido!), dunque c’è equilibrio statico nella direzione ortogonale al piano stesso, e questo significa che la reazione vincolare è uguale e di verso opposto alla *proiezione* della forza peso lungo la direzione ortogonale al piano inclinato. Il modulo di tale proiezione si trova con la trigonometria e, applicando considerazioni di similitudine geometrica (vedi figura), si trova che esso vale  $mg \cos \phi$ .

Nella direzione parallela al piano la reazione vincolare non può avere alcun effetto, ma esiste comunque una forza che ha componenti lungo questa direzione. Tale forza è la forza peso, che ha una proiezione non nulla nella direzione del piano inclinato, come si vede in figura. La trigonometria ci dice che la proiezione vale  $mg \sin \phi$ . Pertanto il corpo è accelerato in direzione del piano inclinato (ovviamente verso il basso del piano inclinato). L’accelerazione corrispondente si trova con la legge di Newton, dividendo la forza agente sul punto per la sua massa. In modulo, si ha  $|\vec{a}| = g \sin \phi$ . Dunque non c’è equilibrio, e il corpo, se lasciato fermo sul piano inclinato, comincia a scendere verso il basso di moto uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo  $g \sin \phi$  (sempre minore di  $g$ ).

Può essere interessante rispondere ad un'altra domanda: supponendo che l'altezza del piano inclinato sia  $h$  e che il corpo venga lasciato libero di muoversi dalla sommità del piano con velocità iniziale nulla, ci si può chiedere quanto vale, in modulo, la velocità  $v$  con cui esso arriva alla fine del piano. Se poniamo, per comodità, un asse  $X$  parallelo al piano e ne scegliamo l'origine coincidente con la sommità del piano, la legge oraria del moto si scrive  $x(t) = (g \sin \phi)t^2/2$ . Per la trigonometria, lo spostamento percorso *lungo il piano* vale  $\Delta s = h/\sin \phi$ , e la base del piano sarà raggiunta all'istante  $t' = \pm(2\Delta s/(g \sin \phi))^{1/2} = \pm(2(h/\sin \phi)/(g \sin \phi))^{1/2}$ ; la soluzione negativa non ha significato fisico, e quindi terremo solo quella con il segno positivo. Trattandosi di moto uniformemente accelerato, la velocità di arrivo sarà  $v = g \sin \phi t' = (2h/g)^{1/2}$ . Il risultato è notevole, dato che suggerisce che tale velocità è la stessa con cui il corpo arriverebbe al suolo se cadesse liberamente lungo la verticale per un tratto  $h$ . Vedremo in seguito che questa è una manifestazione dei principi di bilancio energetico.

### 3.5 Funi inestensibili

Un comune modo per tenere in equilibrio un corpo dotato di massa è quello di appenderlo ad un solaio rigido ed indeformabile usando una fune (o corda). Un modello frequentemente impiegato nella soluzione di semplici problemi di fisica prevede che le funi siano *inestensibili* e di *massa trascurabile*; in questo modo si trascurano gli effetti dell'*elasticità* del materiale di cui è costituita la fune (che può far variare la lunghezza della fune stessa, pensate ad un laccino di elastico) e tutti i fenomeni di dinamica relativi alla fune stessa (non avendo massa, la fune “non partecipa” alla dinamica!). Una fune di questo tipo è in grado di “trasferire” la forza da un estremo all'altro. Questa affermazione può essere facilmente verificata considerando proprio una massa appesa ad un solaio tramite una fune: il sistema è in equilibrio quando la fune si trova in posizione verticale, e tutti i suoi elementi devono allora essere in equilibrio, cioè soggetti a risultanti di forze nulle. Se consideriamo un piccolo tratto di fune, su di esso devono agire forze uguali ed opposte; estendendo il ragionamento all'intera fune, è chiaro che anche su di essa agiranno forze uguali ed opposte. Allora, sulla massa agirà la forza peso, diretta verticalmente verso il basso, ed una forza generata dalla fune sulla massa stessa, che avrà direzione verticale verso l'alto. Sulla fune agirà il peso della massa, orientato verso il basso ed applicato all'estremità inferiore della fune, ed una forza uguale ed opposta (diretta quindi verso l'alto) alla sua estremità superiore. Questa forza sarà generata dal vincolo che lega la fune al solaio. Dunque è come se il peso della massa venisse “trasferito” al solaio, per essere poi equilibrato dal vincolo.

Questo meccanismo è del tutto generale, e dunque può essere individuato anche in situazioni diverse da quella considerata. Notate che la fune può esercitare una forza solo se si trova “in tensione”, motivo per cui spesso si dà il nome di tensione  $\vec{T}$  alla forza che la fune è in grado di trasferire; la direzione del vettore  $\vec{T}$  deve necessariamente essere quella della fune. Tutte queste considerazioni devono essere tenute ben presenti quando si risolvono esercizi in cui compaiono funi, come negli esempi riportati qui nel seguito.



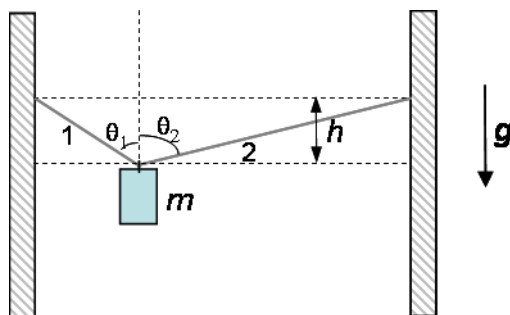


Figura 3.3: Rappresentazione dell'esercizio sull'equilibrio di un corpo legato a due funi, come riportato nel testo.

### 3.5.1 Esercizio: equilibrio di un corpo legato a due funi

Un corpo di massa  $m = 4.0$  kg è legato ad una coppia di funi inestensibili di massa trascurabile, le cui estremità sono vincolate a due pareti verticali, rigide ed indeformabili, parallele fra loro, come rappresentato in Fig. 3.5.1. All'equilibrio, le funi formano angoli rispetto alla verticale pari a  $\theta_1 = \pi/6$  e  $\theta_2 = \pi/3$ . Quanto valgono, in modulo, le tensioni delle due funi,  $T_1$  e  $T_2$ ?

**Soluzione.** Il corpo è ovviamente in equilibrio; dunque, vettorialmente deve essere  $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$ . Il problema è a due dimensioni, e conviene usare un sistema di riferimento  $XY$  (asse  $X$  orizzontale, asse  $Y$  verticale). In direzione  $Y$  deve essere:  $mg = T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2$ . Per la direzione  $X$ , invece, deve essere  $T_1 \sin \theta_1 = T_2 \sin \theta_2$ , da cui  $T_2 = T_1 \sin \theta_1 / \sin \theta_2$ .<sup>6</sup> Combinando le due equazioni si ottiene:  $mg = T_1 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 (\sin \theta_1 / \sin \theta_2))$ , da cui, ricordando che  $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$  e  $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ , si ottiene  $T_1 = mg\sqrt{3}/2 \approx 34$  N e  $T_2 = T_1 \sin \theta_1 / \sin \theta_2 = mg/2 = 20$  N.

### 3.5.2 Esercizio: le piccole oscillazioni del pendolo

Un pendolo semplice è costituito da una massa  $m$  appesa ad una cordicella lunga  $l$ , inestensibile e di massa trascurabile. L'altro capo della cordicella è libero di ruotare senza attriti attorno ad un perno fisso e rigido, ed il moto della massa avviene su di un piano verticale, attorno ad una posizione di equilibrio che corrisponde alla corda in direzione verticale (e la massa in basso!). Considerando solo piccoli scostamenti dalla posizione di equilibrio, come si scrive la legge oraria del moto *angolare* della massa <sup>7</sup>?

<sup>6</sup>Stiamo indicando con  $mg$ ,  $T_1$  e  $T_2$  i *moduli* delle forze; si tratta cioè di grandezze per definizione positive. Attenti con i segni!

<sup>7</sup>È chiaro che, in questo caso, anche una piccola perturbazione mette in movimento il pendolo. Poiché supponiamo trascurabili gli attriti, che, come vedremo, sono forze di tipo dissipativo (rendono impossibile il moto perpetuo!), il moto continua indefinitamente, e quindi la posizione di equilibrio non viene mai mantenuta stabilmente a meno che la massa non vi ci venga posta con velocità nulla. Nella realtà, però, è impossibile annullare del tutto gli attriti, e la posizione di equilibrio stabile è di fatto raggiunta, prima o poi.

**Soluzione.** Sulla massa agiscono la forza peso  $m\vec{g}$  e la tensione  $\vec{T}$  della corda. Immaginiamo di spostare la massa dalla posizione di equilibrio in modo che la cordicella formi un *piccolo* angolo  $\theta$  con la verticale (vedi Fig.3.5.2). Questo angolo  $\theta$  rappresenta la variabile *angolare* che caratterizza la posizione della massa. Quindi per rispondere al problema dobbiamo trovare la legge oraria  $\theta(t)$ , cioè stabilire come varia nel tempo il valore di questo angolo.

Procediamo in modo simile a quanto fatto nello studio della massa vincolata a scorrere sulla guida semicircolare o sul piano inclinato, e notiamo che la proiezione della forza peso lungo la direzione della corda,  $mg \cos \theta$ , è perfettamente compensata dalla tensione  $\vec{T}$ . La proiezione della forza peso lungo la direzione ortogonale alla corda, invece, non ha alcun modo di essere compensata. Tale proiezione vale in modulo  $mg \sin \theta$ . L'equazione del moto lungo tale direzione (che è tangenziale rispetto all'arco di circonferenza descritto dalla massa) si scrive allora:  $a = -(mg \sin \theta)/m$ , dove abbiamo messo un segno meno per indicare che la forza tende sempre a riportare la massa verso la posizione di equilibrio. Ora, se lo spostamento angolare è piccolo, come specificato dal testo del problema, si verifica che  $\sin \theta \sim \theta$ .<sup>8</sup> Dunque si ha  $a = -g\theta$ .

A questo punto leghiamo l'accelerazione tangenziale  $a$  con l'*accelerazione angolare*  $\alpha = d^2\theta(t)/dt^2$ . Usando quanto dimostrato in Par. 2.4, si ottiene  $\alpha = a/l$ . Quindi, rimaneggiando un po' le varie espressioni, si può scrivere  $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \alpha(t) = a/l = -\frac{g}{l}\theta(t)$ . Questa equazione differenziale del secondo ordine è formalmente identica a quella che abbiamo incontrato e risolto in Par. 2.4.3. Dunque la sua soluzione rappresenta un moto armonico per la variabile angolare  $\theta(t)$ , cioè si ha  $\theta(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$ .<sup>9</sup> La pulsazione di questo moto armonico (piccole oscillazioni del pendolo) *deve* essere  $\omega = \sqrt{g/l}$ . Essendo il periodo dell'oscillazione pari a  $T = 2\pi/\omega$ , si ha  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , *indipendente dalla massa e dalle condizioni iniziali*, come fu osservato da Galileo alcuni secoli fa qui a Pisa (*isocronia delle oscillazioni del pendolo*).

Le costanti  $A$  e  $\Phi$  dipendono infine dalle condizioni iniziali del moto. Ad esempio, se

<sup>8</sup>Dal punto di vista matematico abbiamo fatto un'*espansione di Taylor* della funzione seno al primo ordine. L'approssimazione citata ha anche un'ovvia interpretazione geometrica. Se prendete una circonferenza di raggio  $R$  e definite un arco che inscrive un angolo  $\phi$ , allora la lunghezza di questo arco di circonferenza vale  $R\phi$ . La *corda* corrispondente è, geometricamente, il lato di un triangolo isoscele di cui gli altri due lati sono raggi della circonferenza, quindi lunghi  $R$ . Se l'angolo  $\phi \rightarrow 0$ , cioè viene scelto molto piccolo, allora la lunghezza della corda, che è il lato "opposto" a questo angolo, tende al valore  $R \sin \phi$ , come ci si può facilmente convincere notando che gli angoli di base tendono a divenire retti, ed applicando la definizione trigonometrica della funzione seno al triangolo retto che si forma. Allora l'approssimazione che stiamo usando consiste nel rimpiazzare la corda con l'arco, operazione ragionevole per piccoli angoli, e che abbiamo già utilizzato nel derivare il valore dell'accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme in Par. 2.4.

<sup>9</sup>Attenzione al fatto che la variabile che stiamo considerando in questo caso è di tipo angolare, ovvero si misura in radianti, mentre nella derivazione di Par. 2.4.3 avevamo considerato una variabile posizione. L'analogia formale delle equazioni differenziali di cui le leggi orarie sono soluzione ci garantisce che l'espressione scritta è corretta. Se ne volete la riprova, al solito non avete da fare altro che derivare (due volte) la  $\theta(t)$  rispetto al tempo e inserire la derivata seconda ottenuta nell'equazione del moto: deve verificarsi uguaglianza tra i due membri.

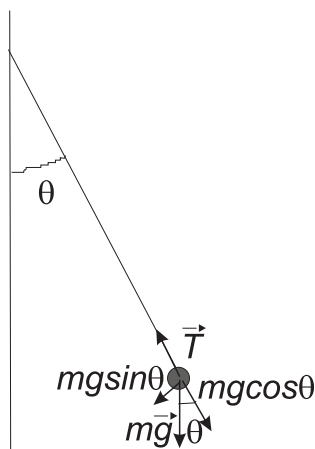


Figura 3.4: Rappresentazione del pendolo semplice trattato nel testo.

facciamo partire il nostro cronometro all'istante  $t_0 = 0$  e supponiamo che a questo istante la massa si trovi nella posizione iniziale  $\theta(t = t_0) = \theta_0$  con una velocità nulla, possiamo facilmente identificarne i valori in  $A = \theta_0$  e  $\Phi = 0$ . Per ottenere questo scopo occorre ricordare anche la legge oraria del moto armonico, che recita, come indicato in Par. 2.4.3,  $d\theta(t)/dt = -\omega A \sin(\omega t + \Phi)$ .<sup>10</sup> Per soddisfare la condizione iniziale sulla velocità, ponendo  $t = t_0 = 0$  nell'equazione, deve allora essere  $0 = -\omega A \sin(\Phi)$ , e si vede subito come la scelta  $\Phi = 0$  sia giusta. Per quanto riguarda la determinazione della costante  $A$ , basta notare che deve essere  $\theta_0 = A \cos(\Phi) = A$ , dove abbiamo usato le condizioni  $t_0 = 0$  e  $\Phi = 0$ . Dunque  $A = \theta_0$ .

## 3.6 Carrucole senza massa

Avendo introdotto le funi inestensibili come elementi dei problemi di meccanica, risulta naturale occuparsi anche di un altro importante sistema, la **carrucola**, che viene impiegata per diversi scopi. Una carrucola è costituita sostanzialmente da un disco, la **puleggia**, che supponiamo imperniato in modo da poter ruotare attorno al suo asse senza incontrare alcuna resistenza (cioè con attrito trascurabile). Una fune, normalmente inestensibile e priva di massa, viene avvolta attorno alla superficie laterale del disco, ovvero passa *senza strisciare* per la gola della puleggia, in modo tale che ad uno spostamento (lineare)  $\Delta s$  della fune corrisponde uno spostamento (angolare)  $\Delta\theta = \Delta s/R$  della puleggia,  $R$  essendo il suo raggio. Nel caso dinamico, questa relazione, che ha una semplice ed ovvia origine geometrica (di tanto si svolge la fune, di altrettanto si muove un punto sulla circonferenza che rappresenta la superficie laterale della puleggia), dà luogo a relazioni che legano velocità ed accelerazione (lineari) della fune e velocità ed accelerazione (angolari) della

<sup>10</sup>Notate che indicato la velocità angolare del pendolo con la simbologia, prolissa,  $d\theta(t)/dt$ ; questo è necessario per evitare confusioni. Infatti il simbolo  $\omega$  che generalmente denota la velocità angolare di un corpo in moto circolare è qui stato già utilizzato per la pulsazione. Le due grandezze non coincidono!

