Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2006/07

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3, 56127 Pisa

versione 5c - 10.01.07

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce da lezioni di fisica generale per diversi corsi di laurea, non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario (ed anche in molti testi per la scuola superiore). Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, con pochi discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Revisioni:

1. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;

2. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;

3. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;

4. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 4

Lavoro, energia, potenziale

La forza, i concetti ed i metodi ad essa relativi che abbiamo esaminato nel capitolo precedente costituiscono un'importante base per affrontare lo studio di numerosi fenomeni. In alcuni casi, però, è molto utile servirsi di approcci che si basano su grandezze, quali lavoro ed energia, che permettono di semplificare la trattazione e di arricchire le possibilità di soluzione di problemi fisici. Questo capitolo è dedicato a questi concetti, allo sviluppo di principi che ne fanno uso e alla loro applicazione.

4.1 Prodotto scalare

Il primo argomento che incontreremo riguarda la definizione del lavoro in meccanica. Per usare una notazione compatta e rigorosa conviene preliminarmente definire un'operazione che coinvolge grandezze vettoriali, quella di **prodotto scalare**. Presi due vettori (generici) $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si definisce prodotto scalare $s = \vec{a} \cdot \vec{b}$ un'operazione che dà luogo ad una grandezza *scalare*, s.[1] Detto θ l'angolo compreso tra le *direzioni* di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si ha, per definizione, $s = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$, o, con scrittura più semplice, $s = ab\cos\theta$. Notate che, visto che la funzione coseno può assumere valori positivi o negativi (a seconda che θ sia minore o maggiore di π), lo scalare risultante dal prodotto può essere positivo o negativo, o nullo nel caso che $\vec{a}$ sia *ortogonale* rispetto a $\vec{b}$.

Se invece dell'angolo compreso tra i vettori sono note le componenti cartesiane dei due vettori, si può dimostrare che lo scalare risultante può essere scritto come: $s = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, dove abbiamo usato un'ovvia convenzione per indicare le componenti dei vettori di partenza. Vale la pena di ricordare che, come è facile verificare, il prodotto scalare gode della *proprietà commutativa*, cioè $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, e della *proprietà distributiva*, cioè $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Facciamo ora qualche considerazione geometrica sul significato del prodotto vettore, aiutandoci con la Fig. 4.1 che mostra due vettori (generici) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ appartenenti al piano del foglio. Per comodità abbiamo disegnato i due vettori in modo da far coincidere i due

[1] Al solito, esistono diversi modi per indicare la stessa operazione; invece di usare il "pallino", talvolta si trova scritto ad esempio $s = (\vec{a}, \vec{b})$. Noi non useremo mai questa espressione!

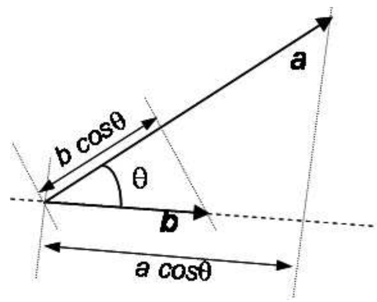

Figura 4.1: Illustrazione relativa al prodotto scalare tra due vettori (generici) $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

punti di partenza ("punti di applicazione"): infatti, se la situazione non fosse questa, potremmo sempre immaginare di applicare una *traslazione rigida* ad uno dei due vettori per riportarci nelle condizioni di figura. Allora, ricordando il significato geometrico del coseno dell'angolo, è facile rendersi conto che, ad esempio, il prodotto $|\vec{a}|\cos\theta$ è la *proiezione* (ovvero, la lunghezza della proiezione) del vettore $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$; viceversa, il prodotto $|\vec{b}|\cos\theta$ è la *proiezione* (ovvero, la lunghezza della proiezione) del vettore $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$. È facile capire che il prodotto scalare di due vettori può essere interpretato come il prodotto (algebrico) del modulo dell'uno per la proiezione dell'altro lungo la sua stessa direzione. Se i due vettori fossero ortogonali, allora è ovvio che il prodotto scalare sarebbe nullo, dato che la proiezione sarebbe nulla.

Ricordando il significato dell'estrazione della componente (cartesiana) di un vettore, è anche possibile rendersi conto che questa operazione corrisponde a moltiplicare scalarmente il vettore stesso per il versore dell'asse rispetto al quale si vuole estrarre la componente. In altre parole, ad esempio, si ha: $a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$, avendo espresso con $\hat{x}$ il versore dell'asse X.

4.2 Lavoro meccanico

Gli "ingredienti" della definizione di **lavoro** in meccanica sono una forza $\vec{F}$ applicata ad un corpo ed uno spostamento $\overrightarrow{\Delta s}$ compiuto dal corpo stesso. Supponendo la forza *costante ed uniforme* (cioè che non si modifica durante lo spostamento), la definizione di lavoro è semplicemente:

$$\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta s} \ . \tag{4.1}$$

Le dimensioni del lavoro sono quelle di [forza][spostamento], cioè Newton per metro, che assume nel sistema mks il nome Joule (abbreviazione J). Tenendo conto che la forza ha dimensioni di una massa per un'accelerazione, ovvero [massa][lunghezza]/[tempo]^2, il lavoro ha dimensioni [massa][velocità]^2, affermazione che ci tornerà più comprensibile in seguito.

Purtroppo non tutte le forze sono uniformi e nel caso non uniforme occorre generalizzare l'Eq. 4.1 scrivendola come somma (algebrica) di tanti termini, ognuno relativo ad un (piccolo) spostamento $\overrightarrow{\Delta s}_i$ al cui interno la forza $\vec{F}_i$ corrispondente può ritenersi costante. Si ha allora $\mathcal{L} = \Sigma_i \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s}_i$, dove la somma è estesa su tutti i piccoli intervalli in cui va suddiviso lo spostamento considerato. Seguendo il solito approccio della fisica, è chiaro che per avere una definizione rigorosamente corretta sarà necessario suddividere lo spostamento in tantissimi intervalli, ognuno dei quali è piccolissimo tanto da poter essere considerato *infinitesimo* (e lo indicheremo con $d\vec{s}$). La somma sarà allora estesa su tutti questi intervalli, il cui numero al limite diventa infinito: la matematica ci insegna che, in questi casi, l'operazione di sommatoria si scrive come un integrale (definito). Pertanto la definizione più generale (e sempre giusta!) di lavoro meccanico diventa:

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}\,; \tag{4.2}$$

dove abbiamo indicato con A, B gli estremi dell'integrazione, cioè le posizioni iniziali e finali dello spostamento (complessivo) rispetto al quale vogliamo determinare il lavoro. Fate attenzione al fatto che l'Eq. 4.2 contiene un'operazione di integrazione un po' particolare, dato che essa deve svolgersi lungo la linea (e con il verso giusto) che rappresenta lo spostamento del corpo. A questo tipo di operazione si dà il nome di **integrale di linea** (calcolato tra la posizione A e la posizione B).

Torniamo ancora sulla circostanza che il risultato del prodotto scalare tra due vettori ha un segno (e può addirittura essere nullo). Per ognuno dei contributi infinitesimi che formano l'integrale, il segno sarà positivo quando la forza ha componenti nello stesso verso dello spostamento, negativo altrimenti, e nullo nel caso in cui forza e spostamento siano ortogonali fra loro. Intuitivamente il lavoro potrà dirsi positivo quando la forza considerata è quella che "provoca" lo spostamento, negativo quando la forza "si oppone" allo spostamento; infine il lavoro sarà nullo quando la forza "non ha effetti" sullo spostamento. Chiariremo meglio questo concetto con alcuni esercizi qui nel seguito.

4.2.1 Esercizio: lavoro sul piano inclinato

Consideriamo un corpo puntiforme di massa m su un piano inclinato liscio (senza attrito) di angolo θ e lunghezza l. Applichiamo al corpo una forza costante parallela al piano, appena appena sufficiente a farlo spostare verso la sommità del piano (ma tale, al limite, da non impartire al corpo una velocità[2]); quanto vale il lavoro $\mathcal{L}$ fatto da questa forza per far risalire alla massa l'intero piano inclinato? (Si trascuri ogni forza d'attrito)

Soluzione. Secondo quanto stabilito nel testo, la forza applicata è tale da uguagliare la componente della forza peso lungo il piano inclinato. Abbiamo già avuto modo di calcolare tale componente, che vale, in modulo, $mg \sin \theta$. Quindi una forza di verso opposto (che cioè punta verso la sommità del piano) e modulo uguale è applicata al corpo. Ora, poiché la forza è uniforme e lo spostamento (di lunghezza l) ha direzione parallela alla forza stessa, il lavoro vale semplicemente $\mathcal{L} = mg \sin \theta l$. Notate che, per

[2]Questa situazione è assai difficile da immaginare: in sostanza la forza applicata è infinitesimamente maggiore della forza che deve essere vinta per spostarlo, cioè la componente della forza peso lungo il piano - vedi soluzione. Lo scopo dell'approssimazione che stiamo applicando è quello di semplificare il problema, visto che non abbiamo ancora introdotto i concetti di energia cinetica e potenziale gravitazionale.

la trigonometria, $\sin\theta l = h$, h essendo l'altezza del punto più alto del piano inclinato rispetto all'orizzontale. Quindi si può anche scrivere $\mathcal{L} = mgh$, risultato che ritroveremo e commenteremo in seguito. Notate anche che, se la forza fosse maggiore in modulo rispetto a quella qui considerata, il lavoro sarebbe anche maggiore, e la velocità del corpo alla fine dello spostamento sul piano inclinato sarebbe diversa da zero. Anche su questo commenteremo fra breve.

4.2.2 Esercizio: segno del lavoro in varie situazioni

Cosa si può affermare immediatamente sul lavoro nel caso di: forza centripeta e moto circolare, forza di attrito statico, forza di attrito dinamico?

Soluzione. La forza centripeta ha direzione radiale, mentre il moto considerato (che è circolare, o perlomeno curvilineo) coinvolge spostamenti che hanno direzione tangenziale. Dunque forza e spostamento sono ortogonali, ed il lavoro è sempre e sicuramente nullo. Nel caso dell'attrito statico non c'è, per ipotesi, spostamento; quindi anche in questo caso (ma per una ragione diversa) il lavoro è sempre e sicuramente nullo. Se, invece, si è in una situazione di attrito dinamico, allora si può affermare che, per ipotesi, la forza di attrito ha sempre verso opposto allo spostamento e quindi il lavoro di questa forza è sempre e sicuramente negativo.

4.2.3 Esercizio: lavoro di una forza non uniforme

Vedremo nel seguito quanto vale il lavoro dovuto a forze non uniformi di uso comune nella fisica, ad esempio la forza elastica. Qui supponiamo di avere a che fare con una (strana, ma non troppo) forza (o, meglio, con un *campo di forze*) che ha la direzione dell'asse X ed ha un'espressione che dipende dalla posizione secondo la legge: $\vec{F}(x) = (ax^2)\hat{x}$, con a costante opportunamente dimensionata e $\hat{x}$ versore dell'asse X. Quanto vale il lavoro compiuto da questa forza quando un corpo su cui essa agisce si sposta dall'origine del sistema di riferimento alla posizione $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$? (Supponiamo che lo spostamento avvenga sul piano XY; notate che questo spostamento non è necessariamente dovuto all'applicazione della forza $\vec{F}$, ma potrebbe avere una qualsiasi causa esterna!)

Soluzione. La forza è non uniforme e si deve obbligatoriamente usare l'espressione di Eq. 4.2. Poiché la forza è diretta lungo l'asse X, dovremo considerare le componenti dello spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ dirette lungo X; in altre parole, il prodotto scalare $\vec{F}\cdot d\vec{s}$ dà, come risultato, Fdx (potete rendervene facilmente conto immaginando di scrivere lo spostamento $d\vec{s}$ in funzione delle sue componenti cartesiane, che sono (dx, dy)). Allora l'integrale da calcolare si scrive $\int_0^{x_1} ax^2dx$. Il calcolo si esegue facilmente usando la nota regolina di integrazione per le potenze di una variabile; si ottiene: $\mathcal{L} = a\int_0^{x_1} x^2dx = (a/3)x^3|_0^{x_1} = ax_1^3/3$.

4.2.4 Esercizio: avanti ed indietro con forza di attrito

Un corpo di massa $m = 1.0$ kg può muoversi strisciando su una guida disposta lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. La guida è scabra, ed il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu = 0.50$. A causa di un operatore esterno, il corpo viene spostato dalla posizione $x_0 = 0$ alla posizione $x_1 = 2.0$ m, e quindi da qui viene riportato alla posizione iniziale $x_0 = 0$ (va "avanti" e poi torna "indietro"). Quanto vale il lavoro $\mathcal{L}_A$ fatto dalla forza di attrito nell'intero percorso?

Soluzione. La forza di attrito dinamico è uniforme e costante, è diretta lungo X ed ha *sempre* verso opposto allo spostamento. Nella prima parte del percorso (in "avanti") essa si scrive $\vec{F}_{A,av} = -N\mu\hat{x} = -mg\mu\hat{x}$, dove $\hat{x}$ è il versore dell'asse X ed il segno negativo indica che la forza si oppone allo spostamento, che è positivo. Nella seconda parte del percorso (all'"indietro"), si ha invece $\vec{F}_{A,in} = N\mu\hat{x} = mg\mu\hat{x}$, dove il segno negativo è scomparso perché lo spostamento è negativo. Il lavoro in avanti vale $\mathcal{L}_{A,av} = \vec{F}_{A,av}\cdot((x_1-x_0)\hat{x}) = -mg\mu x_1$ e quello all'indietro vale $\mathcal{L}_{A,in} = \vec{F}_{A,in}\cdot((x_0-x_1)\hat{x}) = -mg\mu x_1$. Il lavoro complessivo, che, come ovvio, si ottiene sommando le due espressioni, risulta $\mathcal{L}_A = -2mg\mu x_1 = -20$ J. Osservate bene che questo lavoro non è nullo (ma, giustamente, è negativo) anche se posizione iniziale e finale dell'*intero percorso* coincidono (si parte e si torna in $x_0 = 0$).

