Appunti di Fisica Generale
anno accademico 2006/07

Francesco Fuso[1]
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 3, 56127 Pisa

versione 5c - 10.01.07

[1]tel. 0502214305, e-mail: fuso@df.unipi.it, web page: http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

Indice

Nota per i lettori

Questa raccolta di appunti, che nasce da lezioni di fisica generale per diversi corsi di laurea, non ha alcuna pretesa di costituire un testo per la preparazione all'esame. Infatti gli argomenti di fisica generale incontrati nel corso meriterebbero una presentazione ed una discussione molto più ricca ed articolata, quale quella che si trova nei testi di fisica di livello universitario (ed anche in molti testi per la scuola superiore). Gli studenti sono rimandati a tali testi per ogni esigenza di approfondimento.

Il senso di questi appunti, volutamente concisi, con pochi discorsi, senza tabelle e con pochissime figure[1], è soprattutto quello di fornire una sorta di "programma esteso" del corso, in modo che gli studenti possano avere una traccia da seguire nello studio dei vari argomenti.

Revisioni:

1. Versione 5, 15.10.06: prima versione completa destinata agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura;
2. Versione 5a, 19.10.06: aggiunte alcune figure, qualche esercizio e commenti minori a proposito di vettori e moto circolare;
3. Versione 5b, 30.10.06: correzioni minori ai paragrafi relativi al moto armonico;
4. Versione 5c, 10.01.07: aggiunti cap. 2–4 e revisione complessiva del testo;

[1] A fronte della scarsità di materiale proposto, sicuramente questi appunti contengono una quantità di imprecisioni ed errori di vario genere. I lettori sono **caldamente** invitati ad individuarli e a segnalarmeli, affinché possano essere corretti nelle successive versioni del testo. Eventuali problemi di impaginazione e gli errori di sillabazione sono dovuti al programma impiegato per la compilazione del testo.

Capitolo 5

Forze impulsive e collisioni

Questo capitolo ha due scopi principali: in primo luogo ci occuperemo dello studio di situazioni fisiche in cui compaiono forze intense ma di durata limitata, come negli urti e nelle collisioni; metteremo poi a punto le basi per un approccio al movimento di traslazione di corpi estesi, che svilupperemo nel prossimo capitolo. La nostra trattazione prevede di introdurre una nuova quantità vettoriale, la *quantità di moto*, e di discuterne le proprietà, in particolare quelle di conservazione, nell'interazione fra due (o più) corpi. In modo naturale passeremo poi alla definizione di *centro di massa*, strumento che troveremo di grande utilità per la dinamica dei corpi estesi.

5.1 Quantità di moto ed impulso

La **quantità di moto**, che indichiamo con $\vec{p}$, è una grandezza *vettoriale* la cui introduzione non comporta nuove leggi fondamentali, ma che, soprattutto per il suo principio di conservazione, può essere utile nella comprensione di una vasta classe di problemi e fenomeni. In particolare ci sono delle situazioni fisiche in cui l'interazione tra corpi avviene tramite forze di *intensità rilevante e durata temporale molto ridotta* (**forze impulsive**), come ad esempio negli urti e collisioni tra corpi rigidi, in cui l'impiego della quantità di moto diventa uno strumento essenziale.

La definizione di partenza per la quantità di moto di un corpo dotato di massa m e velocità $\vec{v}$ è:

$$\vec{p} = m\vec{v} \ . \tag{5.1}$$

Le dimensioni sono quelle di [massa][velocità]; non esiste un'unità di misura dedicata per questa grandezza, per cui si usano i kg m/s.

Esaminiamo come la quantità di moto è legata alle grandezze della dinamica, in particolare alla forza. Ricordiamo che la nostra definizione (operativa) di forza, basata sul principio di Newton, è $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la definizione di accelerazione come derivata temporale della velocità. Se deriviamo rispetto al tempo il primo ed il secondo membro dell'Eq. 5.1 e supponiamo che la massa del corpo non cambi con il tempo, otteniamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \; ; \tag{5.2}$$

anche se nella dimostrazione abbiamo imposto una massa costante nel tempo, questa equazione ha validità generale, e costituisce una sorta di *generalizzazione* del principio di Newton. Dunque l'applicazione di una forza produce una variazione della quantità di moto e possiamo concludere che la quantità di moto di un dato corpo *resta costante* se la sua derivata temporale è zero, cioè se la *risultante* delle forze che agisce su di esso è nulla.

Esistono alcune situazioni fisiche molto comuni in cui sono coinvolte forze impulsive. Ad esempio, quando un pallone viene spedito contro una parete abbiamo la chiara sensazione di un fenomeno che coinvolge una forza intensa (se mettete la vostra faccia al posto della parete potete facilmente rendervene conto) che dura per poco tempo, quello in cui c'è "contatto" tra pallone e parete. Formalmente possiamo integrare ambo i membri dell'Eq. 5.2, ottenendo l'equazione:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t0}^{t1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t0}^{t1} \vec{F} dt = \vec{I} \; , \tag{5.3}$$

dove $\Delta\vec{p}$ è la *variazione* della quantità di moto del corpo, $t0$ e $t1$ rappresentano l'istante iniziale e finale di applicazione della forza (per intenderci, quando "inizia" e "finisce" l'urto che stiamo considerando) e $\vec{I}$ indica una nuova grandezza *vettoriale* che ha dimensioni [forza][tempo] (l'unità di misura è la stessa della quantità di moto) alla quale diamo il nome di **impulso**.