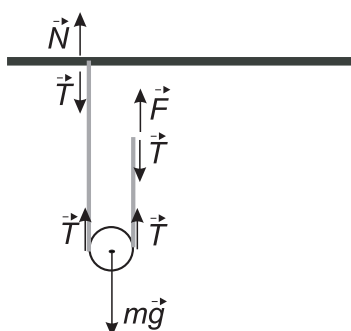


Figura 3.5: Rappresentazione schematica di una carrucola mobile e diagrammi delle forze rilevanti per la soluzione del problema riportato nel testo.

puleggia; se la fune non scivola sulla gola della puleggia, si ha infatti:  $\omega = v/R$  e  $\alpha = a/R$ , dove il significato dei vari termini è ovvio.

Normalmente la puleggia è un oggetto massivo, cioè dotato di massa<sup>11</sup>, e pertanto “partecipa” alla dinamica del sistema. Per il momento, però, supporremo di avere a che fare con carrucole *di massa trascurabile*; come vedremo negli esempi di seguito, le carrucole hanno in questo caso il ruolo di sistemi in grado di “guidare” le funi, e di conseguenza di “far cambiare direzione” alle forze che le funi “trasferiscono” da un punto all’altro.

### 3.6.1 Esercizio: la carrucola mobile

La carrucola mobile è il sistema raffigurato in Fig.3.6.1. Una corda è fissata per un capo ad una superficie fissa e rigida (ad esempio, un robusto solaio), e passa per la gola di una carrucola a cui è appesa una massa  $m$ ; all’altro capo della corda viene applicata (da parte di un operatore esterno) una forza  $\vec{F}$ . Supponendo la corda inestensibile, quanto vale il modulo della forza applicata perché il sistema sia in equilibrio? (Trascurate ogni attrito e considerate nulla la massa della carrucola.)

**Soluzione.** Anche in questo caso tracciamo i diagrammi di corpo libero per *tutti* gli elementi rilevanti nel sistema. Cominciamo con il capo della corda fissato al solaio: esso è fermo, e pertanto il solaio esercita sulla corda una reazione vincolare  $\vec{N}$  uguale e di verso opposto rispetto alla forza  $\vec{F}$  trasmessa dalla corda. Per l’ipotesi di inestensibilità, ed essendo la corda ferma dato che chiediamo una condizione di equilibrio, tale forza deve avere modulo uguale a quello della forza richiesta dal problema. Esaminiamo il diagramma delle forze per la carrucola: notiamo che esse non hanno tutte lo stesso punto di applicazione, e che la carrucola non è un corpo puntiforme. In effetti, una carrucola può a ben diritto ruotare per effetto di forze tangenti al suo perimetro, situazione che, come vedremo in seguito, rende cruciale il fatto che le forze hanno punti di applicazione diversi fra loro. Però, essendo il sistema in equilibrio, possiamo disinteressarci di questo tipo di problemi (se la corda è ferma, la carrucola non può ruotare!). Allora, sulla carrucola

<sup>11</sup>In conseguenza di questo, il disco che costituisce la puleggia ha un **momento di inerzia** non trascurabile, come studieremo in seguito.

agisce la forza peso  $m\vec{g}$  diretta verticalmente verso il basso, e le *due* forze  $\vec{F}$  dirette verticalmente verso l'alto e trasmesse dalla corda sui due punti opposti della circonferenza della puleggia. Dunque la condizione di equilibrio statico si traduce nel porre la risultante delle forze uguale a zero, cioè a scrivere  $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F} = 0$ . Tenendo conto del verso dei vari vettori, scritta per i moduli questa equazione diventa:  $mg = F + F$ , cioè  $F = mg/2$ . Il risultato è notevole: questa semplice macchina permette di dimezzare la forza necessaria per sostenere un corpo contro la sua forza peso! Se ci pensate un po', il motivo è proprio nello sfruttamento "intelligente" della reazione vincolare esercitata dal solaio sulla corda.

### 3.6.2 Esercizio: piano inclinato, due masse e carrucola fissa

Riprendiamo il problema dell'Es. 3.4.2, supponendo stavolta che al corpo di massa  $m$  che scivola (senza attrito) sul piano inclinato (angolo  $\phi$  rispetto all'orizzontale) sia attaccata una fune inestensibile e di massa trascurabile. Dopo essere passata per la gola di una carrucola che si trova, fissata tramite un giogo, alla sommità del piano inclinato, la fune termina con una massa  $M$ , libera di muoversi in direzione verticale (la Fig. 3.6.2 mostra uno schema della situazione). Quanto vale, in modulo, l'accelerazione  $a$  con cui il corpo scivola sul piano inclinato?

**Soluzione.** Nell'esercizio risolto in precedenza avevamo stabilito che l'accelerazione era dovuta alla componente della forza peso in direzione parallela al piano, di modulo  $g \sin \phi$ . Avendo aggiunto la fune, e supponendo che essa sia diretta parallelamente al piano, come in figura, occorre tenere conto della forza di tensione  $\vec{T}$  trasferita dalla fune sul corpo. Scegliendo come positiva la direzione verso il basso, l'equazione del moto in direzione parallela al piano (nella direzione ortogonale al piano si ha, ovviamente, equilibrio) diventa:  $a = g \sin \phi - T/m$ , dove  $T$  indica il modulo della tensione ed il segno negativo tiene conto del fatto che la fune tende a "far risalire" il corpo lungo il piano. Osserviamo ora la situazione all'altro estremo della fune: la massa  $M$  è soggetta alla sua forza peso,  $M\vec{g}$ , diretta verso il basso, e alla tensione  $\vec{T}$  esercitata dalla fune verso l'alto, dove abbiamo usato la condizione di inestensibilità per concludere che la tensione trasmessa dalla fune ai suoi estremi ha lo stesso modulo (e direzione ovviamente diversa, a causa della carrucola che "fa deviare" la fune). Vedremo nel seguito che questa affermazione non sarà più valida se vorremo tenere conto della rotazione della puleggia, cosa a cui saremo costretti se essa ha una massa non trascurabile. Tuttavia nelle condizioni di questo problema possiamo senz'altro affermare che la tensione della fune è, in modulo, la stessa ai due estremi della fune stessa. Dunque, detta  $A$  l'accelerazione della massa  $M$  e scegliendo un riferimento verticale con il segno positivo diretto verso l'alto, l'equazione del moto per la massa  $M$  si scrive:  $A = T/M - g$ . L'inestensibilità della fune comporta anche un'altra conseguenza: istante per istante, lo spostamento delle due masse, pur avvenendo in direzioni diverse, dovrà avere lo stesso valore in modulo, dato che esse sono collegate dalla fune inestensibile. Questa considerazione, che ha carattere geometrico, ci induce a stabilire che anche velocità ed accelerazione hanno lo stesso valore per le due masse (formalmente, queste grandezze si ottengono derivando rispetto al tempo una e due volte lo spostamento; essendo lo spostamento uguale per le due masse, uguali in modulo devono

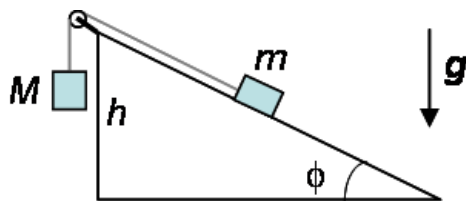


Figura 3.6: Rappresentazione dell'esercizio sul piano inclinato e carrucola riportato nel testo.

essere anche velocità ed accelerazione), per cui  $A = a$ . Allora le equazioni del moto per i due corpi si scrivono:  $a = g \sin \phi - T/m$  e  $a = T/M - g$ ; eliminando, con un po' di algebra, l'incognita  $T$ , si ottiene:  $a = g(m \sin \phi - M)/(m + M)$ . In accordo con il buon senso, questa accelerazione si annulla per un dato valore,  $m \sin \phi = M$ , ed assume un segno che dipende dal valore di  $M$  e di  $\phi$  (il moto di  $m$  può avvenire verso il basso o verso l'alto del piano inclinato a seconda del valore di  $M$ !).

### 3.6.3 Esercizio: due masse ed una carrucola fissa (macchina di Atwood)

Si chiama “macchina di Atwood il sistema costituito da due masse,  $m_1, m_2$ , unite da una fune inestensibile che passa attraverso la gola della puleggia di una carrucola fissata ad un solaio rigido ed indeformabile, come schematicamente mostrato in Fig. 3.6.3. Supponendo trascurabili le masse di fune e puleggia ed assente ogni forma di attrito, quanto vale l'accelerazione  $a_1$  della massa  $m_1$ ?

**Soluzione.** Il problema si risolve usando lo stesso approccio della soluzione all'Es. 3.6.2. Dato che il problema è, di fatto, unidimensionale (le masse si muovono in direzione verticale, anche se una verso l'alto e l'altra verso il basso), conviene prendere un sistema di riferimento “curvilineo” che segue la direzione della fune ed è orientato, ad esempio, in modo tale da essere positivo quando la massa  $m_1$  scende e la massa  $m_2$  sale. Le equazioni del moto per le due masse si scrivono allora:  $a_1 = g - T/m_1$ ,  $a_2 = T/m_2 - g$ . Osserviamo ora che, per gli stessi motivi dell'esercizio precedente,  $a_1 = a_2$ , per cui, con un po' di algebra:  $a_1 = a_2 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ . Potete provare ad ottenere lo stesso risultato utilizzando un'altra scelta per il sistema di riferimento (ad esempio impiegando un riferimento verticale orientato verso l'alto o verso il basso), esercizio che può essere istruttivo per notare il “valore dei segni” (con un riferimento verticale occorre imporre che le accelerazioni dei due corpi abbiano segni opposti: uno scende e l'altro sale!). Torneremo in seguito ad esaminare lo stesso problema dal punto di vista del bilancio energetico e nel caso in cui la puleggia abbia una massa diversa da zero, mettendo in luce analogie e differenze con la situazione studiata qui.

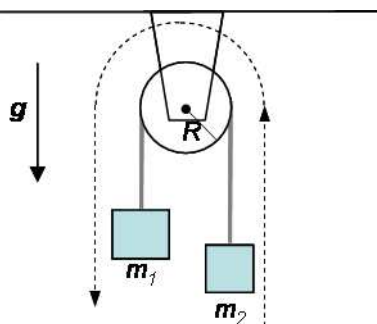


Figura 3.7: Schema di una “macchina di Atwood”; la linea tratteggiata indica il sistema di riferimento usato nella soluzione.

### 3.7 Forze ed accelerazione centripeta

Come abbiamo visto nella cinematica, un corpo in moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio  $R$  e dotato di velocità angolare  $\omega$  subisce un’accelerazione centripeta, diretta radialmente verso il centro, di modulo  $\omega^2 R$ . Se il corpo ha massa  $m$ , il fatto che esso percorre una traiettoria circolare (o curvilinea) implica necessariamente la presenza di una forza, o risultante di forze, in grado di fornire al corpo l’accelerazione centripeta di cui esso ha bisogno. Se questa forza viene a mancare, il corpo comincia a muoversi in direzione rettilinea lungo la tangente alla circonferenza (“parte per la tangente”).

Si parla spesso nel linguaggio comune di *forza centrifuga*, cioè diretta verso l’esterno della circonferenza (opposta alla centripeta!). In effetti, è esperienza comune che, quando ad esempio percorrete in automobile una curva, sentite una forza che vi spinge *verso l’esterno* della curva stessa. Non entreremo qui nei dettagli dell’argomento, che trovate trattato nei testi di fisica alla voce “sistemi di riferimento non inerziali”, ma solo accennare all’interpretazione del fenomeno. Quando siete in curva in automobile sentite una forza che agisce (ed esiste) *solo* nel sistema di riferimento a cui siete solidali, cioè l’automobile su cui siete seduti. L’automobile è in moto rispetto al sistema di riferimento fissato sulla strada, che, ad esempio, possiamo centrare sul centro di curvatura. Dunque, l’automobile subisce una forza centripeta (dovuta all’*attrito statico* tra gomme ed asfalto, argomento che esamineremo in seguito), ma voi sedete sull’automobile. Quindi nel sistema di riferimento dell’automobile dovete risentire di una forza *apparente* (che cioè non ha una “vera” origine fisica, ma appare solo nel sistema di riferimento dell’automobile) che bilancia la forza che genera l’accelerazione centripeta. Questa è, molto in breve, l’origine della forza centrifuga.

#### 3.7.1 Esercizio: la fionda

La fionda di Davide (quello di Davide e Golia) è costituita da una pietra di massa  $m$  legata ad una corda inestensibile di lunghezza  $L$  tenuta da Davide con una mano. La pietra è posta in rotazione uniforme con periodo  $\tau$ ; quanto vale, in modulo, la tensione  $T$  della corda?

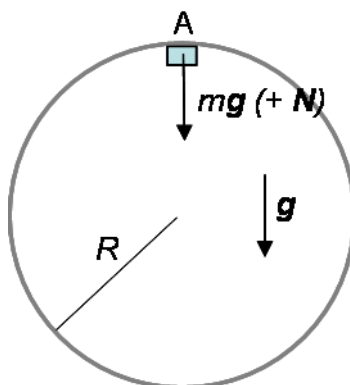


Figura 3.8: Visione laterale del percorso a “giro della morte” relativo all’esercizio discusso nel testo, con indicate le forze che agiscono sul punto materiale (automobilina) quando questa si trova nel punto più alto del percorso.

**Soluzione.** La velocità angolare del moto vale  $\omega = 2\pi/\tau$  e la forza che agisce sulla pietra deve essere in grado di fornirle un’accelerazione (centripeta) di modulo  $a_c = \omega^2 L = 4\pi^2 L/\tau^2$ , essendo  $L$  il raggio dell’orbita circolare che la pietra percorre. Tale forza è rappresentata dalla tensione della fune, che in effetti ha direzione e verso “giusti”, come potete facilmente verificare. Quindi deve essere  $T = ma_c = 4m\pi^2 L/\tau^2$ . Si noti che, per il terzo principio della dinamica e per il fatto che il capo della corda tenuto dalla mano di Davide non si muove, la mano deve esercitare sulla corda una forza uguale e di verso opposto (poi questa forza si trasferirà alle braccia, al busto, etc., fino ad arrivare ai piedi di Davide, sui quali il terreno esercita una forza d’attrito uguale ed opposta che tiene fermo Davide).

Vedremo in seguito diversi casi in cui l’accelerazione centripeta sarà data da forze che agiscono a distanza (ad esempio, forze gravitazionali ed elettriche), situazione molto comune in diversi ambiti della fisica. Queste forze, dette spesso *centrali*, non richiedono contatto tra gli oggetti e sono responsabili ad esempio della rotazione dei pianeti attorno al sole.

### 3.7.2 Esercizio: una circonferenza su un piano verticale

Un giochino da bambini è costituito da una guida circolare di raggio  $R$  disposta su un piano verticale che viene percorsa con attrito trascurabile da un’automobilina di massa  $m$ . Si osserva che se la velocità di percorrenza dell’automobilina è al di sotto di un certo valore di soglia, l’automobilina, giunta sul punto più alto del percorso (il punto A di Fig. 3.7.2), si stacca da questa e cade al suolo. Quanto vale, in modulo, la *minima* velocità  $v'$  che l’automobilina deve avere quando passa per il punto più alto del percorso affinché non si stacchi dalla guida e cada in terra?