4.3 Potenza

La potenza W è definita in meccanica come il *lavoro compiuto in un intervallo di tempo* (ovvero, il lavoro compiuto nell'unità di tempo, un secondo nel sistema mks):

$$W = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} . \tag{4.3}$$

Le dimensioni della potenza sono [lavoro]/[tempo], e alla sua unità di misura (corrispondente a J/s) si dà nel sistema mks il nome di Watt, simbolo W (unità la cui esistenza è ben familiare a tutti).

Notate che la definizione di Eq. 4.3, a rigore, fornisce un valore di potenza mediato nel tempo, cioè che essa è valida se il lavoro rimane costante nell'intervallo di tempo considerato. Come già ampiamente visto con altre grandezze, la definizione di potenza *istantanea* prevede in realtà un passaggio al limite per $\Delta t \to 0$, con conseguente operazione di derivata, per cui formalmente si ha $W(t) = \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt}$. Il passaggio inverso prevede un'integrazione ed il lavoro eseguito nell'intervallo di tempo $\Delta t = (t_2 - t_1)$ si scrive $\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} W(t)dt$; se W non dipende dal tempo, si ha semplicemente $\mathcal{L} = W\Delta t$.

Vale la pena di precisare un'altra relazione che può essere utile in qualche problema. Ricordate che, essendo $\vec{s}$ lo spostamento del punto materiale considerato, la definizione di lavoro meccanico è $\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Se la forza $\vec{F}$ è *costante nel tempo*, applicando l'operazione di derivata temporale che serve pe r determinare la potenza istantanea si ha $W = \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, dove la forza, essendo costante, è stata "tirata fuori" dall'operazione di derivata e si è usata la definizione di velocità (vettoriale) $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$. Quindi, nel caso di forza costante che faccia muovere il punto materiale con velocità $\vec{v}$, la potenza è data dal prodotto scalare tra forza e velocità. La potenza così determinata può essere non costante (anche se la forza lo è), cioè questo approccio determina il valore istantaneo della potenza necessaria per mantenere il corpo a una data velocità in un certo istante.

4.3.1 Esercizio: potenza per una forza costante

Un operatore agisce su un corpo di massa $m = 40$ g con una forza *costante* diretta lungo il verso positivo dell'asse X e modulo $F = 2.0 \times 10^{-2}$ N. Supponendo che il corpo parta da fermo all'istante $t_0 = 0$ e che il suo moto sia determinato solo dalla forza $\vec{F}$ (cioè, ad esempio, che gli attriti siano trascurabili), quanto vale la potenza $W(t)$ erogata dall'operatore all'istante $t' = 10$ s?

Soluzione. Il moto del corpo è uniformemente accelerato lungo il verso positivo dell'asse X. All'istante t la sua velocità è $v = at = (F/m)t$; la potenza è allora $W(t') = Fv = (F^2/m)t' = 4.0 \times 10^{-1}$ J.

4.4 Lavoro per alcune forze conservative

In questo paragrafo ci occupiamo di determinare l'espressione del lavoro per alcune dei "tipi" di forza che abbiamo studiato nel capitolo precedente: la forza peso, la forza elastica, la forza elettrica. Preannunciamo un importante risultato, che poi verificheremo: il lavoro risulterà dipendere *solamente dalle posizioni inziale e finale* occupate dal corpo sottoposto a queste forze, e *non dalla particolare "traiettoria"* seguita dal corpo nel suo spostamento. In termini matematici, troveremo che l'integrale di linea che stabilisce il valore del lavoro dipende solo dalle posizioni che abbiamo chiamato A e B nell'Eq. 4.2, e non da "come" la posizione B viene raggiunta a partire da A. Come conseguenza, il lavoro su un'*orbita chiusa*, cioè su un percorso $A \to A$, *è nullo a prescindere dalla linea scelta per l'integrazione.* Forze di questo tipo si dicono **forze conservative**, ed hanno un ruolo molto importante in numerosi fenomeni fisici; le forze per le quali non vale questa proprietà si dicono invece **forze dissipative**[3].

4.4.1 Lavoro della forza peso

La forza peso è uniforme e costante, e, per un corpo di massa m, vale sempre $\vec{F}_P = m\vec{g}$. Dunque potremo trascurare di calcolare l'integrale ed adottare la definizione di Eq. 4.1: $\mathcal{L}_P = \vec{F}_P \cdot \overrightarrow{\Delta s}$. Supponiamo di partire da una posizione A, individuata dal vettore posizione $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$, e di arrivare ad una posizione B, individuata dal vettore posizione $\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ e notiamo che, se immaginiamo di operare con un sistema di riferimento

[3]La condizione che il lavoro sia nullo in un'orbita chiusa è necessaria, ma, in genere, *non sufficiente* per garantire che la forza è di tipo conservativo. Si intende che le forze di cui ci occupiamo in questo paragrafo sono solo un esempio di forze conservative: è senz'altro possibile individuare altre forze dotate della stessa caratteristica. Notate poi che, ad esempio, le forze di attrito dinamico *non sono conservative*, ma hanno carattere *dissipativo*, come mostrato nell'Es. 4.2.4.

cartesiano in cui l'asse Z è diretto *verso l'alto*, allora $\vec{F}_P$ ha *solo* componente (negativa) lungo l'asse Z, cioè si può scrivere $\vec{F}_P = -mg\hat{z}$, dove $\hat{z}$ è il versore dell'asse Z e g è il *modulo* (positivo!) dell'accelerazione di gravità. Eseguendo il prodotto scalare troviamo:

$$\mathcal{L}_P = -mg(z_B - z_A) = -mg\Delta z \ . \tag{4.4}$$

È evidente che questa espressione dimostra che la forza peso è *conservativa*: il lavoro, infatti, dipende solo dalla *variazione di quota* Δz tra posizione finale e posizione iniziale, ed è del tutto indipendente dalla traiettoria dello spostamento, cioè dai valori di x, y che vengono assunti nello spostamento stesso; inoltre esso risulta negativo se il corpo viene sollevato (la forza peso ha verso opposto allo spostamento), positivo se viene abbassato (la forza peso ha lo stesso verso dello spostamento), nullo se la quota rimane la stessa (non c'è lavoro in questo caso).

4.4.2 Esercizio: sollevare pesi

Un operatore esterno (ad esempio un motore) compie un lavoro per sollevare una massa $m = 100$ kg. Supponendo che la potenza erogata dall'operatore sia *costante*, e valga $W =$ 1.0 kW, e che essa sia *interamente e solamente* impiegata per il lavoro di sollevamento, a quale altezza h può essere sollevata la massa se l'operatore agisce per un intervallo di tempo $\Delta t = 9.8$ s?

Soluzione. Per la soluzione di questo problema adotteremo un concetto, basato sui principi di bilancio energetico, che approfondiremo in seguito. Per ora possiamo giungere alla risposta ragionando in termini intuitivi. Quando la massa viene sollevata per una quota h, la forza peso compie un lavoro che, in valore assoluto, è $|\mathcal{L}_P| = mgh$. Affinché il sollevamento sia possibile, l'operatore esterno deve agire con un lavoro *almeno* pari a questo valore, cioè deve essere $\mathcal{L}_{ext} = |\mathcal{L}_P| = mgh$; d'altra parte il lavoro dell'operatore esterno, essendo la potenza costante, vale, istante per istante, $\mathcal{L}_{ext} = Wt$. Quindi, essendo trascorso l'intervallo Δt, sarà $h = \mathcal{L}_{ext}/(mg) = W\Delta t/(mg) = 10$ m.

4.4.3 Lavoro della forza elastica

Supponiamo di avere una molla disposta con il suo asse lungo l'asse X: la forza elastica, che è notoriamente *non uniforme*, si scrive in questo caso $\vec{F}_{ela} = -k\Delta x\hat{x}$, dove k è la costante elastica (positiva!) e $\Delta x = x - x_0$ è la variazione di lunghezza (con il suo segno: positivo nel caso di estensione, negativo per una compressione), x_0 essendo la lunghezza di riposo della molla. Per come abbiamo scritto le variabili, stiamo supponendo che la molla abbia un estremo (fisso) nell'origine dell'asse X: questa scelta semplifica le notazioni, ma, ovviamente, non è affatto indispensabile per il calcolo che intendiamo eseguire, che ha carattere del tutto generale. Inoltre ricordiamo che le molle che generalmente consideriamo si suppongono di *massa trascurabile*, aspetto rilevante in questo contesto, dato che, come vedremo, una massa diversa da zero imporrebbe di attribuire un'energia cinetica al sistema, rendendo complessa la soluzione dei problemi proposti.

Essendo la forza non uniforme, dobbiamo necessariamente usare la definizione di Eq. 4.2: $\mathcal{L}_{ela} = \int_A^B \vec{F}_{ela} \cdot d\vec{s}$. Coerentemente con l'assunzione che abbiamo fatto nel Par. 3.8, consistente nel considerare forze elastiche che si sviluppano solo in una direzione, scegliamo di eseguire lo spostamento in direzione dell'asse X, cioè poniamo $d\vec{s} = dx\hat{x}$, ed immaginiamo di spostare l'estremo (libero) della molla dalla posizione x_A alla posizione x_B; questa assunzione non è essenziale per il calcolo che stiamo eseguendo, ma vale la pena di usarla per semplificare notazioni e calcoli. Dato che forza e spostamento hanno la stessa direzione, il prodotto scalare diventa un prodotto algebrico, e l'integrale diventa allora: $\mathcal{L}_{ela} = \int_{x_A}^{x_B} -k\Delta x dx = \int_{x_A}^{x_B} -k(x - x_0)dx$.

Applichiamo le regoline di integrazione che conosciamo[4] e scriviamo:

$$\mathcal{L}_{ela} = -k\int_{x_A}^{x_B} xdx + kx_0 \int_{x_A}^{x_B} dx = -k\frac{x_B^2 - x_A^2}{2} + kx_0(x_B - x_A) = -\frac{k}{2}((\Delta x)_B^2 - (\Delta x)_A^2) \;, \tag{4.5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato un po' di algebra ed abbiamo inteso scrivere $(\Delta x)_B = (x_B - x_0)$ e $(\Delta x)_A = (x_A - x_0)$.[5] Dunque il lavoro della forza elastica è proporzionale, attraverso il coefficiente $(k/2)$, alla differenza tra elongazione (o contrazione) finale ed elongazione (o contrazione) iniziale della molla; il suo segno dipende quindi dalle condizioni specifiche del fenomeno considerato. Si può comunque osservare che, nel caso in cui inizialmente la molla si trovi nella sua lunghezza di riposo, cioè $(\Delta x)_A = 0$, il lavoro della forza elastica è sempre negativo, sia che la molla venga compressa che venga estesa, dato che dipende dal quadrato della contrazione o estensione.

La verifica del carattere conservativo è, in questo caso, un po' meno diretta che per la forza peso. Infatti, anche se non strettamente necessario, abbiamo imposto di considerare spostamenti solo nella direzione dell'asse della molla, cioè nella direzione della forza. Limitiamoci allora ad osservare che $\mathcal{L}_{ela} = 0$ se la molla viene fatta "partire" e "tornare" nella stessa posizione. Infatti questo corrisponde a porre $A = B$, ovvero $(\Delta x)_A = (\Delta x)_B$, condizione che determina proprio $\mathcal{L}_{ela} = 0$, risultato che suggerisce il carattere conservativo della forza elastica.

4.4.4 Esercizio: molla compressa ed estesa

Una molla ha costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = 10$ cm. Inizialmente la molla ha una lunghezza $L_A = 5.0$ cm; quindi, per effetto di una qualche causa esterna (che non specifichiamo), la molla passa alla lunghezza $L_B = 15$ cm. Quanto vale il lavoro $\mathcal{L}_{ela}$ compiuto dalla forza elastica in questo processo?

[4] In particolare la proprietà distributiva dell'integrale (l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali), il "tirare fuori" le costanti dall'integrale, e la regolina che, per una variabile ξ generica, stabilisce $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, per $n \neq -1$.

[5] Un modo più elegante, da studenti "esperti in matematica", per giungere allo stesso risultato consiste nel notare che, formalmente, cambiando il nome della variabile Δx con ψ, si ha: $dx = d\psi$. L'integrale diventa allora $\int_{(\Delta x)_A}^{(\Delta x)_B} -k\psi d\psi$, che può essere calcolato immediatamente fornendo lo stesso risultato riportato nel testo.

Soluzione. Supponiamo che la molla sia disposta lungo l'asse X e cominciamo con il notare che $(\Delta x)_A = (L_A - L_0) = -5.0$ cm, mentre $(\Delta x)_B = (L_B - L_0) = 5.0$ cm, cioè la molla inizialmente è compressa e alla fine è estesa *della stessa quantità* (in valore assoluto). Abbiamo appena determinato che $L_{ela} = (k/2)((\Delta x)_B^2 - (\Delta x)_A^2)$; mettendo i valori del problema risulta quindi $\mathcal{L}_{ela} = 0$. Infatti si può osservare che nella fase di estensione della molla dal valore di compressione iniziale alla lunghezza di riposo il lavoro è positivo (forza e spostamento sono concordi), mentre nella fase successiva, fino al raggiungimento dell'estensione "finale", il lavoro è negativo (forza e spostamento discordi). Algebricamente i due contributi si annullano a vicenda, e quindi il lavoro complessivo risulta nullo.

4.4.5 Lavoro delle forze elettriche

Vogliamo ora occuparci delle forze elettriche che si sviluppano fra una coppia di *cariche puntiformi* (o tra una coppia di distribuzioni sferiche di carica, secondo quanto abbiamo stabilito nel Par. 3.11.1). Premettiamo due considerazioni, che sono piuttosto ovvie, ma comunque importanti. La prima è che il procedimento che seguiremo potrebbe facilmente essere applicato anche nel caso della *forza gravitazionale*, che, come sappiamo, formalmente ha caratteristiche analoghe alla forza elettrica. La seconda è che la conclusione che otterremo, cioè la dimostrazione che la forza elettrica è, in questo caso, conservativa, vale per qualsiasi situazione che coinvolga forze elettriche, a prescindere dal fatto che queste siano originate da cariche puntiformi. Infatti le forze elettriche sono *sempre conservative*, ed anzi si dice spesso che *il campo elettrico (elettrostatico) ha carattere conservativo.*

Per la dimostrazione, supponiamo di avere una coppia di cariche, q e Q, ed immaginiamo che Q sia fissa all'origine di un sistema di riferimento di coordinate *sferiche*[6]. Il campo elettrico si scrive, in queste condizioni: $\vec{E} = \kappa(Q/r^2)\hat{r}$, dove r è la coordinata radiale e $\hat{r}$ il suo versore. La forza elettrica che agisce su q è semplicemente $\vec{F}_{ele} = q\vec{E} = q\kappa(Q/r^2)\hat{r}$; tale forza dipende da r, e quindi non è uniforme. Supponendo che lo spostamento della carica q avvenga fra le posizioni A e B, la definizione di Eq. 4.2 ci dice che $\mathcal{L}_{ele,punt} = \int_A^B \vec{F}_{ele} \cdot d\vec{s}$. Come già fatto notare, la forza ha *direzione radiale*; pertanto, a prescindere dall'effettiva traiettoria compiuta da q nello spostamento, il prodotto scalare che compare nell'integrale terrà conto solo della proiezione dello spostamento in direzione radiale, cioè, per così dire, "selezionerà" solo gli spostamenti (infinitesimi) che avvengono in direzione radiale, che indichiamo con dr. In altre parole, l'integrale da calcolare diventa: $\mathcal{L}_{ele,punt} = \int_{r_A}^{r_B} F_{ele} dr$, dove con r_A ed r_B intendiamo le *coordinate radiali* (in pratica, la distanza tra le cariche) della posizione rispettivamente di partenza e di arrivo.

Occupiamoci ora del calcolo dell'integrale, che possiamo eseguire utilizzando le note

[6] Nulla ci vieta di usare coordinate di alto tipo, ad esempio cartesiane, ma sicuramente le coordinate sferiche sono quelle più semplici da trattare. Infatti il campo elettrico, e quindi la forza elettrica, generata da una carica puntiforme ha un'ovvia simmetria sferica (la direzione è radiale ed il valore del campo dipende solo dalla distanza relativa tra le cariche, cioè dalla coordinata radiale se si usa un sistema sferico centrato in una delle due cariche). Quindi con tale scelta si può risparmiare un sacco di fatica "matematica".

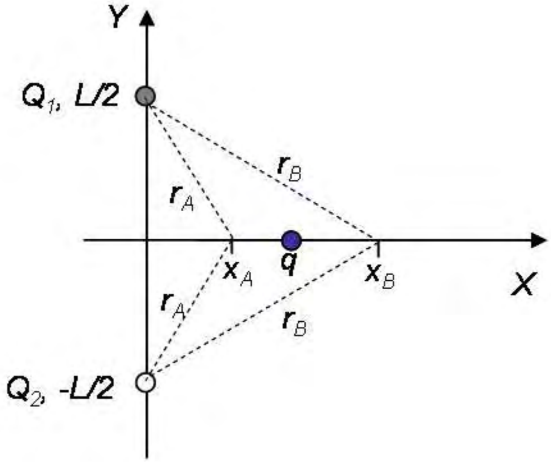

Figura 4.2: Rappresentazione schematica dell'esercizio sul lavoro elettrico con cariche puntiformi descritto nel testo.

regole:

$$\mathcal{L}_{ele,punt} = \int_{r_A}^{r_B} q\kappa Q \frac{1}{r^2} dr = q\kappa Q \int_{r_A}^{r_B} r^{-2} dr = -q\kappa Q(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}) \ . \tag{4.6}$$

Rifrasando, possiamo affermare che questa espressione indica il lavoro fatto dalla forza elettrica quando la carica q viene spostata da una distanza iniziale pari ad r_A ad una distanza finale pari ad r_B rispetto alla carica Q; notate che il segno del lavoro dipende da quello delle cariche e da quanto valgono le distanze iniziale e finale. Ad esempio, se le due cariche hanno lo stesso segno il lavoro è positivo se la carica q viene allontanata da Q e negativo se vi viene avvicinata, coerentemente con il fatto che le due cariche "tendono a respingersi"; se, invece, le cariche hanno segno discorde, l'affermazione deve essere capovolta.

In conclusione di questo paragrafo ricordiamo ancora che l'espressione di Eq. 4.6 riguarda solo i casi in cui compaiono cariche *puntiformi*; ci sono situazioni fisiche molto comuni ed importanti in cui il campo elettrico non ha l'espressione che abbiamo impiegato qui, che danno luogo a diverse espressioni del lavoro (troverete un campo elettrico uniforme e costante, ad esempio, nell'Es. 4.4.7).

4.4.6 Esercizio: lavoro del campo di due cariche puntiformi

In un piano di riferimeno cartesiano XY si trovano due cariche $Q_1 = Q$ e $Q_2 = -Q$, fisse su due posizioni dell'asse Y, rispettivamente $y_1 = L/2$ e $y_2 = -L/2$ (l'esercizio è rappresentato schematicamente in Fig. 4.2). Una terza carica, di valore q, si trova sull'asse X e viene spostata dalla posizione x_A alla posizione x_B (supponiamo $x_B > x_A$, cioè la carica q viene "allontanata" rispetto alle altre due). Quanto vale il lavoro *complessivo* $\mathcal{L}$ delle forze elettriche in questo processo?

Soluzione. I lavori "si sommano" algebricamente; conviene quindi partire dal lavoro $\mathcal{L}_1$ dovuto alla forza elettrica $\vec{F}_1$ legata al campo generato dalla carica (puntiforme) Q_1,

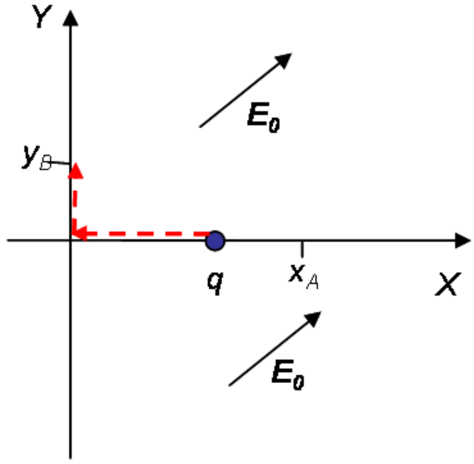

Figura 4.3: Rappresentazione schematica dell'esercizio sul lavoro di un campo elettrico uniforme descritto nel testo; la linea tratteggiata indica il percorso di integrazione utilizzato.

quindi passare alla carica Q_2 e sommare. Dato che le cariche considerate sono puntiformi, possiamo usare l'espressione di Eq. 4.6, e scrivere $\mathcal{L}_1 = -q\kappa Q_1(1/r_B - 1/r_A)$, dove, per il terorema di Pitagora, si ha $r_A = ((L/2)^2 + x_A)^{1/2}$ e $r_B = ((L/2)^2 + x_B)^{1/2}$. D'altra parte si ha anche $\mathcal{L}_2 = -q\kappa Q_2(1/r_B - 1/r_A)$, dove le distanze sono le stesse che abbiamo già determinato a causa della geometria del problema. Essendo $Q_2 = -Q_1$ il lavoro complessivo, che si ottiene sommando i due contributi, è nullo. Questo significa che il lavoro del campo di una carica è sempre opposto al lavoro del campo dell'altro carica. Notate che nell'espressione del lavoro non abbiamo fatto alcun riferimento esplicito alla "traiettoria" lungo la quale viene spostata la carica q, accontentandoci di applicare la relazione determinata nel testo: infatti il carattere conservativo del campo elettrico ci permette di trascurare questo aspetto (il lavoro è lo stesso qualsiasi sia la traiettoria usata per andare da x_A ad x_B).

4.4.7 Esercizio: lavoro di un campo elettrico uniforme

Come già più volte accennato, esistono numerose situazioni fisiche di interesse in cui ha a che fare con campi elettrici *uniformi* e costanti. Supponiamo allora di avere un problema sul piano XY, dove insiste un campo elettrico $\vec{E} = (E_0, E_0)$, con E_0 valore costante di campo elettrico. Una carica q viene spostata dalla posizione $\vec{r}_A = (x_A, 0)$ alla posizione $\vec{r}_B = (0, y_B)$. Quanto vale il lavoro $\mathcal{L}_{ele}$ del campo elettrico in questo processo?

Soluzione. Cerchiamo di capire preliminarmente la geometria del problema. Il campo è uniforme, ha modulo E_0 ed è diretto lungo la bisettrice del piano XY; la posizione iniziale della carica q appartiene all'asse X, la posizione "finale" all'asse Y. Essendo il campo uniforme (ben diverso da quello generato da cariche puntiformi!) *non* possiamo usare l'espressione di Eq. **??**. Infatti in queste condizioni il lavoro ha un'espressione molto più semplice: $\mathcal{L}_{ele} = \vec{F}_{ele} \cdot \overrightarrow{\Delta s} = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta s}$ (dalla definizione di lavoro per una forza uniforme, Eq. 4.1). Per risolvere il prodotto scalare è necessario chiarire qual è il percorso compiuto dalla carica q. Ricordiamo che, essendo il campo elettrico conservativo, abbiamo libertà nello scegliere il percorso più "opportuno"; ad esempio, potremo usare un percorso fatto dalla successione di due tratti, il primo lungo l'asse X (da x_A a $x = 0$) ed il secondo lungo l'asse Y (da $y = 0$ ad y_B), come rappresentato in Fig. 4.3, e quindi sommare algebricamente i due contributi al lavoro. Chiamando $\theta = \pi/4$ l'angolo compreso tra asse X e direzione del campo (la bisettrice del piano), si avrà quindi: $\mathcal{L}_{ele} = qE((0 - x_A)\cos\theta + (y_B - 0)\sin\theta) = qE(y_B \sin\theta - x_A \cos\theta)$ (espressione ulteriormente semplificabile notando che $\sin\theta = \cos\theta$ per $\theta = \pi/4$). Naturalmente il risultato ottenuto *non* deve dipendere dalla scelta del percorso: siete invitati a verificarlo calcolando il lavoro per uno spostamento "qualsiasi" (ad esempio quello che congiunge direttamente la posizione iniziale con quella finale).

4.5 Energia cinetica: definizione e teorema

Oltre ad essere una grandezza fisicamente rilevante per molti fenomeni fisici, il concetto di lavoro permette di formulare un importantissimo principio di impiego generale, quello di *bilancio energetico*. Per giungere alla sua formulazione è necessario prima di tutto definire una nuova grandezza, l'**energia cinetica**. Cominciamo con la definizione di questa nuova grandezza che, per un corpo (puntiforme) di massa m che si muove a velocità $\vec{v}$, si scrive:

$$E_k = \frac{m}{2}v^2 \ . \tag{4.7}$$

L'energia cinetica E_k è dunque una grandezza *scalare* (v^2 è il *modulo quadro* della velocità) che ha, come si può facilmente verificare, le *stesse dimensioni dell'energia*[7].

Immaginiamo allora di avere un corpo puntiforme di massa m, che può muoversi *senza attrito* su una retta. All'istante $t_0 = 0$ il corpo si trova a passare per l'origine del sistema di riferimento con velocità v_0; a partire da questo istante il corpo risente di una forza $\vec{F}$, che per semplicità supponiamo costante, uniforme e diretta lungo l'asse X. Per la legge di Newton, questa forza produrrà un'accelerazione (diretta lungo X) $a = F/m$ sul corpo, che quindi si muoverà di moto uniformemente accelerato con legge oraria: $x(t) = v_0t + (a/2)t^2$. Nelle condizioni sopra specificate, il lavoro è funzione del tempo secondo l'espressione $\mathcal{L} = Fx(t) = ma(v_0t + (a/2)t^2) = mv_0at + (m/2)(at)^2$, dato che la forza è uniforme e parallela allo spostamento. Nel moto uniformemente accelerato che stiamo considerando è $v = v_0 + at$, cioè $at = v - v_0$; possiamo quindi scrivere: $\mathcal{L} = mv_0(v - v_0) + (m/2)(v - v_0)^2 = (m/2)v^2 - (m/2)v_0^2$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sviluppato il quadrato del binomio ed usato un po' di algebra. Riassumendo, abbiamo stabilito che, quando un corpo si muove sotto l'azione di una data forza, il cui lavoro viene indicato con $\mathcal{L}$, scrivendo come v_0 e v rispettivamente la velocità "iniziale"

[7] Vale la pena di ricordare che, essendo il corpo puntiforme, stiamo considerando solo *moti di traslazione*; vedremo nel seguito l'espressione dell'energia cinetica quando il moto è di *rotazione* attorno ad un asse.

del corpo e quella che questo assume dopo l'applicazione della forza (per un certo periodo di tempo, finché la velocità vale in modulo v), abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \ , \tag{4.8}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo indicato con $E_{k,B}$ ed $E_{k,A}$ i valori dell'energia cinetica del corpo "al termine" e "all'inizio" del processo considerato.