**Soluzione.** Nel linguaggio comune l’esercizio chiede di stabilire la condizione minima che permette all’automobilina di compiere un “giro della morte”; la nostra esperienza lu-



dica suggerisce che questa condizione è legata alla velocità di percorrenza, in particolare a quella che si tiene nel punto (“critico”) di quota massima, e con questa soluzione vogliamo quantificare questa sensazione. Affinché l’automobilina possa percorrere l’orbita circolare occorre che essa risenta di un’accelerazione centripeta che, per una velocità  $v$  generica, si scrive, in modulo,  $a_c = v^2/R$ , ed ha sempre direzione radiale verso l’interno della circonferenza. Le forze “vere” che agiscono sull’automobilina sono il peso,  $m\vec{g}$ , sempre diretto verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare esercitata dalla guida  $\vec{N}$ , sempre diretta radialmente verso l’interno della circonferenza. Il valore della forza di reazione vincolare si “adatterà” alle condizioni del moto, nel senso che si suppone che la guida sia sempre in grado di fornire una reazione vincolare adeguata per permettere il moto lungo la traiettoria circolare assegnata (a meno che la guida non si deformi o si spacchi!). Quando l’automobilina raggiunge il punto di quota massima, A in figura, la forza peso assume totalmente una direzione radiale, contribuendo quindi a fornire accelerazione centripeta al corpo. Se vogliamo determinare la condizione minima che permette la percorrenza della guida, cioè l’esistenza dell’accelerazione centripeta richiesta, possiamo supporre che la reazione vincolare, in queste condizioni, *si annulli*. Quindi è  $mv'^2/R = mg$ , da cui  $v' = \sqrt{gR}$ . Ovviamente per  $v > v'$  la reazione vincolare assumerà il valore necessario a fare in modo che l’automobilina risenta della “giusta” accelerazione centripeta, che quindi sarà data dagli effetti combinati di reazione vincolare e forza peso.

## 3.8 Forza elastica

Discutendo del comportamento delle funi inestensibili abbiamo affermato che trascuravamo gli effetti dell’elasticità. In realtà la forza elastica è molto comune, ed è caratteristica di numerosi sistemi fisici, ad esempio delle molle. Una molla (pensate per esempio a una molla a spirale, oppure ad un pezzo di laccino elastico<sup>12</sup>) è un sistema dotato di una certa lunghezza di riposo,  $l_0$ , che rappresenta la lunghezza in assenza di forze applicate; talvolta si pone nulla la lunghezza a riposo, una condizione poco realistica, ma utile in alcuni casi. Quando la molla viene compressa, essa esercita una forza che tende a farla riallungare fino a ri-assumere la lunghezza di riposo. Viceversa, se la molla viene estesa, essa tende a comprimersi cioè a riportarsi alla lunghezza di riposo. Detta  $\Delta l = l - l_0$  la variazione della lunghezza della molla,  $l$ , rispetto alla lunghezza di riposo (si ha  $\Delta l > 0$  in caso di estensione,  $\Delta l < 0$  in caso di compressione), la forza elastica si scrive:

$$F_{ela} = -k\Delta l, \quad (3.7)$$

dove  $k$  è una costante, detta costante elastica (con unità di misura N/m) che dipende dal sistema considerato (ad esempio, materiale, caratteristiche costruttive, dimensioni della molla, etc.). Il segno meno che compare nella legge tiene conto del fatto che la forza tende ad opporsi alla variazione della lunghezza. Questa espressione della forza elastica,

<sup>12</sup>Va inteso che questi non sono gli unici sistemi di tipo elastico, ma sono quelli che meglio si prestano ad operare in una dimensione, che è il caso a cui ci restringeremo; inoltre supporremo in genere di avere molle dotate di *massa trascurabile*, in modo da evitare complicazioni nello studio della loro dinamica.

che si trova anche sotto la denominazione di *legge di Hooke*, vale, nonostante la sua semplicità, in numerose situazioni, almeno finché lo spostamento imposto alla molla non supera determinati valori dipendenti dal materiale di cui essa è costituita e dalla forma con cui essa è realizzata<sup>13</sup>.

È ovvio che, nel caso esemplificato, ci riferiamo ad una molla che agisce in una sola direzione (l'asse di una molla a spirale cilindrica, ovvero la lunghezza del segmento di laccino elastico), e quindi forza e compressione o estensione della molla hanno la stessa direzione. Nulla ci vieta di complicarci la vita e scrivere la relazione in forma vettoriale,  $\vec{F}_{ela} = -k\vec{\Delta}l$ , dove abbiamo introdotto una variazione di lunghezza in forma vettoriale, con un ovvio significato, ma l'utilità di questa complicazione è spesso irrilevante<sup>14</sup>.

Vediamo che tipo di moto si ottiene se una forza elastica è applicata ad un punto materiale di massa  $m$ . Per esigenze di chiarezza, supponiamo che il moto avvenga lungo l'asse  $X$  (orizzontale) e che anche la molla sia ovviamente disposta lungo quest'asse (ci restringiamo ad un caso unidimensionale), con un estremo coincidente con l'origine. Dunque la forza, ovviamente unidimensionale (lungo l'asse  $X$ ), si scrive  $F = -k(x - l_0)$ , con  $l_0$  lunghezza di riposo, e l'equazione del moto lungo questa direzione è:  $a = -(k/m)(x - l_0)$ . Tenendo conto che l'accelerazione è, formalmente, la derivata seconda rispetto al tempo della (funzione) posizione, possiamo scrivere questa equazione differenziale:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{k}{m}l_0, \quad (3.8)$$

dove, ricordiamo,  $k$  ed  $m$  sono costanti (opportunamente dimensionate) di segno *positivo*. Questa equazione differenziale assomiglia parecchio a quella che abbiamo discusso e risolto in Par. 2.4.3. Anzi, se poniamo  $l_0 = 0$ , l'equazione scritta è esattamente identica a quella che dava luogo al moto armonico. In effetti, tutti sappiamo benissimo per esperienza comune che il moto di una massa attaccata ad una molla è di tipo oscillatorio.

Ricordando quanto affermato in Par. 2.4.3, è facile dimostrare che la soluzione di questa equazione differenziale, ovvero la legge oraria del moto  $x(t)$  per la massa attaccata alla molla, si scrive:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + x_P, \quad (3.9)$$

<sup>13</sup>Come scoprirete in corsi futuri, le forze elastiche si verificano in tantissimi sistemi fatti di tantissimi materiali. Ad esempio una trave di ferro è un sistema elastico (continuo) e risponde elasticamente ad una deformazione, ad esempio applicata in direzione ortogonale rispetto al suo asse. Probabilmente la vostra esperienza tecnica è già sufficientemente estesa da farvi sapere che, se per deformare la trave applicate una forza superiore ad un certo limite, detto spesso carico di snervamento, il comportamento elastico viene seriamente danneggiato in modo permanente, cioè la trave rimane deformata *plasticamente*.

<sup>14</sup>Sempre in tema di complicazioni, per descrivere completamente alcune situazioni fisiche risulta insufficiente anche l'espressione vettoriale che abbiamo riportato. In essa, infatti, assumiamo che la costante elastica abbia lo stesso valore per spostamenti che avvengono in una qualsiasi direzione; ci si riferisce, cioè, ad un mezzo elastico **isotropo**, le cui caratteristiche non dipendono dalla direzione considerata. Poiché non tutti i mezzi elastici hanno questa proprietà, occorre introdurre dei coefficienti elastici diversi per ognuna delle tre direzioni considerate. Talvolta, poi, si verifica che la forza elastica dipende dallo spostamento in un modo che è ancora più complesso, per cui la forza in una direzione tiene conto anche degli spostamenti nelle altre direzioni. In questo caso conviene esprimere il coefficiente  $k$  come un  *tensore*, che dal punto di vista algebrico equivale ad una matrice  $3 \times 3$  (in questo ambito, un vettore equivale ad una matrice  $3 \times 1$  o  $1 \times 3$ ).

con  $\omega = (k/m)^{1/2}$  pulsazione dell'oscillazione considerata. Come al solito, le costanti  $A$  (dimensionata come una lunghezza) e  $\Phi$  (termine di fase) si determinano tenendo conto delle condizioni iniziali dello specifico problema considerato. La costante  $x_P$ , che si chiama *soluzione particolare*, coincide con la *posizione di equilibrio*  $x_{EQ}$  della massa, ovvero del sistema elastico che stiamo considerando<sup>15</sup>.

La **posizione di equilibrio** è quella in cui la massa resterebbe se vi venisse posta con velocità nulla. Dunque per  $x = x_{EQ}$  si devono avere condizioni statiche, cioè deve essere  $F(x = x_{EQ}) = 0$ . È immediato calcolare che, nel caso considerato (asse della molla e spostamento della massa in direzione orizzontale, dove non agisce la forza peso, ed in assenza di altre forze), si ha  $x_{EQ} = l_0$ . Quindi in questo caso la legge oraria del moto si scrive  $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + l_0$ . Verifichiamo immediatamente che questa funzione del tempo è una buona soluzione per l'equazione differenziale Eq. 3.8: la derivata seconda si scrive  $-\omega^2 A \cos(\omega t + \Phi)$ , dato che la costante  $x_P = x_{EQ} = l_0$  ha derivata ovviamente nulla. L'uguaglianza tra i membri di Eq. 3.8 è allora ben soddisfatta, e quindi possiamo tranquillamente concludere che la soluzione è giusta.

Come già anticipato altrove, la determinazione delle costanti  $A$  e  $\Phi$  dipende dalle condizioni iniziali del moto. La procedura generale per la loro determinazione è poco gradevole da scrivere. Tuttavia, come abbiamo già potuto verificare, in molte situazioni è pressoché immediato attribuire un significato fisico alle costanti  $A$  e  $\Phi$ . In particolare, quando  $t_0 = 0$  e la condizione iniziale sulla velocità è  $v(t = t_0 = 0) = v_0 = 0$ , cioè la massa viene "lasciata andare con velocità nulla" da una posizione  $x(t = t_0 = 0) = x_0 \neq x_{EQ}$ , è facile verificare che  $\Phi = 0$ . Infatti, come dimostrato in Par. 2.4.3, la legge oraria della velocità è  $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \Phi)$ . Se si vuole che questa funzione si annulli per  $t = t_0 = 0$ , occorre che  $\Phi = 0$ . In queste condizioni è anche evidente che  $A = x_0 - x_{EQ} = x_0 - l_0$ , come potete facilmente dimostrare. Negli esercizi riportati nel seguito avrete modo di incontrare altre condizioni iniziali, che quindi danno luogo ad altri valori di  $A$  e  $\Phi$ .

Naturalmente anche la posizione di equilibrio  $x_{EQ}$  dipende dal particolare problema che si sta considerando. Ad esempio, se appendiamo una molla (di massa trascurabile) per un capo ad un solaio e la teniamo in direzione verticale, e all'altro capo applichiamo una massa  $m$  (come nella bilancia delle peschiere), la posizione di equilibrio non sarà più corrispondente alla lunghezza di riposo della molla stessa. Infatti in questo caso sulla massa agiranno due forze, entrambi verticali, la forza elastica e la forza peso. All'equilibrio esse dovranno bilanciarsi, e quindi dovrà essere, per i moduli,  $mg = k(x_{EQ} - l_0)$ , ovvero  $x_{EQ} = mg/k + l_0$ . Il fatto che la posizione di equilibrio della molla dipenda *linearmente* dalla forza ad essa applicata (la forza peso, nell'esempio considerato) è alla base dell'operazione dei *dinamometri*, strumenti che permettono di misurare il modulo di una forza attraverso l'allungamento della molla.

Da ultimo, sottolineiamo un dettaglio arcinoto, che qui risulta parecchio evidente. Un corpo sottoposto all'azione di una forza elastica non è necessariamente fermo quando si trova nella sua posizione di equilibrio. Infatti all'equilibrio le forze sono nulle, ma questo

<sup>15</sup>Ricordiamo che, nel nostro modello, la molla ha massa trascurabile e quindi "non partecipa" alla dinamica; dunque il sistema è all'equilibrio quando la massa è all'equilibrio.

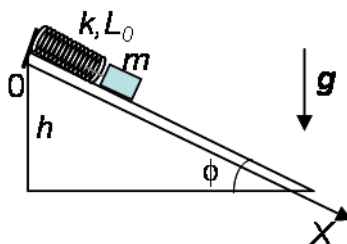


Figura 3.9: Schema dell'esercizio con piano inclinato e molla discusso nel testo.

non ha nulla a che fare con lo stato di moto del corpo. Se pensate alle leggi orarie del moto armonico, l'affermazione è evidente: un corpo sottoposto a forze elastiche può benissimo *passare* per la posizione di equilibrio con una velocità tutt'altro che nulla, anzi, la velocità è proprio massima, in modulo, nella posizione di equilibrio. Tenetelo ben presente nella soluzione dei problemi che incontrerete!

### 3.8.1 Esercizio: massa, piano inclinato e molla

Torniamo a considerare il caso dell'Es. 3.4.2, con una massa  $m$  che può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato (che forma un angolo  $\phi$  rispetto all'orizzontale ed ha altezza  $h$ ), e supponiamo stavolta che la massa sia collegata alla sommità del piano inclinato attraverso una molla di lunghezza di riposo  $L_0$  (che supponiamo minore della lunghezza del piano inclinato) massa trascurabile e costante elastica  $k$ , come in Fig. 3.8.1. Usando un asse  $X$  diretto parallelamente al piano e centrato sulla sua sommità, quanto vale la posizione di equilibrio  $x_{EQ}$  della massa? E supponendo di tirare la molla finché la massa non raggiunge la base del piano inclinato, e di lasciarla andare liberamente, cioè con velocità iniziale nulla, all'istante iniziale  $t_0 = 0$ , come si scrive la legge oraria del moto  $x(t)$ ? In particolare, a quale istante  $t'$  la massa ripassa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio?

**Soluzione.** Le forze che agiscono sulla massa nella direzione parallela al piano sono la componente in questa direzione della forza peso, che abbiamo già determinato in precedenza, e la forza elastica. L'equazione del moto, facendo attenzione ad usare i segni giusti per il sistema di riferimento proposto, si scrive allora:  $a = g \sin \phi - (k/m)(x - L_0)$ . La posizione di equilibrio è quella in cui  $a = 0$ , cioè  $x_{EQ} = L_0 + (mg/k) \sin \phi$ .<sup>16</sup> La legge oraria del moto armonico, che vale in questo caso, si scrive, in generale:  $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi) + x_P$ , dove  $x_P = x_{EQ} = L_0 + (mg/k) \sin \phi$  ed  $\omega = (k/m)^{1/2}$ . Le costanti  $A$  e  $\Phi$  vanno determinate tenendo conto delle condizioni iniziali, che, nel caso del problema considerato, recitano:  $x(t = t_0 = 0) = h/\sin \phi$  (ricordate che la lunghezza del piano inclinato considerato è  $L = h/\sin \phi$ ) e  $v(t = t_0 = 0) = 0$ . Deve quindi essere:  $x(t = 0) = h/\sin \phi = A \cos(0 + \Phi) + L_0 + (mg/k) \sin \phi$  e  $v(t = 0) = 0 = dx(t)/dt = -A\omega \sin(0 + \Phi)$ . Dalla

<sup>16</sup>In questo esercizio non abbiamo posto valori numerici, ma supponiamo comunque che la posizione di equilibrio sia tale che la massa si trovi sul piano inclinato, cioè che  $x_{EQ} < L = h/\sin \phi$ .

seconda equazione si ottiene subito  $\Phi = 0$ , che, sostituito nella prima, permette di scrivere:  $h/\sin\phi = A + L_0 + (m/k)\sin\phi$ , da cui:  $A = h/\sin\phi - L_0 - (mg/k)\sin\phi$ . Quindi la legge oraria del moto che tiene in debito conto le condizioni iniziali del problema è:  $x(t) = (h/\sin\phi - L_0 - (mg/k)\sin\phi)\cos(\omega t) + (mg/k)\sin\phi + L_0 = (h/\sin\phi)\cos(\omega t) + (L_0 + (mg/k)\sin\phi)(1 - \cos(\omega t))$ , con, ricordiamo,  $\omega = (k/m)^{1/2}$ .