L'Eq. 4.8 stabilisce un importantissimo *teorema*[8], detto **teorema dell'energia cinetica** (o *delle forze vive*): il lavoro meccanico che una forza compie sul corpo serve per modificare le sue condizioni dinamiche (accelerarlo o frenarlo, a seconda dei casi), e quindi a modificare la sua energia cinetica secondo la semplice relazione che abbiamo appena trovato, a prescindere dalla "tipologia" di forza o di fenomeno che si sta studiando.

4.5.1 Esercizio: la frenata a ruote bloccate rivisitata

Riprendiamo l'Es. 3.9.7 (la frenata a ruote bloccate di un'auto di massa m che ha inizialmente velocità v e si muove su una strada dotata di coefficiente di attrito dinamico μ_d) risolvendolo come sappiamo fare ora.

Soluzione. Al termine della frenata la velocità dell'auto è $v = 0$, mentre all'inizio era $v_0 = v$. Quindi nel processo che stiamo considerando si ha $\Delta E_k = -(m/2)v^2$. Questa variazione di energia cinetica è realizzata attraverso il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico, che vale in modulo $F_{a,d} = mg\mu_d$; essendo la forza di attrito dinamico sempre parallela ed opposta (cioè antiparallela) allo spostamento, si ha $\mathcal{L} = -mg\mu_d d$, dove il segno meno tiene conto del verso antiparallelo dell'attrito e d è la distanza di frenata. Quindi la risposta si trova "con un singolo passaggio" uguagliando lavoro e variazione di energia cinetica: $d = v^2/(2g\mu_d)$, indipendente dalla massa.

4.5.2 Esercizio: potenza e velocità

Un'automobile di massa $m = 1.0 \times 10^3$ Kg è spinta da un motore di potenza *costante* $W = 100$ kW (corrispondono a circa 133 Cv, unità tradizionale per la potenza, ancora in uso in ambito motoristico). Inizialmente l'auto è ferma, e quindi accelera per effetto del motore per un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ s percorrendo un tratto di strada in piano. Trascurando ogni attrito, quanto vale la velocità finale v dell'automobile?

Soluzione. Il lavoro compiuto dal motore vale $\mathcal{L} = W\Delta t$. Questo lavoro serve per aumentare l'energia cinetica da zero (all'inizio l'auto è ferma) fino al valore finale $(m/2)v^2$. Quindi, per la conservazione dell'energia: $W\Delta t = (m/2)v^2$, da cui $v = (2W\Delta t/m^{1/2}$. Il risultato numerico dà $v \approx 45$ m/s, cioè circa 160 km/h! Nella realtà, per fortuna, l'accelerazione di un'auto di questa potenza è meno bruciante per vari motivi, quali l'attrito e le

[8]Che si tratti di teorema è evidente, avendone appena dato una dimostrazione matematica; notate che le varie assunzioni che abbiamo usato per semplificare la matematica della dimostrazione non sono necessarie, ed il teorema ha *valdità generale*, qualsiasi sia la forza o la situazione di movimento del corpo che si considerano.

dissipazioni, la difficoltà di trasferire a terra la potenza (ogni sgommata dissipa energia in calore) e il fatto che un motore (a scoppio) non ha potenza sempre costante. Fate attenzione al fatto che una potenza costante non implica una forza costante. Infatti, se provate a risolvere questo esercizio esprimendo il lavoro come prodotto di forza e spostamento, e dall'accelerazione ottenuta dalla forza provate a dedurre la velocità, potreste trovare un risultato diverso (ed errato).

4.5.3 Esercizio: la frenata a ruote non bloccate

Come tutti sappiamo, quando si intende arrestare un'automobile si preferisce evitare di bloccare le ruote per mantenere la possibilità di controllo direzionale del mezzo (e per questo motivo è stato inventato l'ABS!). Supponiamo allora di avere un'automobile di massa $m = 1.0 \times 10^3$ kg che si muove a velocità $v = 72$ km/h. Ad un dato istante si azionano i freni, che modelliamo come un sistema in grado di fornire una forza di frenatura alle ruote (e quindi all'automobile) caratterizzata da una potenza "di frenatura" W *costante*. Supponendo che tutta e sola la potenza di frenatura serva per arrestare l'automobile (non ci sono attriti, né altre cause fisiche che possano influenzare il moto), e sapendo che l'arresto avviene su strada piana azionando i freni per un tempo $\Delta t = 5.0$ s, quanto vale la potenza W dell'impianto frenante?

Soluzione. Per arrestare l'automobile occorre fare un lavoro (di frenatura) che, in valore assoluto, è $|\mathcal{L}| = \Delta E_k = (m/2)v^2$; tale lavoro è fornito dai freni che hanno una potenza costante, e quindi deve essere $W\Delta t = (m/2)v^2$, cioè $W = (m/2)v^2/\Delta t = 40$ kW. Osservate che questo valore di potenza non è affatto trascurabile (la potenza frenante di una buona automobile è paragonabile alla potenza del suo motore!).

4.5.4 Esercizio: velocità e montagne russe

Siete ad un'altezza h (rispetto al suolo) su un impianto di montagne russe. Da questa altezza fate cadere liberamente al suolo un carrello delle montagne russe, di massa m, lasciandolo andare con velocità iniziale nulla. Con che velocità v il carrello arriva al suolo? E quanto vale la velocità se fate arrivare al suolo il carrello facendolo andare sui binari dell'impianto (di cui non conoscete la traiettoria)? Infine, che succede se invece del carrello usate una biglia di acciaio, di massa molto minore del carrello? (Trascurate ogni forma di attrito, cosa non molto ragionevole ma "istruttiva")

Soluzione. Si tratta di una caduta verso il basso per un dislivello h. Allora il lavoro della forza peso vale $\mathcal{L}_P = mgh$. Questo lavoro fa aumentare l'energia cinetica del carrello, che inizialmente era nulla, essendo nulla la velocità iniziale. Quindi $\mathcal{L}_P = mgh = \Delta E_k = (m/2)v^2$, da cui $v = \sqrt{2gh}$. Potete facilmente verificare che questo risultato è analogo a quello che si ottiene con le leggi della cinematica; il metodo qui proposto è molto più efficiente (ma, d'altra parte, non dà informazioni addizionali sulla dinamica, come ad esempio quanto tempo è necessario per la caduta). Se il carrello si muove sui binari, purché si supponga nullo l'attrito, il lavoro della forza peso è lo stesso di quello appena calcolato, e la velocità di arrivo al suolo non cambia per nulla. Similmente, non c'è nessun cambiamento se consideriamo una massa diversa (come aveva scoperto già Galileo), dato che la massa sta a moltiplicare sia il lavoro che l'energia cinetica e quindi "si semplifica" nell'equazione della velocità.

4.5.5 Esercizio: un protone sparato contro un altro

Un protone (massa $m_p = 1.6\times10^{-27}$ kg, carica $q = e = 1.6\times10^{-19}$ C), si trova inizialmente a distanza $d = 1.0$ m ed ha velocità, di modulo $v_0 = 200$ km/s, diretta verso un protone identico che si trova *fisso* nello spazio (questa configurazione può sembrare strana, ma qualcosa di simile avviene in diverse situazioni fisiche di laboratorio). Qual è la *minima distanza* D raggiunta dal primo protone rispetto a quello fisso?

Soluzione. Si tratta di cariche puntiformi, e quindi occorre impiegare l'espressione di Eq. **??** e porre questo lavoro pari alla variazione di energia cinetica: $\mathcal{L}_{ele,punt} = -\kappa q^2(1/r_B - 1/r_A) = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A}$. Le due posizioni indicate con A e B corrispondono a quella iniziale (con distanza d) e quella di massimo avvicinamento (con distanza D). Ora è del tutto ovvio che quando il protone si trova alla *minima* distanza D, la sua velocità è (in quell'istante) nulla, per cui $E_{k,B} = 0$; d'altra parte è anche $E_{k,A} = (m_p/2)v_0^2$, per cui l'equazione da risolvere diventa: $-\kappa q^2(1/D - 1/d) = -(m_p/2)v_0^2$, cioè $1/D = m_p v_0^2/(2\kappa q^2) + 1/d \simeq m_p v_0^2/(2\kappa q^2)$, dove l'approssimazione è dovuta al fatto che, numericamente, il primo termine della somma che compare al secondo membro è molto molto più grande del termine $1/d$. Dai dati, ricordando che la costante della forza elettrica è $\kappa = 9.0\times10^9$ Nm^2/C^2, risulta $D = 1.4\times10^{-11}$ m (una distanza molto piccola!).

4.5.6 Esercizio: lavoro complessivo di un sistema complicato

Una piccola massa m è attaccata all'estremità di una molla di costante elastica k, il cui altro estremo è solidale alla sommità di un piano inclinato (angolo ϕ rispetto all'orizzontale), come rappresentato schematicamente in Fig. 4.4. La massa può scivolare senza attrito lungo il piano; inoltre essa reca una carica elettrica q e, in tutto lo spazio rilevante per l'esperimento, è presente un campo elettrico *uniforme*, di modulo E, che ha la stessa direzione del piano inclinato ed è orientato verso l'alto. La posizione iniziale della massa è tale che la molla si trova alla sua lunghezza di riposo. Se da tale posizione la massa viene lasciata libera di muoversi verso il basso con velocità iniziale nulla, come si scrive, in modulo, la sua velocità v quando essa si trova a passare per la posizione che corrisponde alla molla estesa per un tratto δ? (Si suppone che i valori delle varie grandezze, non dati nel testo, siano tali da permettere effettivamente alla massa di scivolare verso il basso)

Soluzione. Sulla massa agiscono le tre forze conservative peso, elastica, elettrica. Il lavoro complessivo si ottiene sommando algebricamente i tre contributi. La forza peso compie un lavoro $\mathcal{L}_P = mg\delta \sin\phi$, essendo per la trigonometria $\delta \sin\phi$ la variazione di quota corrispondente ad uno spostamento δ lungo il piano inclinato. La forza elastica compie un lavoro $\mathcal{L}_{ela} = -(k/2)\delta^2$ (la lunghezza di partenza è quella di riposo per la molla), quella elettrica (dovuta ad un campo *uniforme*) un lavoro $\mathcal{L}_{ele} = -qE\delta$, dove il segno negativo tiene in debito conto l'orientazione del campo. Deve allora essere:

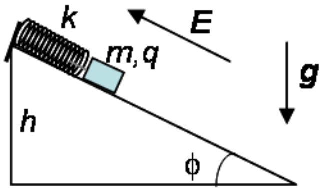

Figura 4.4: Rappresentazione schematica dell'esercizio con piano inclinato e tre forze descritto nel testo.

$\mathcal{L} = mg\delta \sin\phi - (k/2)\delta^2 - qE\delta = \Delta E_k = (m/2)v^2$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo considerato che la massa partiva con velocità iniziale nulla (e quindi aveva energia cinetica iniziale nulla). Si ricava quindi: $v = \pm(2g\Delta \sin\phi - (k/m)\Delta^2 - 2(q/m)E\Delta)^{1/2}$ (il segno $\pm$ dipende dal fatto che la velocità può in linea di principio essere orientata verso l'alto o verso il basso: dal testo del problema si intuisce che la soluzione richiesta, se esiste, è quella positiva).

4.6 Energia potenziale e bilancio energetico

Nei paragrafi precedenti abbiamo messo a punto degli strumenti per la soluzione di numerosi problemi. Tali strumenti erano sostanzialmente basati sulla definizione di lavoro e di energia cinetica e sul teorema che lega queste grandezze. È possibile (ed illuminante) reinterpretare quanto abbiamo già affermato utilizzando un linguaggio diverso, che usa il concetto di *bilancio energetico*. Anche qui si parte da una definizione: *per una forza conservativa* (generica) che agisce producendo un lavoro (di espressione generica) $\mathcal{L}$, si chiama **differenza di energia potenziale** ΔU la grandezza:

$$\Delta U = -\mathcal{L} \ . \tag{4.9}$$

Ad esempio, per il campo gravitazionale avremo una *variazione di energia potenziale gravitazionale* $\Delta U_G = -L_P = mg\Delta z$, dove Δz è la variazione di quota del corpo che stiamo considerando misurata in un riferimento orientato verso l'alto (l'energia aumenta se il corpo sale, diminuisce se scende) ed m la sua massa; per una forza elastica (generata ad esempio da una molla con costante elastica k disposta lungo l'asse X che ha estensione o compressione "iniziale" $(\Delta x)_A$ ed estensione o compressione "finale" $(\Delta x)_B$), avremo che *la variazione di energia (potenziale) elastica* è $\Delta U_{ela} = -\mathcal{L}_{ela} = (k/2)((\Delta x)_B^2 - (\Delta x)_A^2)$; nel caso di due cariche elettriche puntiformi Q_1 e Q_2 avremo una *variazione di energia (potenziale) elettrica, o elettrostatica* $\Delta U_{ele,punt} = -\mathcal{L}_{ele,punt} = \kappa Q_1 Q_2 (1/r_B - 1/r_A)$, essendo, al solito, r_A ed r_B le due distanze tra le cariche misurate in condizione rispettivamente "finale" ed "iniziale". Per un campo elettrico $\vec{E}$ uniforme e costante che agisce su una carica q, è facile dimostrare che si ha $\Delta U_{ele,unif} = qE\Delta r$, avendo indicato con Δr la variazione della posizione della carica *proiettata* lungo la direzione del campo.

Riprendiamo ora il teorema dell'energia cinetica che abbiamo prima dimostrato. Con la nuova terminologia possiamo scrivere, per una variazione di energia potenziale (generica) corrispondente ad un lavoro $\mathcal{L}$ (senza pedici che la caratterizzino, basta che si tratti di una forza *conservativa*), $\Delta E_k = \mathcal{L} = -\Delta U$, ovvero:

$$0 = \Delta E_k + \Delta U = \Delta(E_k + U) \ . \tag{4.10}$$

Questa equazione ha un'interpretazione suggestiva: la quantità all'ultimo membro può essere interpretata come la variazione dell'energia *complessiva* del sistema considerato, data dalla somma di energia cinetica e dell'energia potenziale dovuta alle forze *conservative* che agiscono sul sistema; se le forze conservative sono più di una, allora il ΔU da usare in Eq. 4.10 è la *somma algebrica* delle variazioni di energia potenziale dovuta alle varie forze. La somma di energia cinetica e potenziale, che indicheremo spesso come **energia meccanica**, *si conserva*, cioè la sua variazione è nulla, se agiscono *solo* forze conservative. A questo punto è anche possibile capire il significato del termine "potenziale" che abbiamo attribuito all'energia: ad esempio, se prendiamo una massa e la solleviamo verso l'alto (cioè aumentiamo la sua energia potenziale gravitazionale), allora diamo a questa massa l'attitudine a "generare", potenzialmente (cioè se la lasciamo libera di cadere verso il basso), una certa quantità di energia cinetica.

Qualora ci fossero forze non conservative (ad esempio, l'attrito), per le quali non si può introdurre una variazione di energia potenziale[9], detto $\mathcal{L}_d$ il lavoro di queste forze, potremo scrivere:

$$\mathcal{L}_d = \Delta E_k + \Delta U = \Delta(E_k + U) \ . \tag{4.11}$$

Questa equazione rappresenta un **principio di bilancio energetico**, cioè la scrittura matematica di un concetto molto generale ed utile in tantissimi campi della fisica. In sostanza, il lavoro di una forza applicata ad un sistema agisce in modo da modificarne l'energia meccanica (complessiva) secondo la semplice relazione di Eq. 4.11; questo approccio torna prezioso nella soluzione di molti problemi, almeno quando non è richiesta una conoscenza approfondita della dinamica del sistema.

Da ultimo sottolineiamo un aspetto della nostra trattazione: abbiamo parlato di *variazioni* di energia potenziale, e non di energia potenziale tout-court. Il motivo è che, fisicamente, è la *variazione* ad avere significato[10]. Facciamo un esempio semplicissimo: solleviamo verso l'alto una massa m per un certo tratto Δz; la massa acquisterà un'energia potenziale (gravitazionale) $mg\Delta z$ che avrà lo stesso valore dovunque sia centrato l'asse Z che stiamo utilizzando (al suolo, sul Monte Serra, al centro della Terra, etc.). Infatti la grandezza Δz è proprio una *variazione* di quota, e quindi assume lo stesso valore per

[9]Pensate a questa affermazione, cercando di apprezzare che l'utilità del concetto di energia potenziale è proprio nel fatto che essa è pienamente determinata quando si conoscono le posizioni iniziali e finali del corpo; se si dovessero anche specificare altri dettagli dello spostamento, ad esempio la traiettoria effettivamente seguita, allora diventerebbe assai poco conveniente servirsi del concetto di energia potenziale!

[10]Vedremo presto qualche eccezione a questa affermazione: nel caso elettrostatico si fa talvolta riferimento a delle "energie", o meglio, a dei "potenziali", intendendo comunque che esiste una convenzione che assegna un dato valore al potenziale di un punto (come vedremo, si considera in genere nullo il "potenziale all'infinito").

qualsiasi scelta del riferimento[11]. Quindi, qualsiasi sia il riferimento rispetto al quale si misura la quota del corpo, la variazione di quota, e quindi quella di energia potenziale, assumeranno sempre lo stesso valore. Ragionamento analogo può essere compiuto per le altre forze conservative.

4.6.1 Esercizio: il "cannoncino a molla"

Il "cannoncino a molla" è, in pratica, il dispositivo usato nei flippers (di buona memoria) per imprimere una velocità iniziale alle biglie. Supponiamo di averne a disposizione uno costitituito da una molla di costante elastica k disposta con l'asse orizzontale, che inizialmente si trova compressa per un tratto δ. Ad un dato istante la causa fisica che mantiene compressa la molla (nel caso del flipper la mano del giocatore) viene rimossa istantaneamente, ed un corpo (puntiforme, per semplicità) di massa m che era appoggiato all'estremità della molla viene "lanciato" con una certa velocità $\vec{v}$ nella stessa direzione dell'asse della molla. Supponendo trascurabili gli attriti e la massa della molla, quanto vale, in modulo, v?

Soluzione. La descrizione dettagliata dei fenomeni che permettono di imprimere una velocità iniziale alla biglia può essere assai complessa: infatti non è chiaro quando e come la biglia si distacca dalla molla (dipende anche dai dettagli costruttivi del cannoncino, che qui non conosciamo). Tuttavia anche in questo caso i principi di bilancio energetico possono essere d'aiuto. Considerando una situazione iniziale in cui la molla è compressa ed il corpo è fermo, ed una situazione "finale" in cui il corpo si muove a velocità $\vec{v}$ e la molla è tornata alla sua lunghezza di riposo, avremo che, in assenza di dissipazioni, l'energia meccanica (somma di cinetica ed elastica, supponiamo che il moto avvenga in direzione orizzontale) si conserva: $0 = \Delta E_k + \Delta U_{ela} = (m/2)v^2 - (k/2)\delta^2$, da cui $v = (k/m)^{1/2}\delta$.

4.6.2 Esercizio: il giro della morte

Nell'Es. 3.7.2 abbiamo già analizzato il problema del "giro della morte", determinando la velocità minima che il corpo che lo compie (ad esempio, l'automobilina di quell'esercizio) deve avere nel punto più alto della traiettoria. A questo punto possiamo mettere in relazione tale velocità con quella che il corpo deve avere "alla base" del giro della morte, cioè quella con cui deve affrontare il percorso se vuole evitare di cadere al suolo. Poniamo qualche dato: chiamiamo m la massa del corpo ed R il raggio del giro della morte (che, ad esempio, possiamo immaginare come una guida circolare posta su un piano verticale come in Es. 3.7.2). Quanto vale, in modulo, la velocità *minima* v_{min} che il corpo deve possedere *all'inizio* del percorso circolare (cioè quando si trova sul piano orizzontale) affinché possa percorrere l'intero percorso senza staccarsi dalla guida e cadere al suolo? (Supponente trascurabili tutte le forme di attrito)

[11] Purché diretto verticalmente ed orientato verso l'alto: se fosse orientato verso il basso, allora, come abbiamo già avuto modo di osservare, dovremmo porre un segno negativo davanti all'espressione della variazione di energia.

Soluzione. Ragionando in termini di accelerazione centripeta del corpo quando questo si trova nel punto di massima altezza del percorso (il punto "critico"), ed in particolare uguagliando l'accelerazione centripeta alla accelerazione di gravità (cioè ponendo pari a zero la reazione vincolare esercitata dalla guida sul corpo), avevamo trovato che la velocità in tale posizione doveva essere almeno pari a $v' = \sqrt{(gR)}$. Dato che supponiamo assenza di attriti, l'energia meccanica, somma di energia cinetica e potenziale gravitazionale, deve conservarsi; in particolare, essa deve avere lo stesso valore quando il corpo sta alla base della circonferenza e quando si trova nel punto di quota massima. Quindi: $0 = \Delta E_k + \Delta U_G$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_k = (m/2)v'^2 - (m/2)v_{lim}^2$, quella di energia potenziale è $\Delta U_g = -mg(2R)$, dove abbiamo considerato che, quando il corpo raggiunge il punto più alto del percorso, si trova ad una quota più alta di una quantità $h = 2R$ rispetto alla base ($2R$ è il diametro del cerchio). Uguagliando e risolvendo si ottiene $v_{lim} = \sqrt{5gR}$.

4.6.3 Esercizio: piano inclinato con attrito dinamico

Un corpo puntiforme di massa m arriva con velocità v alla base di un piano inclinato di altezza h e lunghezza l. Sapendo che il corpo risale lungo il piano scivolando (non rotolando) e che il coefficiente di attrito dinamico vale μ_d, qual è la distanza d percorsa dal corpo sul piano inclinato prima di fermarsi?

Soluzione. Alla base del piano inclinato il corpo possiede un'energia cinetica $E_k = (m/2)v^2$, che diventa zero alla fine, quando il corpo si ferma, per cui $\Delta E_{kin} = -(m/2)v^2$. Detta h' la quota massima raggiunta dal corpo, la variazione di energia potenziale gravitazionale vale $\Delta U_g = mgh'$. Ora notiamo che, per ragioni di similitudine geometrica, si ha $d = lh/h'$ (si faccia anche riferimento alla figura del par.3.4.2), per cui il lavoro della forza di attrito dinamico fatto durante il movimento del corpo vale $\mathcal{L}_{a,d} = -N\mu_d d$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che la forza di attrito ha verso opposto allo spostamento. Resta da calcolare la reazione vincolare N, che, come già discusso in altri esercizi, ha modulo uguale alla proiezione della forza peso in direzione ortogonale al piano: $N = mg\cos\theta$, θ essendo l'angolo tra il piano e l'orizzontale. Dai dati geometrici del problema e dalla trigonometria possiamo calcolare $\cos\theta = l/\sqrt{l^2 - h^2}$, da cui $\mathcal{L}_{a,d} = -mg\mu_d ld/\sqrt{l^2 - h^2}$. A questo punto applichiamo il bilancio energetico: $\Delta E_{kin} + \Delta U_g = \mathcal{L}_{a,d}$, cioè:

$$-\frac{m}{2}v^2 + mg\frac{h}{l}d = -mg\mu_d\frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}d \,, \tag{4.12}$$

da cui si risolve per d:

$$d = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g\frac{h}{l} + g\mu_d\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}} \,. \tag{4.13}$$

Dato che la questione dei segni è parecchio delicata (qui e sempre), conviene fare una verifica basata sul buon senso. Quindi provate a vedere cosa succede al risultato se cambiate i parametri (per esempio, se la velocità iniziale cambia, o se annullate l'attrito, o anche se modificate i parametri geometrici). Se le cose non vanno come vi aspettate, ricontrollate il procedimento.

4.6.4 Esercizio: velocità nella macchina di Atwood

Abbiamo già avuto modo di incontrare la "macchina di Atwood", il sistema di due masse m_1 ed m_2 collegate da una fune inestensibile (e di massa nulla) che passa per la gola di una puleggia (di massa nulla!) fissata ad un solaio, come nell'Es. 3.6.3. Supponiamo $m_2 > m_1$: il sistema tenderà ad evolvere in modo che m_2 si abbassa per effetto della gravità ed m_1 si alza. Immaginiamo di tenere con una mano le masse e, ad un certo punto, di lasciarle andare con velocità iniziale nulla: trascurando gli attriti, quanto vale la velocità v della massa 2 quando questa si è abbassata di un tratto δ?

Soluzione. Non ci sono forze dissipative, e l'energia meccanica si conserva. Quindi $0 = \Delta E_k + \Delta U_G = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + m_1 g\delta - m_2 g\delta$, dove abbiamo usato il fatto che, a causa della inestensibilità della fune, la massa m_1 si muove verso l'alto (guadagnando energia potenziale gravitazionale) di tanto quanto la massa m_2 si muove verso il basso (perdendo energia potenziale gravitazionale). Sempre a causa della inestensibilità della fune, deve anche essere, per i moduli, $v_1 = v_2 = v$, per cui l'equazione scritta è sufficiente a fornire la soluzione con un solo passaggio: $v = (2g\delta(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2))^{1/2}$. Questo risultato è ovviamente in accordo con quanto si può trovare usando le leggi del moto, ma usando il bilancio energetico la soluzione è stata particolarmente diretta ed immediata.

4.6.5 Esercizio: velocità della molla

Una massa m è attaccata ad una molla di costante elastica k, il cui altro capo è vincolato ad una parete verticale. La molla ha il suo asse orizzontale, e la forza peso non fa effetto sulla dinamica del sistema. Inizialmente la massa viene spostata in modo che la compressione della molla valga δ, e quindi viene rilasciata con velocità nulla. La massa comincia a muoversi. Quanto vale la sua velocità v_{rip} quando passa per la posizione di riposo della molla? (Trascurate la massa della molla e ogni forma di attrito)

Soluzione. Ragioniamo in termini di bilancio energetico: in questo esercizio ci sono "due energie", o variazioni di energia, da considerare: l'energia cinetica e quella elastica. All'inizio la massa è ferma, e quindi l'energia cinetica è nulla, e l'energia elastica è diversa da zero; invece, al passaggio per la posizione di riposo la situazione "si inverte", e l'energia elastica si annulla mentre l'energia cinetica assume il suo valore massimo. Infatti, poiché non ci sono forze dissipative, deve essere $\Delta(E_k + U_{ela}) = 0$, ovvero $\Delta E_k = (m/2)v_{rip}^2 = -\Delta U_{ela} = (k/2)\delta^2$, da cui $v_{rip} = \pm(k/m)^{1/2}$ (il segno si sceglie sulla base dell'orientazione dell'asse).