Rispondiamo infine all'ultima domanda. Il moto, ovviamente, è tutt'altro che uniformemente accelerato (è armonico!), per cui di sicuro il tempo  $t'$  non può essere determinato con le equazioni che riguardano questo tipo di moto. Formalmente, dobbiamo invece risolvere l'equazione (*trascendentale*, a causa della funzione coseno):  $x(t' = ((h/\sin\phi)\cos(\omega t) + (L_0 + (mg/k)\sin\phi)(1 - \cos(\omega t')) = x_{EQ} = L_0 + (mg/k)\sin\phi$ , da cui, semplificando e riarrangiando:  $(h/\sin\phi - (L_0 + (mg/k)\sin\phi))\cos(\omega t') = 0$ . Questa condizione si ottiene quando la funzione coseno si annulla, cosa che avviene, la prima volta<sup>17</sup>, quando  $\omega t' = \pi/2$ , ovvero per  $t' = \pi/(2\omega) = \pi/(2(k/m)^{1/2})$ . Questo istante coincide con un quarto del periodo di oscillazione, come ci si poteva attendere notando che, nel moto periodico che si sta considerando, occorre un quarto di periodo affinché la massa ripassi per la posizione di equilibrio (in mezzo periodo raggiungerà la posizione di estremo di oscillazione opposta a quella di partenza, in tre quarti di periodo ripasserà ancora per la posizione di equilibrio, e dopo un periodo tornerà nella posizione iniziale, e così via).

### 3.8.2 Esercizio: molla e massa con velocità iniziale diversa da zero

Una massa puntiforme  $m = 20$  g è attaccata all'estremità di una molla di costante elastica  $k = 8.0 \times 10^{-2}$  N/m e lunghezza a riposo  $L_0 = 10$  cm. La molla è disposta lungo l'asse  $X$  (direzione orizzontale) di un sistema di riferimento e la massa può scivolare senza attrito sul piano orizzontale. All'istante  $t_0 = 0$  la massa, che inizialmente si trova nella posizione di equilibrio, viene messa in moto con velocità iniziale  $v_0 = 20$  cm/s nel verso positivo dell'asse  $X$ . Come si scrive la legge oraria del moto  $x(t)$ ? A quale istante  $t'$  la massa ripassa per la prima volta per la posizione di equilibrio?

**Soluzione.** Il moto è unidimensionale ed avviene lungo la direzione  $X$ . La forza peso non ha effetti sul moto, essendo bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dal piano; inoltre non esistono altre forze eccetto quella elastica della molla. Quindi l'equazione del moto lungo  $X$  è semplicemente:  $a = -(k/m)(x(t) - L_0)$ , e la posizione di equilibrio è  $x_{EQ} = L_0 = 1.0 \times 10^{-1}$  m. Le leggi orarie di moto e velocità si scrivono, in generale:  $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + x_{EQ} = A\cos(\omega t + \Phi) + L_0$  e  $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$ , con  $\omega = (k/m)^{1/2} = 2.0$  rad/s. Le condizioni iniziali impongono:  $x(t = t_0 = 0) = x_{EQ} = A\cos(0 + \Phi) + x_{EQ}$  e  $v(t = t_0 = 0) = v_0 = -A\omega\sin(0 + \Phi)$ . Dalla prima si ottiene subito  $\Phi = \pi/2$  (notate che, in questo caso, non è  $\Phi = 0$ !), e, sostituendo nella seconda, si ottiene:  $v_0 = -A\omega\sin(\pi/2)$ , da cui:  $A = -v_0/\omega = -1.0 \times 10^{-1}$  m. La legge oraria del moto è quindi:  $x(t) = A\cos(\omega t + \pi/2) + L_0 = -A\sin(\omega t) + L_0$ , dove i valori numerici di  $A$  ed

<sup>17</sup>Il moto è ovviamente periodico, per cui ci sono infinite soluzioni, ma il problema chiede di determinare la "prima".

$\omega$  (“ampiezza” e pulsazione) sono stati determinati sopra. Per stabilire il valore  $t'$  si può ragionare in analogia con quanto fatto nella soluzione dell'Es. 3.8.1; deve infatti essere  $x(t') = x_{EQ} = L_0 = -A \sin(\omega t') + L_0$ , equazione soddisfatta quando la funzione seno si annulla (per la prima volta ad istanti successivi a  $t_0$ ). Deve quindi essere  $\omega t' = \pi$ , da cui  $t' = \pi/\omega = \pi/(k/m)^{1/2} \approx 1.6$  s. Notate che questo tempo corrisponde a metà del periodo di oscillazione, come ci si attendeva considerando il moto periodico della massa in questo problema.

### 3.8.3 Oscillazioni forzate

In questo paragrafo vogliamo occuparci di un problema parecchio rilevante dal punto di vista delle applicazioni, ma purtroppo un po' pesante in termini matematici. Torniamo allora alla massa che si muove senza attrito in direzione  $X$  essendo sottoposta alla forza di una molla di massa trascurabile, costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo  $l_0$ , che stavolta, per risparmiare un po' di fatica, supporremo nulla; al solito, centriamo il nostro asse di riferimento sull'altro estremo della molla. Questo sistema ha un comportamento elastico, cioè, ad esempio, la massa, se viene allontanata dalla sua posizione di equilibrio, comincia a muoversi di moto armonico con pulsazione  $\omega = (k/m)^{1/2}$ ; la legge oraria del moto è infatti  $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$ , dove abbiamo tenuto conto del fatto che la posizione di equilibrio è  $x_{EQ} = l_0 = 0$ . Possiamo anche aggiungere un'ulteriore semplificazione, consistente nel supporre che le condizioni iniziali del sistema siano tali che  $\Phi = 0$ , per cui si ha semplicemente  $x(t) = A \cos(\omega t)$ , con  $A$  costante da determinare sulla base delle condizioni iniziali.

Immaginiamo ora che alla massa sia anche applicata anche un'altra forza  $\vec{F}_f(t)$  che agisce lungo l'asse  $X$  ed è dovuta ad un operatore esterno (voi che fate avanti e indietro con la vostra mano che trattiene la massa, oppure una macchina che produce un moto *alternativo*). Immaginiamo in particolare che la perturbazione prodotta da questa forza (che si chiama **forzante**) vari periodicamente nel tempo secondo la funzione  $F_f(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$ , con  $F_0$  e  $\omega_f$  rispettivamente *ampiezza* e pulsazione della forzante. Dunque l'equazione del moto della massa lungo  $X$  si scrive:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t) . \quad (3.10)$$

Cercheremo ora di dimostrare che il moto della massa ha ancora un carattere oscillatorio, le cui caratteristiche dipendono fortemente dal valore di  $\omega_f$  dando luogo a situazioni specifiche nella condizione, detta di **risonanza**,  $\omega_f = \omega = (k/m)^{1/2}$ .

Anche se situazioni fisiche descritte da equazioni differenziali simili all'Eq. 3.10 non sono facilmente individuabili nella vita quotidiana, potete credere che esse sono responsabili di innumerevoli fenomeni, che vanno dal crollo dei ponti quando essi vengono percorsi da un esercito in marcia regolare, al funzionamento di qualsiasi tipo di orologio, alla ricezione tramite antenna delle onde radio e addirittura al comportamento di qualsiasi tipo di interazione fra radiazione (ad esempio la luce) e materia.

Si può dimostrare abbastanza facilmente che una buona soluzione per l'Eq. 3.10 è data da:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \cos(\omega_f t) , \quad (3.11)$$

con  $\omega = (k/m)^{1/2}$ , e  $A, B$  costanti opportunamente dimensionate da determinare in base alle condizioni iniziali del sistema. Come al solito, la verifica richiede di scrivere la derivata seconda della funzione  $x(t)$  rispetto al tempo e di inserirla nell'equazione differenziale per vedere se si ottiene identità (uguaglianza) tra i suoi membri. Mettendo insieme tutte le regoline che conosciamo a proposito della derivata, ci possiamo rendere facilmente conto che  $d^2x_f(t)/dt^2 = -\omega^2 A \cos(\omega t) - \omega_f^2 B \cos(\omega_f t)$ . Inserendo questa espressione in Eq. 3.10 si vede che l'identità fra i membri è garantita se:  $\omega^2 = k/m$  (che avevamo già imposto) e  $\omega_f^2 = k/m + F_0/(mB) = \omega^2 + F_0/(mB)$ .

Riscriviamo l'espressione appena determinata in una forma diversa, in modo da evidenziare il valore che deve assumere la costante  $B$  in funzione di  $\omega$  e  $\omega_f$ . Con un po' di algebra si ottiene:

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_f^2 - \omega^2} . \quad (3.12)$$

È facile rendersi conto che, dal punto di vista matematico, questa funzione “diverge” per  $\omega_f \rightarrow \omega^2$ ; in altre parole, se la pulsazione della forzante viene scelta in modo da essere molto simile alla pulsazione imperturbata del sistema, allora il valore di  $B$  diventa molto molto grande, tendendo verso l'infinito per  $\omega_f^2 \rightarrow \omega^2$ . Dato che la costante  $B$  (che ora è diventata, nel nostro caso, una funzione della differenza tra le pulsazioni) sta a moltiplicare la funzione  $\cos(\Omega t)$  in Eq. 3.11, funzione che ha un valore sempre compreso tra  $-1$  e  $+1$ , la nostra osservazione significa che in condizioni prossime alla risonanza la massa si mette ad oscillare con un'ampiezza che tende a divenire sempre più grande quanto più  $\omega_f$  è vicina ad  $\omega$ . In queste condizioni di *risonanza*, l'oscillazione, che avviene a pulsazione  $\omega \simeq \omega_f$ , assume un'ampiezza gigantesca, con tutte le conseguenze (crollo del ponte...) che questo può comportare. Anche se la trattazione che abbiamo riportato è strettamente valida in presenza di alcune assunzioni specifiche, ad esempio che la lunghezza di riposo della molla sia  $l_0 = 0$ , ovvero che il sistema imperturbato abbia  $x_{EQ} = 0$ , e che la forzante sia in fase con l'oscillazione imperturbata (avevamo posto  $\Phi = 0$ ), le conseguenze trovate sono a grandi linee valide per ogni situazione che possa essere descrivibile come un oscillatore armonico forzato.

## 3.9 Forze d'attrito

Negli esercizi svolti finora abbiamo sistematicamente ignorato di trattare le forze di attrito, pur avvertendo che esse, nella realtà, possono essere tutt'altro che trascurabili. L'esistenza dell'attrito è infatti ben nota (e spesso deplorata) nel linguaggio comune, dove esso è identificato come un fenomeno che “si oppone” al moto. Dal punto di vista microscopico l'attrito è conseguenza di una varietà di fenomeni che si verificano, su scala atomica e molecolare, all'interfaccia di contatto tra un corpo in moto, o in *moto incipiente* (cioè

che “prova” a muoversi), ed una superficie “scabra” (cioè non liscia) o un’atmosfera “fluida” che lo circonda (acqua, aria, etc.). Tradizionalmente, conviene usare dei modelli che consentono di suddividere l’attrito in statico, dinamico e viscoso, anche se occorre sottolineare che questa suddivisione non ha fondamenti precisi dal punto di vista microscopico e vale soltanto quando si intendono valutare in forma macroscopica gli effetti dell’attrito.

### 3.9.1 Attrito statico

L’attrito statico è una forza che si oppone al *moto incipiente* di un corpo. È esperienza comune che, se applichiamo una forza ad un corpo poggiato su una superficie scabra, cioè non liscia, né particolarmente “scorrevole”, come potrebbe essere una lastra di ghiaccio o uno strato di olio, il corpo non si sposta finché la forza applicata non supera un certo valore *di soglia*. Nella nostra schematizzazione, responsabile di questo comportamento è la forza di attrito statico (l’aggettivo indica che il corpo che subisce la forza *resta fermo*). Detto  $N$  il *modulo* della reazione vincolare che la superficie di appoggio esercita sul corpo, la forza di attrito è, in modulo:

$$F_{a,s} \leq \mu_s N, \quad (3.13)$$

dove  $\mu_s$  è un coefficiente (adimensionale) detto **coefficiente di attrito statico**. Questo coefficiente, che è generalmente<sup>18</sup>  $\mu_s \leq 1$ , dipende dalla natura delle superfici poste a contatto (materiale, finitura superficiale, etc.) ed il suo valore si può reperire in tabelle specifiche. La forza di attrito statico ha *sempre la stessa direzione e verso opposto rispetto alla forza applicata*, cioè è sempre tale da opporsi a quest’ultima in modo da annullarla totalmente, mantenendo così fermo il corpo.

L’Eq.3.13 contiene un segno di minore-uguale ( $\leq$ ); il significato è che l’attrito assume un valore sempre esattamente in grado di annullare la forza applicata al corpo, purché questa non superi il valore massimo stabilito dall’Eq.3.13, cioè  $N\mu_s$ . Se questo si verifica, allora il corpo comincia a muoversi, e l’attrito, se c’è, diventa dinamico. È ovvio, inoltre, che se non si applica nessuna forza al corpo l’attrito è nullo; se così non fosse, la forza di attrito statico provocherebbe movimento spontaneo! Quindi se appoggiamo un corpo di massa  $m$  su un piano orizzontale scabro, dotato di coefficiente di attrito  $\mu_s$ , e non ci applichiamo nessuna forza esterna (sul corpo agiscono solo il peso e la reazione vincolare, che si annullano a vicenda) possiamo affermare con certezza che la forza di attrito è *rigorosamente nulla*. Se, invece, applichiamo al corpo una forza esterna (lo spingiamo con il dito) che ha componente orizzontale di valore  $F_x$ , ed osserviamo che il corpo rimane fermo, possiamo affermare con certezza che la forza di attrito statico è *rigorosamente*  $F_{A,s} = -F_x$ . Potrà poi succedere che, aumentando il valore di questa forza, ad un dato istante il corpo si metta in movimento (lungo  $X$ ), e potremo allora affermare con certezza che la forza applicata *ha rigorosamente modulo*  $|F_x| > F_{A,s,max} = \mu_s |\vec{N}| = \mu_s mg$ . Tenete sempre presente questo semplice esempio quando sono in gioco delle forze di attrito statico!

<sup>18</sup>I coefficienti di attrito statico e dinamico sono rigorosamente inferiori o uguali ad uno se si trascurano fenomeni di adesione. Questi fenomeni sono ad esempio usati nelle gomme delle auto e moto da corsa.



### 3.9.2 Esercizio: spingere o tirare

Dovete spostare in direzione orizzontale una cassa di massa  $m$  appoggiata su un piano scabro (il coefficiente di attrito statico vale  $\mu_s$ ). La cassa è pesante e bassa, cioè dovete chinarvi per toccarla. Avete due opzioni per applicare alla cassa la vostra forza  $\vec{F}$ : potete “spingerla”, cioè applicare da dietro la vostra forza, oppure “tirarla”, cioè applicare da davanti la vostra forza. Quale opzione è più vantaggiosa?

**Soluzione.** Quando spingete, la forza  $\vec{F}$  ha una componente non nulla diretta verticalmente *verso il basso*, che chiamiamo  $F_{vert}$ .<sup>19</sup> Quindi la reazione vincolare  $\vec{N}$  esercitata dal piano di appoggio sulla cassa, che deve essere tale da annullare tutte le forze in direzione verticale applicate alla cassa stessa (altrimenti questa sprofonderebbe nel piano, o si solleverebbe da esso, e supponiamo che questo non si verifichi), è diretta verticalmente verso l'alto, e vale, in modulo,  $N = mg + F_{vert}$ . Invece, se la cassa viene trainata, la componente verticale della forza applicata è diretta *verso l'alto*, e quindi la reazione vincolare vale, in modulo,  $N = mg - F_{vert}$ , un valore evidentemente minore che nel caso precedente. Poiché per spostare la cassa dovete vincere la forza di attrito statico, proporzionale proprio al modulo di  $\vec{N}$ , conviene “tirare” la cassa, piuttosto che “spingerla”.

### 3.9.3 Esercizio: piano inclinato con attrito statico

Se poggiate un oggettino approssimabile come puntiforme su di una superficie scabra che forma un angolo con l'orizzontale e variate questo angolo (in pratica avete costruito un piano inclinato con inclinazione variabile, con un angolo rispetto all'orizzontale che chiamiamo  $\theta$ ), vedrete che l'oggettino sta fermo finché l'angolo non supera un dato valore  $\theta_L$ . Se il coefficiente di attrito statico tra oggettino e piano vale  $\mu_s$ , come si esprime tale angolo limite  $\theta_L$ ?