La condizione che l'energia meccanica (complessiva) resti costante deve essere valida in ogni istante del moto. Come ricorderete, il moto della massa è di tipo armonico; se teniamo conto delle condizioni iniziali del problema, come già abbiamo ripetutamente avuto modo di fare, potremo scrivere le leggi orarie del moto e della velocità nella forma: $x(t) = \delta\cos(\omega t)$ e $v(t) = -\omega\delta\sin(\omega t)$, dove abbiamo supposto di usare come riferimento un asse X centrato nella posizione di riposo della molla (assunzione conveniente dal punto di vista della complicazione algebrica, ma sicuramente non necessaria per la dimostrazione che stiamo per dare); inoltre, come sappiamo, deve essere $\omega = \sqrt{k/m}$. Allora in un istante generico avremo $\Delta E_k = (m/2)v^2(t) = (m/2)\omega^2\delta^2\sin^2(\omega t) = (m/2)(k/m)\delta^2\sin^2(\omega t) = (k/2)\delta^2\sin^2(\omega t)$. D'altra parte dovrà anche essere $\Delta U_{ela} = (k/2)x^2(t) - (k/2)\delta^2 = (k/2)(\delta^2\cos^2(\omega t) - \delta^2)$; sommando le due variazioni e usando un po' di algebra si ottiene: $\Delta E_k + \Delta U_{ela} = (k/2)\delta^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) - 1) = 0$, come ci si aspettava.

4.6.6 Esercizio: massa, piano inclinato e molla

Torniamo ad esaminare un esercizio con piani inclinati e molle: abbiamo una massa m che può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato (angolo ϕ rispetto all'orizzontale). Tale massa è attaccata ad una fune (inestensibile e di massa trascurabile) che, dopo essere passata per una puleggia di massa trascurabile fissata alla sommità del piano inclinato, è vincolata al suolo attraverso una molla di costante elastica k; la Fig. 4.5 rappresenta una visione schematica del problema. Supponiamo di tirare inizialmente verso il basso la massa, in modo che la molla risulti estesa di un tratto δ, e poi di lasciarla andare liberamente con velocità iniziale nulla. Fino a quale punto del piano inclinato risale la massa?

Soluzione. Anche in questo esercizio si conserva l'energia meccanica del sistema, che è data dalla somma di energia cinetica, energia gravitazionale ed energia elastica. Le condizioni del problema sono tali che, inizialmente, l'energia cinetica è nulla (la massa viene lasciata andare con velocità iniziale nulla); d'altra parte anche al termine del processo, cioè quando la massa ha raggiunto il punto più alto possibile sul piano inclinato, l'energia cinetica è nulla (se non lo fosse la massa si starebbe ancora muovendo, verso l'alto per raggiungere una quota maggiore, o verso il basso perché ha già raggiunto la quota più alta in precedenza). Quindi la conservazione dell'energia meccanica implica in questo caso: $0 = \Delta U_G + \Delta U_{ela}$. Chiamiamo L il tratto percorso dalla massa sul piano inclinato per raggiungere la quota massima: per evidenti ragioni geometriche, legate all'inestensibilità della fune, deve essere, detta L_0 la lunghezza di riposo della molla (che è un'incognita, ma poi sparirà): $L = (L_0 + \delta) - (L_0 - \delta') = \delta + \delta'$, essendo δ' la *compressione* della molla alla fine del processo[12]. Essendo ϕ l'angolo del piano inclinato, si ha $\Delta U_G = mgL\sin\phi = mg\sin\phi(\delta + \delta')$. Inoltre è $\Delta U_{ela} = (k/2)\delta'^2 - (k/2)\delta^2$, per cui, usando la conservazione dell'energia: $0 = mg\sin\phi(\delta + \delta' + (k/2)\delta'^2 - (k/2)\delta^2$. L'unica incognita di questa equazione è δ', e quindi l'equazione (algebrica di secondo grado) può essere risolta a patto che i valori dei parametri usati (occorrono i valori numerici, che qui non abbiamo dato!) siano tali da permetterne una soluzione reale. Una volta determinato il valore di δ' l'esercizio è praticamente terminato, dato che possiamo sapere quanta strada è stata percorsa dalla massa nella sua risalita, e quindi conoscere la sua posizione di arresto. Notate che, come è ovvio, tale posizione *non* è quella di equilibrio (come potete facilmente verificare): dunque dopo aver raggiunto la quota massima la massa prendere a scendere lungo il piano inclinato, e continuerà a muoversi di moto armonico. Quella

[12]State attenti ai segni che abbiamo impiegato: la scelta è dovuta al fatto che vogliamo che sia δ che δ' siano grandezze *positive*. Nulla vi impedisce di modificare questa convenzione, al prezzo, però, di tenere in debito conto le conseguenze.

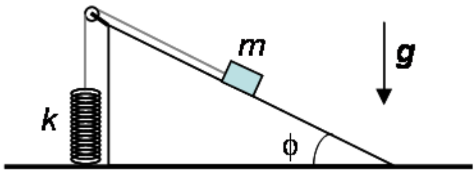

Figura 4.5: Rappresentazione schematica dell'esercizio con piano inclinato, puleggia e molla descritto nel testo.

appena determinata è infatti una delle due posizioni in cui la massa inverte il verso del suo movimento (l'altra è la posizione di partenza).

4.6.7 Esercizio: energia nel pendolo

Immaginiamo un pendolo costituito da una massa puntiforme m vincolata a muoversi (senza attrito) su un piano verticale da un filo di lunghezza l (inestensibile e di massa trascurabile) inchiodato ad una parete verticale, come nell'Es. 3.5.2. Detto θ l'angolo tra il filo e la verticale (con $\theta = 0$ alla posizione di equilibrio), come si scrivono le energie in gioco in funzione di θ?

Soluzione. Nel problema compaiono l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale. La variazione di energia potenziale gravitazionale rispetto alla posizione di equilibrio si scrive, usando un po' di trigonometria (può farvi comodo fare riferimento alla Fig. 3.4): $\Delta U_G(\theta) = mg\Delta z = mgl(1 - \cos\theta)$. L'energia cinetica, associata al moto (tangenziale) della massa, si scrive, per una posizione θ generica, $E_k = (m/2)v^2 = (m/2)l^2(d^2\theta/dt^2)$, dove abbiamo usato la definizione di velocità e la (nota) condizione geometrica che lega velocità tangenziale e velocità angolare.

4.6.8 Esercizio: velocità di fuga di un satellite

Immaginiamo di voler mandare un satellite su un altro pianeta senza fare uso di nessuno dei tanti metodi noti agli astronauti (ad esempio l'"effetto fionda"). In buona sostanza, supponiamo di lanciare il nostro satellite, di massa m, verso il cielo fornendogli una velocità iniziale v_0. Trascurando ogni forma di attrito (ed attriti, in realtà, ce ne sono, visto che nella prima parte del viaggio il satellite incontrerà l'atmosfera terrestre!), quanto deve essere il minimo valore di v_0 affinché il satellite possa "vincere" l'attrazione gravitazionale della Terra ed eventualmente raggiungere l'altro pianeta?

Soluzione. L'affermazione di partenza per risolvere questo esercizio è che il satellite "riceva" un'energia sufficiente ad allontanarsi indefinitamente dalla Terra, in modo da raggiungere l'altro pianeta. La forza che attrae il satellite sulla Terra è quella gravitazionale (universale), che, come ben sappiamo, è formalmente analoga alla forza elettrica tra cariche puntiformi. Per questo tipo di problema avevamo stabilito che la variazione di energia potenziale quando un oggetto (una carica, in quel caso) passava da una distanza (misurata rispetto all'altro oggetto, supposto fisso nello spazio) r_A ad una distanza r_B si scriveva: $\Delta U_{ele,punt} = Q_1\kappa Q_2(1/r_B - 1/r_A)$. Nel caso della forza gravitazionale è molto semplice rendersi conto che l'espressione va modificata scrivendo al posto delle cariche le masse in gioco (quella del satellite, e quella della Terra, che indichiamo con m_T) e al posto della costante della forza elettrica la costante gravitazionale, G. Inoltre, per tenere conto del carattere sempre attrattivo della forza gravitazionale, lo stesso che si ha quando le cariche hanno segni opposti, dovremo mettere esplicitamente un segno negativo[13]. Si ha quindi: $\Delta U_{grav,univ} = -mGm_T(1/r_B - 1/r_A)$. Nel nostro problema, in cui intendiamo lanciare il satellite dalla superficie terrestre, dovremo porre la distanza iniziale pari al raggio della Terra, cioè $r_A = r_T$. La distanza "finale", invece, sarà quella del pianeta che vogliamo esplorare: dato che, di sicuro, tale distanza sarà molto maggiore rispetto al raggio terrestre, potremo senz'altro trascurare il termine $1/r_B$ rispetto al termine $1/r_T$, ponendo: $\Delta U_{grav,univ} \simeq mGm_T/r_T$,[14] Poiché non ci sono forze dissipative, l'energia meccanica dovrà conservarsi; a questa energia nel nostro modello contribuisce l'energia gravitazionale (universale) che abbiamo appena determinato e l'energia cinetica. Sarà quindi $0 = \Delta E_k + \Delta U_{grav,univ}$. Notiamo ora che, "al minimo" (come chiede il testo dell'esercizio), sarà sufficiente che il satellite giunga sull'altro pianeta con velocità, e quindi energia cinetica, nulla. Quindi $\Delta E_k = -(m/2)v_0^2$. Mettendo insieme le varie espressioni si trova un'equazione che consente di determinare v_0: $v_0 = (2Gm_T/r_T)^{1/2}$. Questa velocità, detta talvolta *velocità di fuga*, non dipende dalla massa del satellite e vale, numericamente, $v_0 \sim 10^4$ m/s ($\sim 4 \times 10^4$ km/h).

4.6.9 Esercizio: transizioni elettroniche ed energia di ionizzazione

Pur sapendo che non è approccio corretto, descriviamo l'atomo di idrogeno con un "modello planetario", che abbiamo già incontrato nell'Es. 3.11.2: il protone (massa m_p, carica e) si trova fisso all'origine di un sistema di riferimento sferico e l'elettrone (massa m_e, carica $-e$) gli ruota attorno in orbite circolari uniformi. La meccanica quantistica ci suggerisce che l'orbita di raggio minore (che chiameremo "fondamentale") ha raggio a_0 e che le orbite "possibili" non possono avere raggio arbitrario; in particolare l'orbita "sucessiva" (la "prima eccitata") ha raggio $a_1 = 4a_0$. Quando l'elettrone passa da un'orbita all'altra si dice che effettua una **transizione elettronica** che richiede di "scambiare" (assorbire o cedere) una certa energia, che può essere fornita, ad esempio, da radiazione elettromagnetica[15] Quanto vale l'energia ΔE_{01} da fornire al sistema se si vuole che l'elettrone passi dall'orbita fondamentale (con raggio a_0) alla prima eccitata (con raggio a_1)? E quanto vale l'energia ΔE_{ion} necessaria per *ionizzare* l'atomo, cioè per strappare via l'elettrone?

Soluzione. Nel modello planetario si suppone che l'accelerazione centripeta dell'elettrone sia fornita dalla forza (attrattiva) di natura elettrica che si sviluppa tra elettrone e protone. Detto r il raggio (generico) dell'orbita, tale forza si scrive in modulo $|\vec{F}| = \kappa e^2/r^2$; l'accelerazione centripeta è quindi, in modulo, $|\vec{a_c}| = |\vec{F}|/m_e = (\kappa/m_e)e^2/r^2$ e la velocità angolare con cui viene compiuta l'orbita vale $\omega = (a_c/r)^{1/2} = (\kappa/m_e)^{1/2}e/r^{2/3}$.

[13] Siete invitati a verificare queste affermazioni calcolando esplicitamente il lavoro, e quindi la variazione di energia potenziale, nel caso di forza gravitazionale universale.

[14] Dal punto di vista matematico abbiamo calcolato il limite dell'espressione per $r_B \to \infty$.

[15] Vedremo qualcosa al proposito nel capitolo dedicato alle onde elettromagnetiche.

Per il principio del bilancio energetico, l'energia da fornire sarà pari, *in modulo*, alla differenza fra l'energia meccanica (complessiva) misurata per le due orbite, che è data a sua volta dalla somma di energia cinetica ed elettrica (per cariche puntiformi). L'energia cinetica per un elettrone che percorre un'orbita di raggio r generico vale $(m/2)v^2 = (m/2)\omega^2 r^2 = (m/2)((\kappa/m)e^2/r^3)r^2 = \kappa e^2/(2r)$, dove abbiamo usato la relazione $v = \omega r$ del moto circolare ed abbiamo sostituito l'espressione di ω determinata sopra. Quindi, se vogliamo che l'elettrone passi dall'orbita di raggio a_0 a quella di raggio a_1, avremo: $\Delta E_k = \kappa e^2/2(1/a_1 - 1/a_0)$. La variazione di energia (potenziale) elettrica si calcola adottando la relazione data in Par. 4.6 per una coppia di cariche puntiformi: $\Delta U_{ele,punt} = -\kappa e^2(1/a_1 - 1/a_0)$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che le due cariche hanno segno opposto. Risulta quindi $\Delta E_{01} = \kappa e^2/2(1/a_1 - 1/a_0) - \kappa e^2(1/a_1 - 1/a_0) = \kappa e^2/2(1/a_1 - 1/a_0) = 3\kappa e^2/(8a_0) \sim 10^{-18}$ J,[16] dove negli ultimi passaggi abbiamo tenuto conto della posizione del testo ($a_1 = 4a_0$) e dei valori numerici delle varie grandezze ($a_0 = 5.0 \times 10^{-11}$ m, $m_e = 9.0 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C). Per calcolare l'energia di ionizzazione possiamo partire da considerazioni analoghe, notando però che in questo caso la transizione avviene verso una situazione in cui l'elettrone è in prima approssimazione fermo (non deve percorrere alcuna orbita) e la sua distanza finale rispetto al protone è "molto grande" (matematicamente tende ad infinito, e quindi il rapporto $1/r \to 0$). Tenendo in mente tutto ciò possiamo scrivere: $\Delta E_{ion} = -\kappa e^2/(2a_0) + \kappa e^2/a_0 = \kappa e^2/(2a_0) = 2.2 \times 10^{-18}$ J.

4.6.10 Esercizio: dissipazione di energia nelle oscillazioni smorzate

Trattando del moto periodico, ed in particolare dell'oscillatore armonico, abbiamo più volte sottolineato come la nostra soluzione, ottenuta supponendo assenza di attrito, fosse poco realistica. Infatti esistono delle ragioni fondamentali in fisica che impediscono l'esistenza di un moto indefinitamente periodico (moto perpetuo). In questo esercizio vogliamo trattare, soprattutto dal punto di vista energetico, il comportamento di un oscillatore in presenza di attrito viscoso, che, come accennato in Par. 3.9.9, è in grado di modellare in modo abbastanza preciso i (tanti) fenomeni fisici di dissipazione (attrito con l'aria, comportamento della molla) che affliggono i sistemi macroscopici reali. Consideriamo un oscillatore armonico costituito da una massa m attaccata ad una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla (per semplificare i calcoli); supponiamo il moto unidimensionale, diretto lungo X. In assenza di smorzamento, la soluzione del moto con le condizioni iniziali $x_0 = x_i$ e $v_0 = 0$ è, come sappiamo: $x(t) = x_i \cos(\omega t)$, mentre la legge oraria della velocità è $v(t) = dx(t)/dt = -\omega x_i \sin(\omega t)$. Energia cinetica ed energia potenziale elastica sono, ovviamente, funzione del tempo: in particolare è $E_{kin}(t) = (m/2)v(t)^2 = (m/2)\omega^2 x_i^2 \sin^2(\omega t)$ e $U_{ela}(t) = (k/2)x_i^2 \cos^2(\omega t)$. L'energia totale E_{tot}, cioè la somma di energia cinetica ed energia potenziale, è, come dimostrato nell'Es. 4.6.5, costante e mantiene il valore iniziale $E_0 = (k/2)x_i^2$. Qual è l'andamento

[16] Studiando la radiazione elettromagnetica avremo modo di stabilire che radiazione di questa energia corrisponde alla regione spettrale dell'*ultravioletto*.

temporale dell'energia se si suppone che il moto avvenga in presenza di un attrito viscoso con coefficiente di attrito β?

Soluzione. In Par. 3.9.9 abbiamo stabilito che, in presenza di un attrito viscoso, le oscillazioni sono smorzate nel tempo, e la soluzione diventa (con le stesse condizioni iniziali citate prima): $x(t) = x_i \exp(-\gamma t)\cos(\omega t)$, con $\gamma = \beta/m$. Questo significa che, periodo dopo periodo, l'ampiezza dell'oscillazione si riduce esponenzialmente nel tempo, e di conseguenza l'energia elastica massima (quella che si ha quando la velocità si annulla, cioè quando si raggiungono i punti estremi dell'oscillazione) non rimane costante. Si ha infatti: $U_{ela}(t) = (k/2)x_i^2 \exp(-2\gamma t)$, dove abbiamo usato la proprietà della funzione esponenziale $(\exp(\alpha))^2 = \exp(2\alpha)$, con α costante generica. Allora anche l'energia totale deve diminuire nel tempo, con l'andamento $\exp(-2\gamma t)$, cioè deve esistere un meccanismo di dissipazione che fa perdere energia all'oscillatore (per mandarla nell'universo, sotto forma, ad esempio, di calore). Notate che, in ogni caso, dato che la funzione esponenziale decrescente tende *asintoticamente* a zero, l'energia dell'oscillatore non si annulla mai, ovvero, con questo modello, l'oscillatore continua indefinitamente a compiere oscillazioni, anche se di ampiezza decrescente esponenzialmente nel tempo. Per modellare alcune situazioni fisiche è necessario introdurre un altro termine dissipativo, che ha caratteristiche simili all'attrito statico ed è in grado di sottrarre completamente l'energia dell'oscillatore quando questa scende al di sotto di un certo valore, provocandone l'arresto definitivo.

4.7 Energia, forza e gradiente

Riassumiamo quanto dimostrato nei paragrafi precedenti: se abbiamo una forza *conservativa* (generica) $\vec{F}$ possiamo costruire una variazione di energia potenziale (generica) ΔU corrispondente allo spostamento dalla posizione A alla posizione B usando l'espressione:

$$\Delta U = -\mathcal{L} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \,. \tag{4.14}$$

Nel caso generale di spostamenti e forze che agiscono in tre dimensioni, potremo porre, riferendoci ad un sistema di coordinate cartesiane, $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$ e quindi, usando le componenti della forza in questo sistema, scrivere:

$$\Delta U = -\int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \;; \tag{4.15}$$

questo integrale può, in alcune circostanze, essere complicato da risolvere. Pertanto riferiamoci per il momento ad un caso unidimensionale, supponendo per esempio che la forza abbia solo componenti lungo l'asse X; in questo caso si ha semplicemente:

$$\Delta U = -\int_{x_A}^{x_B} F dx \;. \tag{4.16}$$

Formalmente, le espressioni che abbiamo scritto stabiliscono un legame tra la *funzione* forza e la differenza di energia potenziale. Naturalmente è possibile anche seguire il percorso "inverso", cioè trovare la *funzione* forza a partire dalla conoscenza della *funzione* energia potenziale. Partiamo dal caso più semplice, quello unidimensionale. La matematica ci suggerisce che l'operazione "inversa" a quella di integrazione (unidimensionale) di Eq. 4.16 è la derivazione rispetto alla variabile x. Quindi nel caso unidmensionale (forza solo lungo X) avremo:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \ , \tag{4.17}$$

dove abbiamo indicato esplicitamente la dipendenza funzionale della forza e dell'energia potenziale dalla variabile spaziale x.[17] Facciamo un esempio facile: la *differenza* di energia potenziale gravitazionale si scrive, usando un'asse Z rivolto verso l'alto, $\Delta U_G(z) = mgz$, dove abbiamo supposto di riferire la quota dell'oggetto di cui vogliamo misurare l'energia al livello $z = 0$. Allora, con la posizione $U_G(z = 0) = U_0 = 0$, potremo affermare che la funzione energia potenziale gravitazionale del nostro corpo è $U_G(z) = mgz$. Derivando questa espressione rispetto alla variabile z otteniamo la forza peso: $\frac{dU_G(z)}{dz} = -mg$, dove il segno negativo ci ricorda che la forza è diretta verso il basso. Potete provare ad ottenere altre forze (conservative), come la forza elastica e quella elettrica, a partire dalle rispettive espressioni per l'energia potenziale.

La situazione diventa (matematicamente) più complicata nel caso generale, a tre dimensioni. Se guardiamo l'Eq. 4.15, possiamo renderci facilmente conto che non basta derivare rispetto ad una sola coordinata per ottenere l'espressione corretta della forza, che stavolta avrà componenti nelle tre direzioni e potrà essere funzione di tutte e tre le coordinate. Limitandoci ad esaminare situazioni in cui si fa uso di sistemi di coordinate cartesiane[18], è facile rendersi conto che le *componenti* della forza possono essere ottenute derivando la funzione energia potenziale rispetto alle singole variabili. In altre parole è:

$$F_x = -\frac{dU(x,y,z)}{dx} \tag{4.18}$$

$$F_y = -\frac{dU(x,y,z)}{dy} \tag{4.19}$$

$$F_z = -\frac{dU(x,y,z)}{dz} \ . \tag{4.20}$$

Un modo compatto per esprimere le espressioni appena ricavate fa uso dell'operatore **gradiente**[19]. Questo operatore, che indicheremo con il simbolo $\vec{\nabla}$ (detto in gergo

[17]Potrebbe sorgervi un dubbio: abbiamo (quasi) sempre parlato di *differenza* di energia potenziale, ed ora, invece, usiamo l'energia potenziale. In effetti, considerando la differenza di energia come una funzione (di x), cioè, in pratica, supponendo di lasciare variabile la posizione "finale" che si impiega nel calcolo della differenza di energia, sarà sempre possibile scrivere: $\Delta U(x) = U(x) - U(x_0) = U(x) - U_0$, dove abbiamo indicato con U_0 il valore *costante* dell'energia nel punto x_0. Trattandosi di costante, se ricordate la definizione e le proprietà dell'operazione di derivata potrete facilmente convincervi che: $\frac{d(\Delta U(x))}{dx} = \frac{dU(x)}{dx} - \frac{dU_0}{dx} = \frac{dU(x)}{dx}$. Dal punto di vista concettuale trattare di differenza di energia o di energia non è diverso, almeno in questo ambito.

[18]Le espressioni che deriveremo hanno una forma diversa se i sistemi di riferimento sono, ad esempio, cilindrici o sferici. Non vogliamo ora complicarci la vita con questi dettagli!

[19]Grossolanamente, si chiama operatore un oggetto matematico che indica di compiere determinate operazioni su delle funzioni.

"nabla"), ha un carattere vettoriale (cioè dà come risultato una terna di funzioni). In modo compatto scriveremo, in coordinate cartesiane:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x,y,z) = -(\frac{dU(x,y,z)}{dx}, \frac{dU(x,y,z)}{dy}, \frac{dU(x,y,z)}{dz}) , \tag{4.21}$$

dove nell'ultimo membro abbiamo esplicitato le componenti (cartesiane) risultanti dall'applicazione dell'operatore gradiente sulla funzione $U(x,y,z)$.

Per il momento questa precisazione ha un significato soprattutto di completezza; incontreremo in seguito altre importanti occasioni in cui compare l'operatore $\vec{\nabla}$, ad esempio in elettrostatica.

4.7.1 Esercizio: forza da un'energia potenziale

Facciamo un esercizio di tipo formale, in cui abbiamo a che fare con energie e forze un po' strane. Supponiamo allora che un dato esperimento ci mostri che l'energia potenziale di un certo sistema dipende dalle variabili spaziali x ed y secondo la legge: $U(x,y) = \alpha x^2 - \beta xy$, con α e β costanti opportunamente dimensionate. Come si esprime la forza (conservativa) $\vec{F}$ responsabile di questa energia?

Soluzione. Il problema non è unidimensionale, e dobbiamo usare l'Eq. 4.21. Eseguendo le derivate, troveremo che $F_x(x,y) = -2\alpha x + \beta y$ e $F_y = \beta x$, mentre evidentemente la forza non ha componenti lungo l'asse Z. Si tratta evidentemente di una forza un po' complicata!

4.7.2 Energia potenziale e stabilità

Ritorniamo ad esaminare il concetto di stabilità meccanica, che avevamo incontrato per la dinamica di un punto materiale[20], restringendoci per il momento a situazioni unidimensionali, ad esempio considerando moti e forze lungo il solo asse X. Avevamo affermato che un punto materiale è in condizioni statiche se esso è inizialmente fermo e se la risultante delle forze che agisce su di esso è nulla. Se esaminiamo la *funzione* energia potenziale $U(x)$ relativa alle forze che agiscono sul nostro punto materiale, avremo che la condizione $F(x_{EQ}) = 0$ significa che la *derivata di* $U(x)$ rispetto ad x *si annulla* per $x = x_{EQ}$, cioè, ricordando i rudimenti di analisi matematica, che la $U(x)$ *ha un minimo o un massimo per* $x = x_{EQ}$. Quindi, esaminando il grafico della funzione $U(x)$ è immediatamente possibile stabilire, se ci sono, dove si trovano i punti di equilibrio.

Possiamo precisare ulteriormente il concetto: avevamo indicato la possibilità di avere equilibrio stabile, instabile o indifferente a seconda che l'effetto di una (piccola) perturbazione rispetto alla posizione di equilibrio fosse quello di far tornare il corpo nella posizione di equilibrio, oppure di allontanarlo da qui, oppure di farlo restare nella nuova posizione. Dato che la forza è, punto per punto, proporzionale alla derivata dell'energia potenziale, punto per punto, *cambiata di segno*, è facile rendersi conto che per avere

[20]I concetti espressi in questo paragrafo hanno una validità generale, e si applicano, con i dovuti aggiustamenti, anche alla stabilità rispetto alle rotazioni.

equilibrio *stabile* occorre che $U(x)$ sia decrescente per $x < x_{EQ}$ e crescente per $x > x_{EQ}$ (ovvviamente ci riferiamo a dei piccoli intorni della posizione di equilibrio, dato che, per ipotesi, il punto materiale deve essere sottoposto a "piccole" perturbazioni). Infatti in queste condizioni la forza risultante avrà sempre segno tale da riportare il punto materiale verso la posizione di equilibrio. Viceversa, se $U(x)$ fosse crescente per $x < x_{EQ}$ e decrescente per $x > x_{EQ}$, allora l'equilibrio sarebbe chiaramente instabile. Infine, in caso di $U(x)$ costante in un intorno di x_{EQ}, l'equilibrio sarebbe indifferente, dato che non ci sarebbe nessuna forza a riportare o ad allontanare il punto dalla posizione di equilibrio.

Matematicamente queste condizioni si riassumono affermando che l'equlibrio è:

- *stabile* se la funzione energia potenziale ha un *minimo* (locale) nella posizione di equilibrio;
- *instabile* se la funzione energia potenziale ha un *massimo* (locale) nella posizione di equilibrio;
- *indifferente* se la funzione energia potenziale è costante in un intorno della posizione di equilibrio.