**Soluzione.** Come già abbiamo avuto modo di osservare, detta  $m$  la massa dell'oggetto e  $\theta$  l'angolo formato dal piano inclinato con l'orizzontale, abbiamo che la forza di reazione vincolare esercitata dal piano vale, in modulo,  $N = mg \cos \theta$ , cioè equivale in modulo alla proiezione della forza peso lungo la direzione ortogonale al piano. La proiezione lungo la direzione parallela al piano, che vale  $mg \sin \theta$ , tende a far scivolare verso il basso il corpo. Rispetto al caso che abbiamo considerato, ad esempio, nell'Es. 3.4.2, in cui avevamo supposto trascurabile l'attrito, ora abbiamo una nuova forza nel diagramma di corpo libero, la forza di attrito statico. Per definizione, la sua direzione è quella lungo la quale tenderebbe a verificarsi il moto, cioè la direzione del piano inclinato, ed il suo verso è opposto a quello del moto, cioè punta verso la sommità del piano inclinato. Il suo modulo vale, *al massimo*,  $N\mu_s = mg\mu_s \cos \theta$  (abbiamo indicato con  $\mu_s$  il coefficiente di attrito statico del piano). L'oggetto comincia a muoversi quando la forza  $mg \sin \theta$  uguaglia il valore massimo della forza di attrito:  $mg \sin \theta = mg\mu_s \cos \theta$ , cioè, semplificando e riarrangiando i termini,  $\tan \theta = \mu_s$ . Quindi l'oggetto si muove per  $\theta > \theta_L = \arctan(\mu_s)$ .

<sup>19</sup>Se chiamiamo  $\theta$  l'angolo compreso tra  $\vec{F}$  e la direzione orizzontale, la componente verticale in un sistema di riferimento orientato verso il basso vale  $F_{vert} = F \sin \theta$ .

### 3.9.4 Esercizio: l'auto che sbanda in curva

Un'automobile di massa  $m = 1000$  kg percorre una curva con raggio di curvatura  $R = 100$  m a velocità costante  $v$ . Supponendo che il coefficiente di attrito statico tra gomme ed asfalto sia  $\mu_s = 0.20$  (ragionevole per strada bagnata), qual è la velocità massima di percorrenza  $v_{max}$  al di sopra della quale l'auto comincia a sbandare (cioè a partire per la tangente)? (Nella soluzione, considerate l'automobile come un punto materiale e trascurate il fatto che essa ha quattro ruote, sospensioni, etc.)

**Soluzione.** Per curvare, cioè percorrere un arco di circonferenza, l'auto deve subire un'opportuna accelerazione centripeta, il cui modulo vale  $a_{centr} = \omega^2 R = v^2/R$ , dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione  $\omega = v/R$ . Questa accelerazione è evidentemente fornita dall'attrito (*statico*, perché infatti vogliamo non ci sia moto lungo la direzione radiale, quella di interesse per la forza centripeta). Essendo il modulo della reazione vincolare  $N = mg$ ,<sup>20</sup> la forza di attrito vale, *al massimo*,  $F_{a,s,max} = \mu_s N = \mu_s mg$ . Dunque la velocità massima di percorrenza si ottiene imponendo che la forza di attrito sia in grado di fornire l'accelerazione centripeta necessaria:  $mv_{max}^2/R = mg\mu_s$ , da cui  $v_{max} = \sqrt{gR\mu_s}$ . Il risultato numerico, usando  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>, dà  $v_{max} \approx 17$  m/s, corrispondenti a poco più di 60 Km/h: quindi guidate con prudenza!

### 3.9.5 Esercizio: un gioco da luna park

Un gioco da luna park è costituito da un cilindro cavo di raggio  $R$  che può ruotare attorno al suo asse, che ha direzione verticale, con velocità angolare  $\omega$ . Inizialmente il cilindro è fermo, ed esiste un pavimento sul quale un temerario omino (di massa  $m$ ) può muoversi fino ad appoggiarsi con la schiena alla parete interna del cilindro cavo rimanendo in posizione verticale. Quindi il cilindro viene messo in rotazione e, quando è stata raggiunta una certa velocità angolare  $\omega_m$ , il pavimento viene rimosso, e la situazione diventa quella di Fig. 3.9.5(a). Se il coefficiente di attrito statico tra schiena e parete del cilindro vale  $\mu$ , quanto deve valere, al minimo,  $\omega_m$  affinché l'omino non cada al suolo? (Per la posizione supponete un omino puntiforme!)

**Soluzione.** Considerate con attenzione il diagramma delle forze che agiscono sull'omino quando questo si trova "attaccato" alla parete laterale del cilindro (senza cadere!), rappresentato schematicamente in Fig. 3.9.5(b); c'è sicuramente la forza peso, diretta verso il basso, ed una forza di reazione vincolare, diretta radialmente e quindi appartenente al piano orizzontale. Il modulo di questa reazione vincolare,  $N$ , deve essere tale da consentire un moto circolare a velocità  $\omega_m$  all'omino, e quindi deve essere  $N = m\omega_m^2 R$ . Ora, chi sostiene l'omino deve per forza essere la forza di attrito statico tra schiena e parete del cilindro, che vale  $F_A \leq \mu N = \mu m\omega_m^2 R$ . Affinché l'omino resti in equilibrio occorre, per i moduli, che  $F_A \geq mg$ , da cui, rimaneggiando,  $\omega_m = (g/(\mu R))^{1/2}$ . Ripensate a questo esercizio ragionando per bene sulle direzioni delle varie forze!

<sup>20</sup>Questa affermazione è vera se la strada è piana. Pensate a cosa succede per le curve cosiddette "paraboliche", in cui il piano stradale è inclinato: vedrete che in questo caso la reazione vincolare ha una componente che "aiuta" la forza di attrito e, di conseguenza, la massima velocità di percorrenza della

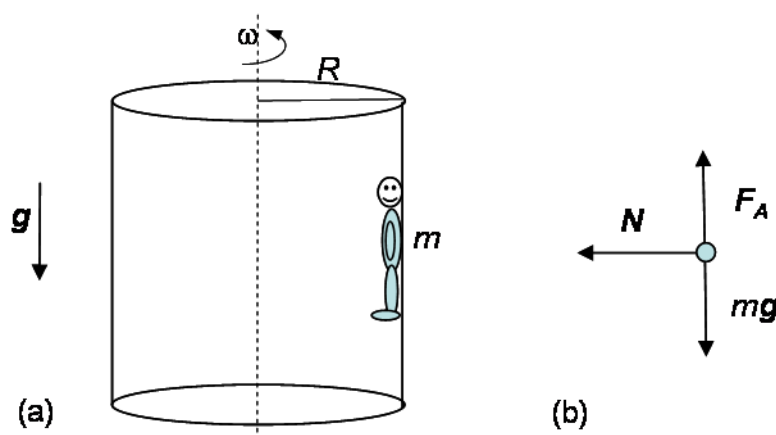


Figura 3.10: Rappresentazione dell'esercizio sul gioco da luna park descritto nel testo (a); schema del diagramma delle forze agenti sull'omino, considerato puntiforme e all'equilibrio (b).

### 3.9.6 Attrito dinamico

La forza di attrito dinamico si instaura quando un corpo *si muove* su una superficie scabra. L'attrito dinamico ha sempre la *stessa direzione e verso opposto* rispetto allo spostamento del corpo, ma, dato che il corpo si muove, non ha evidentemente modulo sufficiente per determinare una condizione di equilibrio statico. Il modulo della forza di attrito dinamico vale:

$$F_{a,d} = \mu_d N, \quad (3.14)$$

dove  $N$ , al solito, è il modulo della forza di reazione vincolare. Siete invitati a verificare le differenze tra le espressioni dell'attrito dinamico e statico: oltre all'ovvia differenza sui coefficienti (il **coefficiente di attrito dinamico**  $\mu_d$  è in genere, a parità di materiale, più piccolo di quello statico, da cui l'osservazione di esperienza comune che occorre una forza maggiore per mettere in moto un corpo che non per mantenercelo), qui il segno di minore-uguale è rimpiazzato da un uguale. Questo riflette la circostanza che l'attrito dinamico è una forza di intensità ben definita, che si oppone allo spostamento di un corpo, mentre l'attrito statico è una sorta di reazione rispetto al tentativo del corpo a muoversi sotto l'azione di una forza esterna.

### 3.9.7 Esercizio: frenata a ruote bloccate

L'automobile dell'Es. 3.9.4 ora viaggia in rettilineo a velocità costante  $v = 72$  km/h. Ad un dato istante il guidatore frena bloccando le ruote (non è il modo migliore per frenare, ma l'auto è vecchia e non ha l'ABS!). Sapendo che  $\mu_d = 0.20$ , quanta strada percorre l'auto prima di fermarsi?

---

curva aumenta.

**Soluzione.** Il problema è unidimensionale, ed approssimiamo l'auto ad un punto materiale, disinteressandoci di ogni possibile effetto di cabrata, cappottamento, rotazione attorno all'asse, etc. Quando le ruote vengono bloccate, si instaura una forza di attrito *dinamico* (le ruote strisciano sull'asfalto, cioè la superficie della gomma si muove, strisciando, sull'asfalto) che vale  $mg\mu_d$ , e l'auto subisce una decelerazione pari a  $-g\mu_d$  (si ottiene dividendo la forza per la massa ed il segno meno significa che la forza si oppone al verso del moto). Allora la legge oraria del moto, scegliendo  $t_0 = 0$  come istante iniziale della frenata, tenendo conto che la velocità iniziale è  $v$ , supponendo che il moto avvenga lungo l'asse  $X$  e ponendo  $x_0 = 0$ , è quella di un moto uniformemente accelerato (ovvero "decelerato", visto che i segni di velocità e accelerazione sono opposti tra loro):  $x(t) = vt - \frac{g\mu_d}{2}t^2$ . Ora, quando l'auto si ferma, significa che la sua velocità si è annullata per effetto della decelerazione uniforme. Questo si verifica all'istante  $t_{stop}$  tale che  $v(t_{stop}) = 0$ . Risolvendo si ha  $t_{stop} = v/(g\mu_d)$ . La distanza percorsa nella frenata è  $x(t_{stop}) = v^2/(g\mu_d) - g\mu_d v^2/(2g\mu_d)^2 = v^2/(2g\mu_d)$ .<sup>21</sup> Il risultato numerico, tenendo conto che la velocità iniziale di 72 km/h equivale a 20 m/s, dà uno spazio di frenata che vale circa 100 m (ed abbiamo trascurato i tempi di reazione del guidatore!): quindi guidate con moltissima prudenza!

### 3.9.8 Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico

Consideriamo ancora una volta le condizioni dell'Es. 3.4.2, e supponiamo stavolta che ci sia attrito dinamico tra corpo e piano, con coefficiente  $\mu_d$ . Come si scrive, in questo caso, l'accelerazione  $a$  del corpo lungo il piano?

**Soluzione.** Rispetto alle condizioni dell'esercizio citato occorre considerare un'ulteriore forza  $\vec{F}_A$ , che ha la direzione del piano inclinato e verso opposto rispetto al moto del corpo. Dunque l'equazione del moto è, usando i moduli:  $a = g \sin \phi - F_A/m = g \sin \phi - N\mu_d/m = g(\sin \phi - \mu_d \cos \phi)$ , dove abbiamo tenuto conto dell'espressione di  $|\vec{N}|$  per un piano inclinato.

### 3.9.9 Attrito dipendente dalla velocità

L'attrito dinamico che abbiamo considerato esiste, ovviamente, solo se la velocità del corpo è non nulla, ma esso non dipende esplicitamente dal valore della velocità stessa. Ci sono invece numerose situazioni fisiche in cui la forza di attrito *dipende linearmente* dalla velocità:

$$\vec{F}_{a,v} = -\beta\vec{v}, \quad (3.15)$$

dove abbiamo usato la notazione vettoriale ed abbiamo posto un segno meno per ribadire il fatto che la forza ha la stessa direzione e verso opposto rispetto alla velocità. Il coefficiente (dimensionato: le sue dimensioni sono kg/s)  $\beta$ , che è sempre positivo, dipende dal sistema considerato. Questo tipo di attrito è tipico del moto di corpi all'interno di fluidi "reali",

<sup>21</sup>Quando avremo introdotto la *conservazione dell'energia meccanica*, saremo in grado di ottenere questo risultato in modo assai più diretto.

cioè dotati di *viscosità*, ed infatti questa forza è spesso denominata **attrito viscoso**. Avremo di nuovo a che fare con l'attrito viscoso quando tratteremo l'argomento dei fluidi. Per il momento ci limitiamo a dire che il coefficiente  $\beta$  è legato al coefficiente di viscosità del fluido considerato e dipende anche dalle caratteristiche del corpo che si sta muovendo nel fluido<sup>22</sup>. D'altra parte, che per un corpo esteso che si muove all'interno di un fluido viscoso (l'aria lo è) le forze di attrito dipendano dalla geometria del corpo stesso è ben noto a chiunque sappia che la "penetrazione aerodinamica" delle automobili (valutata attraverso un coefficiente detto  $C_x$ ) dipende dalla loro "forma".

Deriviamo ora la legge del moto in presenza di attrito viscoso. L'equazione del moto si scrive (per semplicità supponiamo il moto unidimensionale, in modo perlomeno da evitare di scrivere il segno di vettore)  $F = ma = -\beta v$ . Ricordandoci che, formalmente, l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m}v(t). \quad (3.16)$$

Si tratta quindi di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha soluzione "esponenziale" con parametri che dipendono dalle condizioni iniziali del problema.

Diamo qualche cenno sulla soluzione di tali equazioni, considerando l'equazione differenziale "generica"  $\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x)$ . La soluzione si può ottenere riscrivendo l'equazione come  $\frac{1}{y}dy(x) = Adx$ , cioè "portando"  $dx$  al secondo membro e  $y(x)$  al primo. Notate che questo è possibile per come è stata scritta l'equazione, che è a variabili separabili (che cioè, in pratica, possono essere "portate" da un membro all'altro). A questo punto è possibile integrare i due membri tra i valori iniziali e finali delle variabili  $y$  ed  $x$ , rispettivamente per il primo ed il secondo membro: come valori iniziali prenderemo  $x_0$  ed il valore  $y_0$  che la funzione  $y(x)$  assume in corrispondenza di  $x = x_0$  (cioè la condizione iniziale sulla  $y$ ), come valori finali metteremo i valori *generici*  $y$  ed  $x$ . In sostanza, quindi, avremo al secondo membro l'integrale definito  $\int_{x_0}^x Adx = A(x - x_0)$  e al primo membro dovremo calcolare l'integrale definito  $\int_{y_0}^y \frac{1}{y}dy$ . Ricordando l'espressione della "primitiva" di  $\frac{1}{y}$ , che vale  $\ln(y)$ , avremo che tale integrale definito dà  $\ln(y) - \ln(y_0) = \ln(y/y_0)$ , avendo usato nell'ultimo passaggio una nota proprietà della funzione logaritmo. Allora, uguagliando gli integrali definiti ottenuti per i due membri, si ha  $A(x - x_0) = \ln(y/y_0)$ , ovvero, "facendo l'esponenziale" dei due membri e riarrangiando,

$$y(x) = y_0 \exp(A(x - x_0)). \quad (3.17)$$

Nel caso interessante di un corpo che parte da fermo, per poi muoversi sotto l'effetto di una forza esterna in un fluido viscoso, si ha:  $v(t) = v_{lim}(1 - \exp(-\frac{\beta}{m}t))$ . La funzione  $v(t)$  parte da zero e cresce fino a raggiungere *asintoticamente* il *valore limite*  $v_{lim}$ , che calcoleremo nell'esercizio seguente seguendo un ragionamento molto immediato.