Quindi ispezionando il grafico della funzione $U(x)$ è immediatamente possibile individuare *anche* il carattere delle eventuali posizioni di equilibrio.

Dal punto di vista concettuale il ragionamento da fare è simile anche per le situazioni a più dimensioni, però con complicazioni matematiche aggiuntive, dato che si ha a che fare con superfici (o iper-superfici) nello spazio, argomento che è sicuramente al di fuori degli scopi di questi appunti e che quindi non trattiamo.

4.7.3 Esercizio: stabilità nell'oscillatore armonico

Avete una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, poggiata verticalmente su un pavimento rigido. All'estremità superiore della molla si trova una massa puntiforme m. Detto Z un asse verticale orientato verso l'alto e con l'origine sul pavimento, come si scrive la *funzione* energia potenziale $U(z)$ per il sistema (dove z rappresenta la posizione della massa in questo sistema di riferimento)? Esistono posizioni di equilibrio e di che tipo sono?

Soluzione. Alle domande di questo esercizio sappiamo già rispondere in modo più che adeguato usando la dinamica. Qui, però, vogliamo dare una risposta impiegando i concetti esposti in Par. 4.7.2. Cerchiamo la funzione $U(z)$ cominciando con il notare che abbiamo due forze conservative delle quali occuparci, la forza elastica e la forza peso. L'energia elastica dipenderà da z secondo la funzione $U_{ela}(z) = (k/2)(\Delta z)^2$, con $\Delta z = z - L_0$; l'energia gravitazionale sarà invece del tipo $U_G(z) = mgz$, per cui la funzione energia potenziale (complessiva) avrà la forma $U(z) = (k/2)(z - L_0)^2 + mgz$. Notate che questa espressione è corretta *a meno di costanti*; in altre parole, potremmo aggiungere o togliere dei valori costanti se, ad esempio, volessimo che questa energia si annullasse per un quealche valore specifico di z. Questo non è richiesto esplicitamente dal problema, e d'altra parte questi eventuali valori costanti sarebbero irrilevanti per la soluzione, dato che la presenza di minimi o massimi locali nella funzione $U(z)$ non dipende da loro. Se provate a graficare questa funzione, usando una scelta "ragionevole" dei parametri numerici che essa contiene (non dati nel testo dell'esercizio), troverete che essa è rappresentata da un tratto di parabola. Esiste quindi un minimo, corrispondente ad una posizione di *equilibrio stabile* per $z = z_{EQ}$. L'espressione di z_{EQ} si ottiene, matematicamente, derivando rispetto a z la funzione $U(z)$ e ponendola pari a zero: si ha quindi $0 = -dU(z)/dz|_{zEQ} = -k(z_{EQ} - L_0) - mg$, che dà come risultato $z_{EQ} = L_0 - mg/k$.[21]

4.7.4 Esercizio: un potenziale strano

Svolgiamo un altro esercizio di tipo formale, in cui ci disinteressiamo un po' della "fisica del problema". Supponiamo di aver determinato la funzione energia potenziale (generica) per un certo sistema e di aver trovato che essa ha una dipendenza funzionale dalla coordinata x del tipo $U(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$, con $\alpha = 0.10$ μJ/cm^3, $\beta = -50$ μJ/cm^2 e $\gamma = -5.0 \times 10^3$ μJ/cm (le unità di misura di queste costanti sono quelle giuste per garantire coerenza dimensionale e per dare luogo a valori "ragionevoli" dell'energia!). Considerando l'intervallo $0 < x < 500$ cm, esistono posizioni di equilibrio, e di che tipo sono?

Soluzione. L'esercizio richiede di studiare la funzione $U(x)$, un grafico della quale è rappresentato in Fig. 4.6. Scriviamo la funzione forza associata a questa energia, cioè calcoliamo la sua derivata rispetto ad x (cambiata di segno) per un valore x qualsiasi: $F(x) = -dU(x)/dx = -3\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma$. Questa equazione algebrica di secondo grado si annulla nei due punti $x = x_1$ ed $x = x_2$. Come si vede dal grafico, il punto $x = x_2$ corrisponde ad un minimo locale (e quindi è una posizione di equilibrio *stabile*) ed il punto $x = x_1$ corrisponde ad un massimo locale (e quindi è una posizione di equilibrio *instabile*). Per dare un tocco di realismo alla situazione descritta, immaginate che la funzione data rappresenti il profilo altimetrico di una guida su cui può scorrere senza attrito un corpo puntiforme: quali sarebbero le posizioni di equilibrio e perché?

4.8 Potenziale elettrostatico

Focalizziamo la nostra attenzione sul caso della forza elettrica. Supponendo di conoscere l'espressione del campo elettrico $\vec{E}$, cioè la funzione che lega il valore (vettoriale) di questo campo alla posizione, potremo scrivere, in analogia con quanto fatto finora, la variazione di *energia potenziale elettrostatica* per lo spostamento di una carica q immersa in questo campo dalla posizione A alla posizione B come:

$$\Delta U_{ele} = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{s}\,. \tag{4.22}$$

Nello scrivere questa espressione non abbiamo aggiunto nulla alle nostre consocenze, ma solo riscritto $\Delta U_{ele} = -\mathcal{L}_{ele}$ e tenuto conto del fatto che $\vec{F}_{ele} = q\vec{E}$; inoltre, non avendo

[21] Se conoscete i rudimenti dell'analisi delle funzioni, saprete stabilire se questa posizione è di minimo o di massimo basandovi sull'andamento della "derivata seconda" rispetto a z della funzione $U(z)$ calcolata in questo punto.

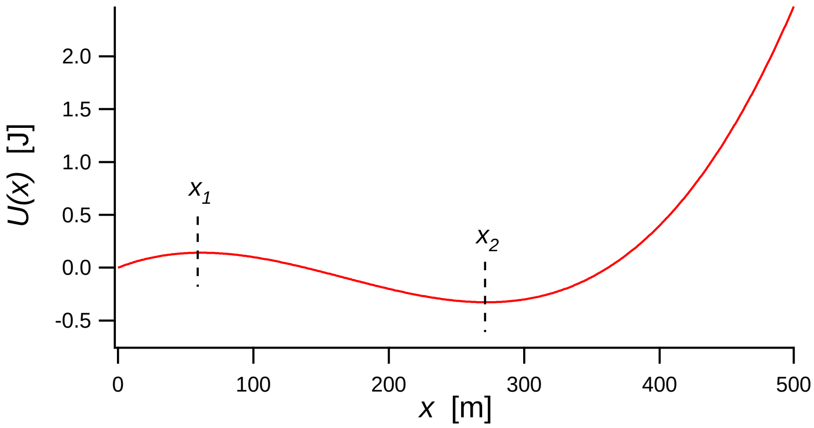

Figura 4.6: Grafico della funzione $U(x)$ discussa nel testo.

fatto alcuna precisazione sulla forma del campo elettrico, l'espressione avrà validità generale, cioè, ad esempio, varrà tanto per il caso delle cariche puntiformi quanto per quello dei campi uniformi, a patto di esprimere $\vec{E}$ in modo opportuno.

Ricordando il ragionamento adottato per introdurre il concetto di *campo elettrico*, risulta naturale immaginare anche qui che le carica q sia una "carica di prova", usata per sondare il campo, ed è allora altrettanto naturale definire una nuova grandezza che si ottiene dividendo ΔU_{ele} per il valore della carica q. A questa nuova grandezza si dà il nome di **differenza di potenziale elettrico** (o elettrostatico) $\Delta\phi$. Si ha quindi per definizione che la differenza di potenziale tra la posizone B e la posizione A è:

$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \,. \tag{4.23}$$

Questa nuova grandezza risulterà di grande utilità pratica nei problemi di elettrostatica, come vedremo in futuro. Proprio a causa della sua utilità, essa ha un'unità di misura specifica nel sistema mks, il Volt (simbolo V). Chiaramente 1 Volt corrisponde alla differenza di energia elettrica di 1 Joule "applicata" alla carica di 1 Coulomb. Addirittura si usa spesso un'unità di misura *dell'energia* (di qualsiasi natura) derivata da quella del potenziale elettrico; esiste infatti la possibilità di usare l'elettronVolt (simbolo eV), che è l'energia acquistata da una carica unitaria (l'elettrone!) sottoposta ad una differenza di potenziale di 1 Volt. Ricordando che la carica di un elettrone vale, in valore assoluto, $|e| = 1.6 \times 10^{-19}$ C, è facile ottenere la seguente relazione di conversione: 1 eV = 1.6 $\times 10^{-19}$ J.

Come esempio consideriamo la differenza di potenziale nel caso del campo generato da una carica puntiforme Q che supponiamo centrata nell'origine di un sistema di riferimento di coordinate sferiche. Ricordando l'espressione per $\Delta U_{ele,punt}$ data in Par. 4.6, possiamo immediatamente dire che la differenza di potenziale tra un punto di coordinata (radiale) r_1 ed un punto di coordinata (radiale) r_2 vale $\Delta\phi = \phi(r_2) - \phi(r_1) = \Delta U_{ele,punt}/q = \kappa Q(1/r_2 - 1/r_1)$. Notate che, se uno dei due punti, per esempio r_1, viene portato a grande distanza (matematicamente $r_1 \to \infty$), allora la differenza di potenziale non dipende più da tale distanza, riducendosi a $\Delta\phi = \kappa Q/r_2$. Per questo motivo, a differenza di quanto accade in altri casi (ad esempio, nel caso gravitazionale) si parla spesso in modo rigoroso di *potenziale elettrostatico*, e non di *differenza di potenziale elettrostatico*. In buona sostanza, con questa affermazione si intende di conoscere il valore del potenziale in una determinata posizione dello spazio: in particolare, quando tutte le cariche elettriche che giocano un ruolo nel problema considerato sono contenute all'interno di una regione *finita* di spazio, si pone in genere *nullo il potenziale all'infinito*.

Avendo trovato il legame funzionale tra $\Delta\phi$ e campo elettrico $\vec{E}$ possiamo anche determinare la relazione "inversa". Seguendo il metodo introdotto in Par. 4.7, avremo, in generale (per il caso tridimensionale in *coordinate cartesiane*):

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\phi(x,y,z) \ , \tag{4.24}$$

dove abbiamo fatto uso dell'operatore *gradiente* introdotto prima. Ovviamente il caso unidimensionale, ad esempio supponendo di considerare il solo asse X, ha espressione più semplice: $E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx}$.

Sui problemi che riguardano il potenziale ed il campo elettrostatico avremo ampiamente modo di tornare in futuro: per il momento limitiamoci a considerare qualche semplice problema con chiari risvolti di tipo meccanico.

4.8.1 Esercizio: velocità di un protone

Un protone (carica $q = e = 1.6\times10^{-19}$ C, massa $m = 1.6\times10^{-27}$ kg) attraversa una regione ai cui estremi si misura una differenza di potenziale elettrostatico $\Delta\phi = -10$ kV (sembra un valore enorme, ma è simile a quanto si trova in un tubo catodico di televisore) che lo accelera. Di quanto aumenta la sua velocità?

Soluzione. In corrispondenza della differenza di potenziale si determina una differenza di energia potenziale elettrica di valore $\Delta U_{ele} = q\Delta\phi$; per il carattere conservativo del campo elettrico avremo che l'energia meccanica del protone deve conservarsi. Trascurando gli effetti della forza peso, assunzione del tutto ragionevole in questi casi, si ha: $0 = \Delta E_k + \Delta U_{ele} = (m/2)v_{fin}^2 - (m/2)v_{in}^2 + q\Delta\phi$. Quindi la velocità finale (al termine del tratto in cui è presente la differenza di potenziale) v_{fin} dipende dalla presenza della differenza di potenziale. Se supponiamo che la velocità iniziale del protone sia trascurabile, come spesso si verifica in molte situazioni fisiche, cioè poniamo $v_{in} = 0$, allora troviamo $v_{fin} = ((-2q\Delta\phi/m)^{1/2} \approx 1.4\times10^6$ m/s (una bella velocità!). Notate che nella nostra soluzione non abbiamo avuto alcuna necessità di conoscere i dettagli del campo elettrico nella regione di spazio considerata, in particolare di sapere la sua (eventuale) dipendenza dalle coordinate spaziali: infatti, come ben sappiamo, l'utilità dei metodi basati sui principi di bilancio energetico è proprio quella di poter prescindere da informazioni che non servono a determinare la soluzione.

4.8.2 Esercizio: l'arresto di un elettrone

Un elettrone di massa m_e e carica $q = -e$ entra con velocità iniziale v_0 diretta lungo il verso positivo dell'asse X all'interno della regione $x > 0$ in cui è presente una differenza di potenziale elettrico che varia linearmente con la posizione x secondo la legge: $\Delta\phi(x) = \phi(x) - \phi(x = 0) = \alpha x$, con α costante *positiva* opportunamente dimensionata. Quanto vale la coordinata x_{stop} a cui l'elettrone si arresta?

Soluzione. L'elettrone sarà rallentato fino all'arresto dalla forza elettrica. Infatti nella regione $x > 0$ esiste un campo elettrico $E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx} = -\alpha$ che, tenendo conto del segno della carica dell'elettrone e del verso della sua velocità iniziale, determina una *decelerazione* costante ed uniforme dell'elettrone con $a = qE/m_e = e\alpha/m_e$ (ricordate che $e < 0$!). L'istante di arresto sarà allora $t_{stop} = -v_0/a$ e la posizione di arresto sarà $x_{stop} = (a/2)t_{stop}^2 = -v_0^2 m/(2e\alpha)$. Provate ad ottenere lo stesso risultato usando la conservazione dell'energia, tenendo conto del fatto che l'energia potenziale dipende dalla posizione.