<sup>22</sup>In particolare, per un corpo sferico di raggio  $r$  non troppo grande, ad esempio una goccia d'acqua che cade nell'aria, si ha  $\beta = 6\pi r\eta$  (*legge di Stokes*), con  $\eta$  *coefficiente di viscosità dell'aria*.

### 3.9.10 Esercizio: velocità limite di un paracadutista

Anche l'aria è un fluido (debolmente) viscoso. Quanto vale la velocità limite che si raggiunge nella caduta di un corpo di massa  $m$  nell'aria supponendo di conoscere il valore del coefficiente di attrito viscoso,  $\beta$ ?

**Soluzione.** Sul corpo agisce la forza di gravità, che lo spinge verso il basso, e vale  $mg$ , e la forza di attrito viscoso, che vale  $-\beta v$  (è diretta in verso opposto, cioè verso l'alto). Tenendo conto delle due forze che agiscono sul corpo, ed usando un riferimento orientato verso il basso, l'equazione del moto si scrive:  $a = g - (\beta/m)v$ . Poiché accelerazione e velocità dipendono dal tempo, potrà esistere un istante  $t_{lim}$  tale che  $\beta v(t_{lim}) = mg$ . A questo istante si ha che l'accelerazione è nulla, cosa che implica velocità costante. Ma se la velocità diventa costante, l'accelerazione resta nulla, e quindi la velocità limite è  $v_{lim} = v(t_{lim})$ . Per determinarne il valore, basta porre nulla l'accelerazione, ottenendo  $v_{lim} = mg/\beta$ .

L'esistenza della velocità limite viene sfruttata dai paracadutisti che si lanciano nell'aria. L'ampia superficie del paracadute conduce a un grande valore per  $\beta$  e quindi porta a una velocità limite bassa, che permette ai paracadutisti di non rompersi le ossa quando atterrano. In modo analogo si comportano anche le gocce di pioggia, che ci cadono in testa con velocità pressoché indipendenti dall'altezza della nuvola da cui sono partite. Come vedremo poi, anche situazioni molto differenti, come il moto degli elettroni in un filo conduttore, seguono regole di questo genere.

### 3.9.11 Oscillatori realistici

Abbiamo già trattato il problema del moto armonico che si ha in presenza di forze elastiche (la massa attaccata ad una molla, il pendolo, etc.) ed abbiamo già avvisato di come un moto puramente periodico (*moto perpetuo*), che si ripete indefinitamente nel tempo, come quello suggerito dalla legge oraria del moto armonico, non si possa realizzare nella pratica. Infatti, a prescindere dal tipo di oscillatore considerato, esistono forze, che genericamente chiameremo di attrito, che tendono a "smorzare" il moto e fermare il sistema in uno stato di equilibrio.

Una buona e significativa descrizione della realtà si ottiene supponendo che le forze di attrito che agiscono sull'oscillatore siano di tipo viscoso. Ad esempio, se pensate ad un pendolo, l'attrito viscoso può essere quello che si oppone al moto della massa (e del filo); se pensate ad un sistema che opera sotto vuoto, cioè in assenza di aria, potrete sempre trovare delle forze ad esempio a livello dell'articolazione che permette il movimento (il perno attorno a cui ruota la cordicella del pendolo).

Supponiamo allora di avere una massa  $m$  che, per effetto di una certa forza elastica, oscilla con una pulsazione  $\omega$ . Come già osservato più volte, ad esempio in Par. 3.8, l'equazione del moto in assenza di attrito si scrive, chiamando  $x(t)$  la posizione della massa:  $a(t) = -\omega^2 x(t)$ .<sup>23</sup> Se supponiamo che sulla massa agisca una forza di attrito viscoso

<sup>23</sup>A scopo di generalizzazione, non ci stiamo qui a preoccupare dei dettagli della forza elastica che determinano il valore di  $\omega$ ; per esempio, se si trattasse di una molla avremmo  $\omega = (k/m)^{1/2}$ , se avessimo

dovremo aggiungere all'equazione del moto il termine  $-(\beta/m)v(t)$ , ovvero  $-\gamma v(t)$  dove, per semplificare la notazione, abbiamo introdotto il *coefficiente di smorzamento*  $\gamma = \beta/m$  (ha le dimensioni di  $1/[\text{tempo}]$ ). L'equazione del moto diventa allora:  $a(t) = -\omega^2 x(t) - \gamma v(t)$ ; se ci ricordiamo che, per definizione,  $a(t) = d^2x(t)/dt^2$  e  $v(t) = dx(t)/dt$  e facciamo qualche riarrangiamento, possiamo scrivere l'equazione del moto in questa forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 . \quad (3.18)$$

L'Eq. 3.18 è sempre un'equazione differenziale del secondo ordine, che però, essendo  $\gamma \neq 0$ , a differenza di quelle che abbiamo già esaminato contiene anche un termine del "primo ordine".

La soluzione può essere scritta in questa forma:

$$x(t) = (A \exp(-\gamma t/2)) \cos(\Omega t + \Phi) , \quad (3.19)$$

con  $A$  e  $\Phi$  costanti opportunamente dimensionate che dipendono, al solito, dalle condizioni iniziali e  $\Omega = \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}$ . Che questa soluzione sia valida può essere dimostrato come di consueto calcolando le derivate dell'espressione di Eq. 3.19 rispetto al tempo, inserendole in Eq. 3.18 e verificando che si ottiene identità fra i membri. Dato che l'operazione è piuttosto tediosa dal punto di vista matematico, non la eseguiamo esplicitamente.

Più interessante è verificare qualitativamente l'andamento della legge oraria del moto scritta in Eq. 3.19. Questa legge mantiene ancora un carattere oscillatorio con una pulsazione,  $\Omega$ , che è diversa da quella ( $\omega$ ) dell'oscillatore non smorzato. Notate che se si prende un coefficiente di smorzamento diventa molto grande rispetto ad  $\omega$ , il termine sotto radice quadrata che definisce  $\Omega$  può diventare negativo; per noi, questo significa che il carattere oscillatorio viene perso. Dunque un sistema dotato di grande attrito viscoso non riesce neppure ad oscillare ed in pratica raggiunge l'equilibrio senza neppure aver compiuto un ciclo di oscillazione.

Più interessante è studiare il comportamento dei sistemi che sono *debolmente smorzati* (in pratica quelli in cui  $\gamma < 4\omega$ , come potete facilmente verificare). In questi casi il moto è ancora armonico, ma l'ampiezza dell'oscillazione *decade esponenzialmente* nel tempo. Infatti nella funzione del tempo di Eq. 3.19 il termine esponenziale (decrescente, a causa del segno negativo nell'argomento) sta a moltiplicare la funzione coseno: dunque con il passare del tempo l'ampiezza di oscillazione si riduce fino a tendere asintoticamente a zero. La Fig. 3.9.11 mostra qualitativamente questo andamento simulato per una certa situazione.

Nel Par. 3.8.3 abbiamo accennato agli oscillatori forzati, quelli in cui il sistema è sottoposto, oltre che alla forza elastica, anche ad una forza esterna periodica. Ad esempio, consideriamo una forzante del tipo  $F_f(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$ , con  $F_0$  e  $\omega_f$  costanti. Nella realtà anche questi sistemi sono in genere soggetti ad attrito viscoso, per cui l'equazione del moto, debitamente riarrangiata, diventa ad esempio:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t) . \quad (3.20)$$

---

un pendolo  $\omega = (g/l)^{1/2}$ , e così via.

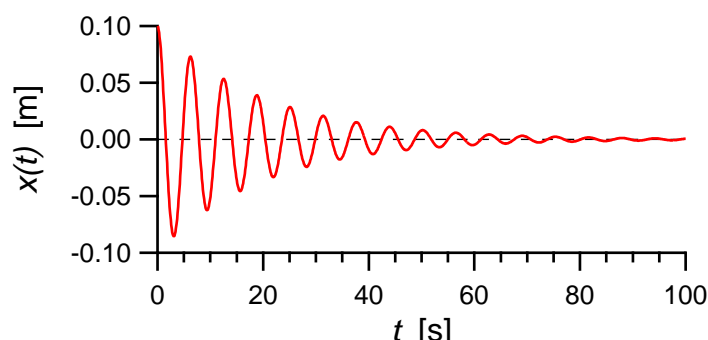


Figura 3.11: Grafico della legge oraria del moto  $x(t)$  in funzione del tempo  $t$  per un oscillatore smorzato; le caratteristiche del sistema considerato sono:  $\omega = 1$  rad/s,  $\gamma = 0.1$  s<sup>-1</sup> (da cui  $\Omega \approx 0.999$  rad/s). Le condizioni iniziali sono tali che all'istante  $t_0 = 0$  il sistema si trova fermo nella posizione iniziale  $x_0 = 0.1$  m (da cui  $A = 0.1$  m e  $\Phi = 0$ ).

La soluzione generale di questa equazione differenziale è complessa e vi vengono ben volentieri risparmiati i dettagli. Conviene però puntualizzare alcuni aspetti che sono molto interessanti dal punto di vista pratico.

In sistemi descritti dall'Eq. 3.20 per i quali, inoltre, il coefficiente  $\gamma$  non sia troppo alto rispetto alla *pulsazione propria*  $\omega$  del sistema (la pulsazione dell'oscillatore imperturbato, cioè senza forzante), si può facilmente immaginare che esista una fase transiente iniziale in cui l'ampiezza delle oscillazioni si riduce esponenzialmente nel tempo. Questo è infatti quanto abbiamo verificato risolvendo l'equazione del moto oscillatorio smorzato. In assenza di forzante le oscillazioni tendono asintoticamente a scomparire; però in presenza della forzante è chiaro che il sistema non tenderà a fermarsi, ma piuttosto arriverà ad una situazione in cui oscillerà *alla pulsazione della forzante*  $\omega_f$ . La durata di questa fase transiente dipenderà ovviamente dal coefficiente di smorzamento, e sarà tanto più breve quanto minore è il valore di  $\gamma$  per il sistema specifico considerato.

Concentriamoci ora proprio sulla fase temporale che segue il transiente. Si può dimostrare che il sistema prenderà ad oscillare con una legge del moto del tipo  $x(t) = \alpha \cos(\omega_f t + \Phi)$ , con  $\Phi$  costante dipendente dalle condizioni iniziali ed

$$\alpha = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad (3.21)$$

dove, ricordiamo,  $\omega$  indica la pulsazione propria del sistema senza forzante. Si può notare immediatamente che il valore di  $\alpha$ , che determina l'ampiezza dell'oscillazione, come potete facilmente verificare, dipende dal valore di  $\omega_f$ , in particolare dal “disaccordo” tra la pulsazione  $\omega_f$  della forzante e la pulsazione  $\omega$  che è propria del sistema imperturbato. Infatti esaminando l'Eq. 3.21 si vede subito che per il valore di  $\alpha$  raggiunge il suo massimo per  $\omega_f = \omega$ . In sostanza, quindi, ritroviamo il comportamento a *risonanza* che avevamo già anticipato in Par. 3.8.3. C'è però una differenza sostanziale, che possiamo verificare graficando l'andamento di  $\alpha$  in funzione di  $\omega_f$ , come mostrato ad esempio in



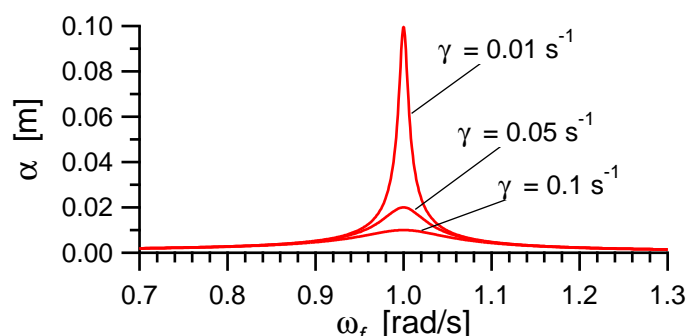


Figura 3.12: Andamento dell'ampiezza di oscillazione  $\alpha$  calcolata in accordo con l'Eq. 3.21 in funzione della pulsazione della forzante,  $\omega_f$ . Per il calcolo si è fatto dei seguenti parametri:  $\omega = 1$  rad/s,  $F_0 = 10^{-3}$  N,  $m = 1$  kg; le curve riportate nel grafico si riferiscono a diversi valori di  $\gamma$ , secondo quanto indicato nel grafico stesso.

Fig. 3.9.11: mentre in assenza di smorzamento l'ampiezza di oscillazione tende a divergere per  $\omega_f \rightarrow \omega$ , qui l'ampiezza cresce ma resta finita. Infatti la funzione espressa in Eq. 3.21, che si chiama *funzione Lorentziana*, ha una tipica forma a campana il cui valore di picco dipende (in modo non lineare) dall'inverso di  $\gamma$ : in condizioni di piccolo smorzamento, cioè per piccoli valori di  $\gamma$ , la funzione risulta molto più “piccata” attorno alla risonanza. Di conseguenza la “larghezza a metà altezza” della funzione dipende dal valore di  $\gamma$ : la campana è più “larga” per valori alti di  $\gamma$ .

### 3.10 Forza gravitazionale (e cenni al teorema di Gauss)

Abbiamo già anticipato che l'accelerazione di gravità  $\vec{g}$  e la forza peso che ne deriva sono la manifestazione di una forza, detta **gravitazionale**, che è anche responsabile dell'orbita di pianeti, satelliti e corpi celesti, e quindi ha carattere *universale*. Questa forza si esercita tra qualsiasi coppia di masse  $m_1$  ed  $m_2$ , non richiede contatto tra le masse stesse (si esercita *a distanza*), ed è *sempre attrattiva*, cioè è diretta lungo la congiungente delle due masse ed ha verso attrattivo. In particolare, per il principio di azione e reazione si ha che  $m_1$  esercita su  $m_2$  una forza uguale e di verso opposto rispetto a quella che  $m_2$  esercita su  $m_1$ .

Detto  $\vec{r}_{1,2}$  il vettore distanza tra le due masse, ed  $\hat{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}/|\vec{r}_{1,2}|$  il versore corrispondente, la forza gravitazionale si scrive:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{|r_{1,2}|^2} \hat{r}_{1,2}, \quad (3.22)$$

dove il segno negativo indica che la forza ha carattere attrattivo (è diretta in modo da tendere ad avvicinare le due masse). Dato che questa forza agisce lungo la *congiungente* i due corpi (la direzione del versore  $\hat{r}_{1,2}$ ), essa appartiene alla classe delle **forze centrali**; il suo modulo dipende in modo inversamente proporzionale dal quadrato della distanza tra

i due corpi, e tende a zero per  $|\vec{r}_{1,2}| \rightarrow \infty$ . La costante (dimensionata!) di gravitazione universale  $G$  vale all'incirca  $6.67 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> (unità di misura un po' complicata, che fa comunque "tornare" le dimensioni).

Questa forza è alla base della presenza dell'accelerazione di gravità, oltre che, come vedremo, dell'orbita dei pianeti. Prendiamo come una delle due masse, ad esempio  $m_2$ , quella della Terra ( $m_T \approx 6.0 \times 10^{24}$  kg) e consideriamo un qualsiasi corpo sulla faccia della Terra stessa. Esso sarà sottoposto ad una forza diretta verso il centro della Terra (e quindi verticale verso il basso, in un riferimento che si trova sulla crosta terrestre) che, in linea di principio, dipende inversamente dal quadrato della distanza  $r_{1,2}$ . Tuttavia la distanza che dobbiamo considerare è quella dalla superficie al centro della Terra, il cui raggio  $r_T \approx 6.4 \times 10^6$  m (grosso modo costante a tutte le latitudini, ma sapete che la terra è un po' "schiacciata" ai poli) è molto grande. Allora la forza risentita da una massa  $m$  generica vale, in modulo,  $F_G \sim mGm_T/r_T^2$ , che corrisponde ad un'accelerazione di modulo  $a = F_G/m \sim Gm_T/r_T^2 = g \approx 9.8$  m/s<sup>2</sup>. Ovviamente, se invece di trovarci al livello del mare fossimo in cima ad una montagna di altezza  $h$ , cioè ad una distanza dal centro della terra  $r = r_T + h$ , l'accelerazione di gravità avrebbe un valore leggermente diverso, ma lo scostamento sarebbe dello stesso ordine (o più piccolo) del rapporto  $h/r_T$ .

Il procedimento che abbiamo applicato ha un carattere piuttosto intuitivo, ma contiene un importante concetto. Infatti, nella Terra la massa è ovviamente distribuita in un volume, che in prima approssimazione possiamo ritenere *sferico*; nel nostro procedimento, in particolare quando abbiamo posto pari ad  $r_T$  la distanza tra le due masse, abbiamo in pratica supposto che tutta la massa della Terra fosse concentrata al suo centro, cioè abbiamo ridotto la Terra ad una massa puntiforme collocata nel suo centro. Questa affermazione, che è supportata dal fatto di avere a che fare con un sistema a **simmetria sferica** come è la Terra in prima approssimazione<sup>24</sup>, è la conseguenza dell'applicazione di un importante teorema, il **teorema di Gauss**, che si applica a *tutte le forze centrali*. Useremo alla grande questo teorema nell'elettrostatica, dove avremo a che fare con forze di tipo elettrico.

Per quanto riguarda l'orbita dei pianeti e dei satelliti, è facile rendersi conto del ruolo che ha la forza gravitazionale. Prendiamo infatti un sistema di due masse e consideriamone una *fissa nello spazio*, cioè usiamo un sistema di riferimento (di coordinate *sferiche*) centrato su questa massa. L'altra massa risentirà di una forza inversamente dipendente dal quadrato della distanza, che può fornirle l'accelerazione centripeta necessaria per farle percorrere un'orbita chiusa, come vedremo nell'Es. 3.10.2. Considereremo in genere orbite circolari, anche se le orbite reali di satelliti, pianeti, etc. hanno una geometria che in genere è più complessa di una semplice circonferenza, a causa di ulteriori effetti che qui non affrontiamo. Ugualmente per il momento non affrontiamo il problema più generale di studiare la dinamica di un sistema costituito da due corpi che interagiscono a distanza tra loro, ad esempio attraverso la forza gravitazionale come in questo paragrafo. Infatti

<sup>24</sup>In questo contesto la simmetria sferica significa che la Terra è una sfera e che le eventuali dipendenze spaziali delle grandezze coinvolte, in particolare la densità di massa  $\rho_m$ , dipendono *esclusivamente* dalla distanza dal centro della sfera, cioè dal raggio. Torneremo spesso, in seguito, a fare considerazioni di questo tipo.

l'assunzione che una delle due masse sia fissa nello spazio può non essere ragionevole (e di fatto non lo è, a rigore, neanche negli esercizi che seguono). Potremo permetterci una trattazione più raffinata quando avremo stabilito proprietà e comportamento dinamico del *centro di massa*. Per il momento accontentiamoci di sapere che considerare una delle due masse fissa nello spazio è abbastanza ben verificata se la massa che supponiamo fissa è molto maggiore dell'altra che "le ruota attorno".

### 3.10.1 Esercizio: il peso su un altro pianeta

Sulla terra il vostro peso è  $P_T$ . Vi trasferite su un pianeta che ha massa doppia e raggio metà rispetto a quelli della Terra (provate a calcolare la densità di massa media di questo pianeta rispetto a quella della Terra: sarà fatto di Kriptonite?). Quanto vale il vostro peso  $P$  su questo pianeta?

**Soluzione.** La forza gravitazionale, che è responsabile dell'accelerazione di gravità e quindi della forza peso, è direttamente proporzionale alla massa del pianeta considerato ed inversamente proporzionale rispetto al quadrato della distanza, cioè del raggio del pianeta. Quindi il peso sul pianeta raddoppierà per effetto della massa doppia, e quadruplicherà ulteriormente per effetto del raggio metà, per cui  $P = 8P_T$  (dobbiamo dimagrire!).

### 3.10.2 Esercizio: il satellite geostazionario

Un satellite di massa  $m = 5.0 \times 10^3$  kg compie un'orbita circolare attorno alla Terra ( $r_T = 6.4 \times 10^6$  m,  $m_T = 6.0 \times 10^{24}$  kg). Se volete che tale orbita sia "geostazionaria", cioè abbia periodo pari a quello di rotazione della Terra ( $T = 24$  ore), quanto deve valere il raggio  $r$  dell'orbita del satellite?

**Soluzione.** I satelliti geostazionari hanno notevole importanza nelle telecomunicazioni trovandosi sempre sulla verticale dello stesso punto della Terra, e quindi essendo sempre accessibili dalle stazioni radio terrestri. Affinché il satellite possa percorrere l'orbita richiesta, occorre che esso risenta di un'accelerazione centripeta che vale, in modulo:  $a_c = \omega^2 r = (2\pi/T)^2 r$ . Questa accelerazione deve essere fornita al satellite dalla forza gravitazionale, per cui deve essere, in modulo:  $F_G = mGm_T/r^2 = ma_c = m(2\pi/T)^2 r$ . Si ottiene quindi (attenzione ad usare unità di misura coerenti!):  $r = (Gm_T T^2 / (2\pi)^2)^{1/3} \approx 4.2 \times 10^7$  m. Quindi un satellite geostazionario, a prescindere dalla sua massa, deve percorrere un'orbita di raggio  $r \approx 42 \times 10^3$  km, ovvero trovarsi ad una distanza  $(r - r_T) \approx 36 \times 10^3$  km dalla superficie terrestre.

### 3.10.3 Esercizio: viaggio al centro della Terra

Supponete di scavare un tunnel che attraversa l'intera Terra lungo un suo diametro ed immaginate che questo tunnel abbia dimensioni trasverse così piccole da non "perturbare" la simmetria sferica della Terra. Detta  $R$  la distanza di un punto all'interno del tunnel rispetto al centro della Terra, come si scrive la forza risentita da una "massa di prova"  $m$  in funzione di  $R$ ?

**Soluzione.** Questo esercizio costituisce un'applicazione "canonica" del teorema di Gauss. Dato che questo teorema non l'abbiamo ancora enunciato in termini matematici, dobbiamo provare a dare una soluzione aiutandoci con l'intuito. Abbiamo stabilito che il concetto fondamentale del teorema è che, *in caso di simmetria sferica* (come nel problema proposto), la forza assume il valore che avrebbe se tutta la massa  $M$  vista dalla massa di prova  $m$  fosse concentrata nel centro della Terra. D'altra parte è intuitivo concludere che la massa  $M$  vista dalla massa di prova sia quella contenuta in una sfera di raggio  $R < r_T$ . Quindi la forza vale, in modulo,  $F_G = mGM/R^2$ . Osservate che, in buona sostanza, stiamo affermando che tutti gli elementini di massa della Terra che si trovano a distanza maggiore di  $R$  (cioè "al di là" della massa di prova) non contribuiscono ad originare attrazione; in effetti si potrebbe dimostrare (con una procedura molto complessa dal punto di vista matematico) che i contributi alla forza dovuti ai vari elementini di massa della Terra che sono al di fuori della sfera di raggio  $R$  danno una somma vettoriale nulla.

Supponiamo ora che la Terra abbia densità di massa costante,  $\rho_m = m_T/V_T = 3m_T/(4\pi r_T^3)$ . Con questa approssimazione, che non è affatto valida, dato che il nucleo della Terra ha densità nettamente maggiore rispetto alla crosta, possiamo esprimere matematicamente la massa  $M$  della sfera di raggio  $R$ :  $M = \rho_m V_R = \rho_m 4\pi R^3/3 = m_T R^3/r_T^3$ . Allora il *modulo* della forza si scrive:  $F_G = mGm_T(R^3/r_T^3)/R^2 = mG(m_T/r_T^3)R$ , cioè il modulo della forza va linearmente con la distanza dal centro della Terra. Ragioniamo sul segno di questa forza: essa è attrattiva, e pertanto, se la "proiettiamo" su un asse parallelo al tunnel (cioè diretto lungo un diametro della Terra) e centrato nel centro della Terra stessa, potremo scrivere:  $F_G = -mKR$ , con  $K = G(m_T/r_T^3)$  costante (dimensionata!) positiva. Questa forza ha la forma di una forza *elastica*: in conseguenza di questo, una massa  $m$  "lasciata andare" lungo questo ipotetico tunnel si muoverebbe di moto oscillatorio rispetto al centro della Terra, con una pulsazione  $\omega = \sqrt{K}$ .

## 3.11 Forza elettrica

Tratteremo più diffusamente dei fenomeni di natura elettrica in seguito, dove, tra l'altro, useremo spesso il termine *elettrostatico* per chiarire che i fenomeni considerati si osservano in condizioni stazionarie. Ora ci occupiamo solamente delle forze che si esercitano tra **cariche elettriche**. Partiamo dalla considerazione, nota a tutti, che in natura esistono degli oggetti, appunto le cariche elettriche, che risentono di fenomeni di natura elettrica, in particolare della forza di cui trattiamo in questo paragrafo. Probabilmente vi è già noto che la carica elettrica è *discreta*, cioè esiste una quantità definita di carica (quella associata ad un **elettrone**) che, per noi, non è ulteriormente frazionabile. La carica elettrica ha bisogno di una sua unità di misura fondamentale, che nel sistema internazionale (mks) si chiama Coulomb (abbreviazione C). La carica elementare portata da un elettrone (spesso indicata con  $e$ ) vale  $e = -1.6 \times 10^{-19}$  C. Numericamente, la carica elementare ha un valore molto piccolo, ed in effetti la maggior parte dei fenomeni elettrici che conosciamo per esperienza comune coinvolgono numerosissime cariche (vedremo che, ad esempio, nel

filo che alimenta una lampadina elettrica possono passare, in condizioni tutt'altro che straordinarie, anche più di  $10^{20}$  elettroni al secondo).

Nello scrivere la carica dell'elettrone abbiamo introdotto un segno negativo. Questo fatto riflette un aspetto peculiare della carica elettrica, che può essere negativa o positiva (un protone porta la carica elementare di segno positivo, pressochè equivalente in valore assoluto a quella dell'elettrone). Ciò non si verifica, ad esempio, quando si considera la massa, che è sempre e solo positiva.

Dette  $q_1$  e  $q_2$  due cariche che si trovano a distanza relativa  $r_{1,2}$ , e definendo come prima il versore  $\hat{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}/|\vec{r}_{1,2}|$ , fra di loro si esercita una forza  $\vec{F}_E$ , diretta lungo la congiungente le due cariche (quindi si tratta ancora di una *forza centrale*), che vale:

$$\vec{F}_E = \kappa \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^2} \hat{r}_{1,2}, \quad (3.23)$$

dove la costante dimensionata  $\kappa$  vale circa  $9.0 \times 10^9$  N m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup> (ancora un'unità di misura abbastanza complicata)<sup>25</sup>.

Formalmente, la forza elettrica *tra due cariche puntiformi* ha un'espressione simile a quella della forza gravitazionale *tra due masse puntiformi*. A parte il valore numerico della costante, che è ben diverso nei due casi, l'altra grande differenza è nel fatto che, dato che le cariche hanno un segno, la forza elettrica può essere positiva (per una coppia di cariche con lo stesso segno) o negativa (cariche di segno opposto), cioè *repulsiva* o *attrattiva* nei due casi. Questo fatto riflette la circostanza (nota anche nel linguaggio comune) che *cariche dello stesso segno si respingono, e cariche di segno opposto si attraggono*. Fatta salva questa (importantissima) differenza, forza elettrica e forza gravitazionale hanno molti punti in comune: infatti si tratta in tutti e due i casi di forze che agiscono a distanza ed hanno un carattere centrale. Ad esempio, il teorema di Gauss che abbiamo citato prima si applica benissimo anche nel caso elettrico. Pertanto l'espressione della forza elettrica che abbiamo dato per la coppia di cariche puntiformi si applica anche ad una coppia di *distribuzioni di carica* a simmetria sferica (dove ovviamente si supporrà di concentrare tutta la carica al centro delle sfere, così come abbiamo fatto per il pianeta Terra), come vedremo ampiamente nel seguito.

### 3.11.1 Campo elettrico

L'espressione della forza elettrica<sup>26</sup> mostra che essa è direttamente proporzionale al valore delle cariche (puntiformi, o sferiche) coinvolte. Questo significa che, ad esempio, se “sondiamo” la forza elettrica generata da una carica  $Q$  usando una carica  $q$ , misureremo un

<sup>25</sup>In elettrostatica, la costante  $\kappa$  nel sistema internazionale è spesso data in funzione di un'altra costante,  $\epsilon_0$ , che rappresenta la **costante dielettrica del vuoto** e vale circa  $8.8 \times 10^{-12}$  C<sup>2</sup>/(N m<sup>2</sup>) =  $8.8 \times 10^{-12}$  F/m, dove abbiamo indicato con “F” un'unità di misura, il Farad, che ci tornerà familiare in seguito. Si ha, infatti:  $\kappa = 1/(4\pi\epsilon_0)$ .

<sup>26</sup>Per la forza gravitazionale si possono applicare gli stessi concetti di “campo”, ma l'argomento che stiamo trattando ha, tradizionalmente, una valenza speciale per il caso elettrico e su questo focalizzeremo la nostra attenzione.

valore che è proporzionale (segno compreso) a  $q$ . Convieni allora introdurre un concetto nuovo, molto utile nel caso di forze che si originano a distanza, il concetto di **campo**. Definiamo operativamente il campo elettrico  $\vec{E}$ , una grandezza *vettoriale* che ha unità di misura N/C, <sup>27</sup> come il rapporto tra la forza elettrica  $\vec{F}_E$  e la carica  $q$  impiegata per “sondare” questa forza<sup>28</sup>:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} . \quad (3.24)$$

Notate che quella che abbiamo scritto è una definizione del tutto generale di campo elettrico, e che essa ha un carattere *operativo*, cioè si basa sulla misura effettiva della forza elettrica e sulla conoscenza del valore della carica di prova  $q$ . La rappresentazione del vettore  $\vec{E}$  nello spazio dà luogo al grafico delle **linee di campo**, uno strumento utile per verificare visivamente l’andamento del campo elettrico che useremo ampiamente nei problemi di elettrostatica.

Nel seguito vedremo come si possono creare, di fatto, campi elettrici dotati di particolari proprietà: ad esempio, è tutt’altro che impossibile generare campi elettrici *uniformi* in ampie regioni dello spazio (basta costruire un “condensatore elettrico ad armature piane e parallele”). Allora l’Eq. 3.24 ci consentirà di esprimere la forza che questo campo genera su una carica puntiforme (qualsiasi)  $q$ .

Nel caso specifico (e *solo in questo caso!*) di campo elettrico generato da una carica puntiforme  $Q$  (o da una distribuzione sferica di carica elettrica), allora l’espressione del campo elettrico  $\vec{E}_{punt}$  si ottiene dividendo l’Eq. 3.23 per la carica di prova  $q$ , cioè:

$$\vec{E}_{punt}(\vec{R}) = \kappa \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{R} , \quad (3.25)$$

dove  $\vec{R}$  è il vettore che congiunge la carica  $Q$  con la posizione (generica) dello spazio in cui si vuole determinare il campo elettrico. Nel caso di problemi in cui compaiono più cariche puntiformi (in posizioni diverse dello spazio), varrà il *principio di sovrapposizione* (somma vettoriale), lo stesso che vale per le forze, cioè, detto  $\vec{E}_i$  il campo prodotto da una singola carica  $i$ -esima, avremo  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ . <sup>29</sup>

### 3.11.2 Esercizio: l’atomo planetario

Come saprete, gli atomi “sono fatti di” protoni e neutroni (nel nucleo) ed elettroni (particelle circa 1800 volte più leggere delle altre). Elettroni e protoni hanno cariche elementari, rispettivamente negativa e positiva.

Lo studio dei sistemi atomici, anche dei più semplici come l’idrogeno, costituito solo da un elettrone ed un protone, è un argomento complesso che richiede gli strumenti

<sup>27</sup>Vedremo già nel prossimo capitolo che esiste un’unità di misura alternativa, V/m, di uso più semplice ed immediato.

<sup>28</sup>Spesso si dà il nome di **carica di prova** a questa carica elettrica.

<sup>29</sup>Nel capitolo dedicato al campo elettrico vedremo come, nel caso si abbiano tantissime cariche puntiformi (caso assolutamente realistico!), sia possibile impiegare dei metodi specifici per determinare il campo elettrico complessivo.

della meccanica quantistica. Su questa base si verifica che è privo di senso considerare l'elettrone come una particella che descrive una traiettoria (invece del concetto classico di orbita si deve usare quello probabilistico di orbitale). Tuttavia, è almeno istruttivo analizzare secondo la meccanica classica un modello “planetario” di atomo di idrogeno, in cui il protone (pesante) sta fermo nello spazio e l'elettrone gli ruota attorno compiendo un'orbita circolare<sup>30</sup>.

Chiarito qual è il modello, veniamo all'esercizio. Si sa che il raggio dell'orbita è  $a_0 = 0.05 \text{ nm} = 0.05 \times 10^{-9} \text{ m}$ ; <sup>31</sup> quanto valgono la velocità angolare  $\omega$  e la velocità lineare  $v$  dell'elettrone, la cui massa è  $m_e = 9.0 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ? Inoltre, sapendo che la massa del protone è  $m_p = 1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , quanto vale il rapporto tra forza gravitazionale ed elettrica per il sistema considerato?

**Soluzione.** L'accelerazione centripeta che consente il moto circolare è fornita dalla forza attrattiva di natura elettrica (vedremo poi che la forza di attrazione gravitazionale tra elettrone e protone è trascurabile). Quindi, procedendo come di consueto in questo genere di esercizi, deve essere  $m_e \omega^2 a_0 = \kappa e^2 / a_0^2$ , dove si è indicata con  $e$  la carica elettrica elementare dell'elettrone e del protone (non contano i segni dato che stiamo esaminando il modulo della forza, di cui sappiamo già che è attrattiva). Allora l'incognita del problema è  $\omega = e\sqrt{\kappa/(ma_0^3)}$ , mentre la velocità lineare si trova semplicemente moltiplicando  $\omega$  per il raggio  $a_0$ . I risultati numerici sono:  $\omega \approx 4.5 \times 10^{16} \text{ rad/s}$ , e  $v \approx 2.3 \times 10^6 \text{ m/s}$ . Quindi l'elettrone ruota con una velocità angolare molto elevata e con una velocità lineare anche molto elevata.

Per quanto riguarda la forza di attrazione gravitazionale, essa risulta molto meno intensa di quella elettrica, essendo il rapporto  $F_G/F_E = \frac{Gm_em_p}{\kappa e^2} \sim 10^{-40}$ . Quindi il sistema atomico che stiamo considerando è “tenuto insieme” proprio dalle forze di natura elettrica, che hanno un ruolo importantissimo in tutti i fenomeni fisico-chimici su scala atomica e molecolare.

### 3.11.3 Esercizio: un sistema di tre cariche elettriche

Avete il sistema rappresentato in Fig. 3.11.3: due cariche identiche puntiformi  $Q_1 = Q_2 = Q$  si trovano fisse sull'asse  $X$  di un sistema di riferimento, nelle posizioni rispettivamente  $x_1 = -L$  ed  $x_2 = L$ . Come si esprime, in funzione della posizione  $x$ , il campo elettrico  $\vec{E}(x)$  generato dalle due cariche? Supponete ora che una terza carica puntiforme, di valore  $q$  e massa  $m$ , possa muoversi senza attrito lungo l'asse  $X$ , nella regione  $-L < x < L$ . Che tipo di moto può compiere tale carica?

<sup>30</sup>Per completezza, tenete conto che questo semplice sistema è alla base del **modello atomico di Bohr**, in cui l'aspetto quantistico si riduce ad imporre una *regola di quantizzazione* sulla grandezza  $m_e \omega R^2$ , essendo  $m_e$  la massa dell'elettrone,  $\omega$  ed  $R$  la velocità angolare ed il raggio dell'orbita circolare, che deve essere pari ad un multiplo intero di una costante fondamentale, la costante di Planck ( $\hbar \approx 10^{-34} \text{ J}$ ).

<sup>31</sup>Il nanometro, simbolo nm, equivale a  $10^{-9} \text{ m}$  ed è una unità di misura conveniente per le scale dimensionali del mondo atomico e molecolare. Talvolta si impiega anche l'Ångström, simbolo Å, che equivale a 0.1 nm.

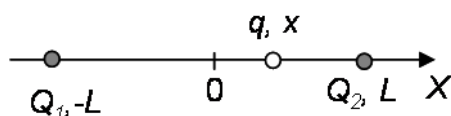


Figura 3.13: Rappresentazione dell'esercizio con le tre cariche elettriche descritto nel testo.

**Soluzione.** Abbiamo a che fare con cariche puntiformi, e quindi possiamo senz'altro impiegare l'espressione riportata in Eq. 3.25, usando il principio di sovrapposizione per tenere conto della presenza di due cariche. Inoltre possiamo preliminarmente notare che la geometria del sistema suggerisce che il campo elettrico abbia componenti solo lungo  $X$ , dato che qualsiasi punto che appartiene all'asse  $X$  è congiunto alla posizione delle cariche attraverso un vettore che ha componenti solo lungo  $X$  (e quindi i versori  $\hat{R}$  sono versori dell'asse  $X$ , che qui indichiamo con  $\hat{x}$ ). Il campo originato dalla carica  $Q_1$  in un punto di coordinata  $x$  generica è quindi  $\vec{E}_1(x) = \kappa(Q_1/(x+L)^2)\hat{x}$ , e quello generato dalla carica  $Q_2$  è  $\vec{E}_2 = -\kappa(Q_2/(x-L)^2)\hat{x}$ , dove il segno negativo riflette l'orientazione del campo generato da  $Q_2$  rispetto al verso dell'asse  $X$ . Il campo complessivo si scrive  $\vec{E}(x) = \kappa Q \left( \frac{1}{(x+L)^2} - \frac{1}{(x-L)^2} \right) \hat{x} = \kappa Q \left( -\frac{4xL}{(x^2-L^2)^2} \right) \hat{x}$ , dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato qualche rimaneggiamento algebrico. Notate che il valore del campo diverge per  $x \rightarrow \pm L$ , cioè quando si cerca di valutarlo nelle posizioni occupate dalle cariche, va a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ , mentre si annulla per  $x = 0$ , come atteso vista la simmetria del problema (in  $x = 0$  il campo prodotto da  $Q_1$  è annullato da quello prodotto da  $Q_2$ , dato che i due campi hanno lo stesso modulo e verso opposto).

La carica  $q$  sarà sottoposta ad una forza  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , e quindi la sua equazione del moto (che avverrà lungo l'asse  $X$  con accelerazione  $a$ ) sarà del tipo  $a = -(4\kappa qQ/m) \frac{4xL}{(x^2-L^2)^2}$ . Il moto risultante avrà in generale una legge oraria complessa, che non siamo in grado di determinare con facilità. Se però ci restringiamo ad una regione "prossima" all'origine, cioè tale che  $|x| \ll |L|$ , possiamo trascurare brutalmente il termine  $x^2$  rispetto al termine  $L^2$  nel denominatore della frazione<sup>32</sup>, e scrivere, in queste condizioni:  $a \simeq -Cx$ , con  $C$  termine costante di segno positivo che comprende tutte le costanti dell'espressione originale. L'equazione del moto è allora simile a quella di una forza elastica, e possiamo concludere che la carica  $q$  si muove, attorno all'origine, di moto armonico. Quindi la posizione  $x = 0$  è di equilibrio stabile (rispetto a piccole perturbazioni).

### 3.11.4 Esercizio: un sistema di due cariche elettriche

Avete il sistema rappresentato in Fig. 3.11.4: due cariche identiche puntiformi  $Q_1 = Q_2 = Q$  si trovano fisse sull'asse  $Y$  di un piano  $XY$ , nelle posizioni rispettivamente  $y_1 = L$  ed  $y_2 = -L$ . Come si esprime il campo elettrico  $\vec{E}(x)$  generato dalle due cariche in un punto qualsiasi dell'asse  $X$  (con coordinata generica  $x$ )?

<sup>32</sup>Anche in questo caso andrebbe fatta un'espansione di Taylor al primo ordine, che darebbe un risultato rigoroso che, comunque, è dello stesso tipo di quello proposto qui.



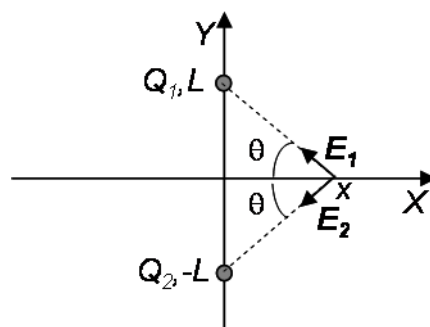


Figura 3.14: Rappresentazione dell'esercizio con le due cariche elettriche descritto nel testo.

**Soluzione.** Possiamo procedere in modo analogo a quanto fatto per la soluzione dell'esercizio precedente. Stavolta, però, la geometria del problema è diversa, e quindi dobbiamo porre un po' più di attenzione nel definire preliminarmente quale sia la direzione del campo elettrico generato. Mettiamoci in un punto  $x$  qualsiasi dell'asse  $X$ , ad esempio quello riportato in figura, e disegniamo i vettori  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$ . Questi vettori avranno lo stesso modulo, dato che la distanza del punto considerato dalle due cariche sarà la stessa (e varrà, in modulo,  $r = \sqrt{x^2 + L^2}$ , dove abbiamo usato il teorema di Pitagora), ma avranno direzioni differenti, come segnalato in figura. Tuttavia è facile rendersi conto che il vettore  $\vec{E}$  che risulta dalla sovrapposizione di  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  avrà solo componenti lungo l'asse  $X$ , dato che quelle lungo  $Y$  si annullano a vicenda. Avendo stabilito la direzione del campo, possiamo dedicarci ad esprimerne il valore. Questo sarà dato dalla somma (algebraica) delle componenti lungo  $X$  dei due campi  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$ , cioè avremo (fate attenzione alla simbologia usata!):  $\vec{E} = (E_{1,x} + E_{2,x})\hat{x}$ , avendo indicato con  $\hat{x}$  il versore dell'asse  $X$ . Osservando la figura, si vede come la componente orizzontale del campo generato dalla carica  $Q_1$  sia  $E_{1,x} = -E_1 \cos \theta$ , dove  $E_1 = \kappa Q_1 / r^2$  è il modulo del campo, e  $\theta$  è l'angolo indicato in figura (fate attenzione al segno negativo, la cui origine si capisce bene dalla figura!). D'altra parte la trigonometria ci suggerisce che  $\cos \theta = x/r$ , per cui:  $E_{1,x} = -\kappa Q_1 / r^2 (x/r) = -\kappa Q_1 x / r^3 = -\kappa Q_1 x / (x^2 + L^2)^{3/2}$ . Per evidenti ragioni di simmetria, la carica  $Q_2$  contribuisce al campo con un termine analogo, per cui, ricordando che  $Q_1 = Q_2 = Q$ , si ha:  $\vec{E}(x) = -2\kappa Q \frac{x}{(x^2 + L^2)^{3/2}} \hat{x}$ . Anche in questo problema il valore del campo va a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ , mentre si annulla per  $x = 0$ , come atteso vista la simmetria del problema (in  $x = 0$  il campo prodotto da  $Q_1$  è annullato da quello prodotto da  $Q_2$ , dato che i due campi hanno lo stesso modulo e verso opposto).

### 3.11.5 Esercizio: elettrone in campo elettrico uniforme

Avete un elettrone (massa  $m_e$ , carica  $e$ ) che, viaggiando lungo l'asse  $X$  con velocità  $v_0$ , entra in una regione in cui è presente un campo elettrico *uniforme*, di modulo  $E_0$ , diretto lungo l'asse  $X$  ed orientato in modo da rallentare l'elettrone (pensando al segno della carica dell'elettrone, e supponendo che la sua velocità iniziale sia diretta nel verso

positivo dell'asse  $X$ , questa affermazione significa che il campo elettrico è diretto nel verso positivo dell'asse  $X$ ). Quanto vale la distanza  $\Delta s$  percorsa dall'elettrone prima di arrestarsi? (Trascurate ogni forma di attrito e ogni effetto della forza peso)

**Soluzione.** All'interno della regione in cui è presente il campo elettrico uniforme l'elettrone è soggetto ad una forza uniforme (lungo l'asse  $X$ ) che vale  $F_E = eE_0$ ; essendo questa l'unica forza in gioco, l'elettrone sarà sottoposto ad una accelerazione (lungo l'asse  $X$ ) che vale  $a = (e/m)E_0$ ; notate che, essendo il segno di  $e$  negativo (e quello di  $E_0$  positivo, come da testo), tale accelerazione tende a rallentare l'elettrone, cioè rappresenta una "decelerazione". La legge oraria del moto è allora, semplicemente, quella del moto uniformemente accelerato:  $\Delta s(t) = v_0 t + (a/2)t^2$ . L'istante in cui l'elettrone si arresta vale  $t_{stop} = v_0/|a|$  (il segno di valore assoluto sta ad indicare che la soluzione fisica del problema richiede che il tempo sia positivo), e lo spazio percorso vale  $\Delta s = (v_0/(2|a|))^{1/2} = (v_0 m/(2|e|E_0))^{1/2}$ . Per estendere il problema, potete chiedervi quale traiettoria si avrebbe nel caso in cui il moto avvenisse nel piano (verticale)  $XY$ , con la presenza dell'accelerazione di gravità lungo  $Y$ .

### 3.11.6 Esercizio: carica, campo elettrico e forza peso

Una particella di massa  $m$  e carica  $q > 0$  si trova in una regione di campo elettrico uniforme  $\vec{E}$  diretto verticalmente verso l'alto. Nella stessa regione la particella è anche sottoposta all'accelerazione di gravità, diretta verticalmente verso il basso. Quanto vale il modulo  $E$  del campo elettrico che mantiene la particella in equilibrio (rispetto al moto in direzione verticale)?

**Soluzione.** Le forze che agiscono sulla particella sono la forza peso,  $m\vec{g}$ , e la forza elettrica,  $q\vec{E}$ . Tenendo conto dei versi delle forze ed usando i moduli, si hanno condizioni di equilibrio quando  $mg = qE$ , cioè per  $E = (m/q)g$ . Questo esercizio è simile a quanto attuato da Millikan in un famoso esperimento per la determinazione del rapporto  $e/m_e$ .

### 3.11.7 Esercizio: molla e campo elettrico

Riprendiamo il problema dell'Es. 3.8.2, supponendo, stavolta, che la massa attaccata alla molla porti un certa carica elettrica  $q$ , e che nello spazio dell'esperimento sia presente un campo elettrico *uniforme* di modulo  $E_0$  diretto nel verso positivo dell'asse  $X$ . Limitiamoci a rispondere alle seguenti domande: come si scrive l'equazione del moto e quanto vale la posizione di equilibrio,  $x'_{EQ}$ ?

**Soluzione.** Riprendiamo l'equazione del moto scritta nella soluzione del problema precedente: avevamo trovato  $a = -(k/m)(x(t) - L_0)$ . A questa equazione dobbiamo aggiungere un termine, che tiene conto della presenza della forza elettrica  $F_E = qE_0$ :  $a' = a + F_E/m = -(k/m)(x(t) - L_0) + (q/m)E_0$ . La nuova posizione di equilibrio, che è tale da annullare la "nuova" accelerazione  $a'$ , è allora:  $x'_{EQ} = L_0 + (q/k)E_0$ . Notate che il moto che si ottiene sarà sempre di tipo armonico, con la stessa pulsazione  $\omega = (k/m)^{1/2}$  trovata in precedenza, ma stavolta le oscillazioni avverranno attorno alla nuova posizione di equilibrio appena determinata.