Visto il carattere impulsivo delle forze di cui vogliamo occuparci, che ne preclude una semplice descrizione analitica, spesso conviene utilizzare il valore mediato rispetto al tempo della forza, che qui indichiamo con $< \vec{F} >$. Evitando di scendere in dettagli matematici, è intuitivo che, detto $\Delta t = t1 - t0$ l'intervallo di tempo in cui la forza agisce (cioè è significativamente diversa da zero), potremo esprimere l'integrale temporale al penultimo membro dell'Eq. 5.3 come un semplice prodotto $< \vec{F} > \Delta t$, cioè scrivere:

$$\Delta\vec{p} =< \vec{F} > \Delta t \; . \tag{5.4}$$

Quando si hanno forze impulsive, anche se $\Delta t \rightarrow 0$ può accadere che, a causa dell'elevato valore di $< \vec{F} >$, il prodotto al secondo membro dell'Eq. 5.4 sia ben diverso da zero, quindi capace di produrre effetti tutt'altro che trascurabili alla dinamica del corpo.

5.1.1 Esercizio: la forza nell'urto di un pallone

Totti spedisce un pallone (bello gonfio) di massa $m = 100$ g contro una parete rigida, in direzione ortogonale rispetto alla parete stessa. Supponendo che la velocità di incidenza abbia modulo $v_0 = 72$ km/h, e che, dopo l'urto, il pallone ritorni indietro per la stessa direzione, con una velocità di modulo $v_1 = v_0$,[1], ponendo che la durata dell'interazione

[1]Vedremo nel seguito che questa condizione è ben interpretabile fisicamente.

sia $\Delta t = 10$ ms (un valore ragionevole in questi casi), quanto vale, in modulo, la forza media $< F >$ esercitata dal pallone sulla parete?

Soluzione. Chiamiamo X la direzione ortogonale alla parete, direzione lungo la quale si svolge la dinamica dell'intero processo, che può quindi essere considerato unidimensionale. Scegliamo come positivo il verso "uscente" dalla parete: la quantità di moto iniziale del pallone, che è chiaramente diretta lungo l'asse X, vale $p_0 = -mv_0$, dove il segno negativo tiene conto dell'orientazione della velocità iniziale (il pallone si muove verso la parete!). Dopo l'urto, avremo $p_1 = mv_1 = mv_0$; quindi è $\Delta p = p_1 - p_0 = 2mv_0$ (attenzione: la quantità di moto cambia, eccome, altrimenti il pallone passerebbe attraverso la parete). La forza media esercitata dalla parete sul pallone, quella che ne fa cambiare la quantità di moto, ha allora modulo $< F_{par} >= \Delta p/\Delta t = 2mv_0/\Delta t = 72$ N, un valore non trascurabile. La forza media che il pallone esercita sulla parete è, per il terzo principio della dinamica, uguale ed opposta, per cui il suo modulo ha lo stesso valore. Notate che la nostra soluzione non permette di stabilire quali e quanti processi avvengono durante la collisione (ad esempio, il pallone tenderà probabilmente a "spiattellarsi" sulla parete, cioè a deformarsi, la superficie della parete entrerà in interazione con la superficie del pallone, attraverso meccanismi microscopici più o meno complessi, etc.), ma ugualmente riesce a darci ragione del fenomeno osservato, cioè del fatto che il pallone cambia (quasi) istantaneamente il verso del suo moto.

5.1.2 Conservazione della quantità di moto

La quantità di moto è uno strumento particolarmente utile per lo studio di *sistemi* materiali, cioè insiemi di corpi (puntiformi) che interagiscono in qualche maniera tra di loro. In generale, usando il *principio di sovrapposizione* per le grandezze vettoriali, è sempre possibile definire la *quantità di moto del sistema*:

$$\vec{p} = \Sigma_i \vec{p_i} = \Sigma_i m_i \vec{v_i} \ , \tag{5.5}$$

dove la somma è estesa a tutti i componenti del sistema, i quali hanno massa m_i, velocità $\vec{v_i}$ e quindi quantità di moto $\vec{p_i}$.

Nel seguito ci occuperemo ampiamente di sistemi *rigidi*, in cui i vari componenti mantengono costante la loro distanza relativa. Per il momento, invece, siamo più interessati ad analizzare situazioni in cui interagiscono due corpi (potrebbero essere di più, ma, per semplicità, ci limiteremo quasi sempre a coppie di elementi) che hanno la possibilità di muoversi liberamente prima e dopo l'interazione. È chiaro quindi che tratteremo problemi di *collisioni* o, come vedremo in seguito, di *frammentazioni*.

Supponiamo allora di avere due corpi di massa m_1 e m_2 che interagiscono *solo* fra di loro, per esempio tramite un urto. Chiamiamo $\vec{F}_{1,2}$ la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1, e $\vec{F}_{2,1}$ quella esercitata dal corpo 1 sul corpo 2. Per il principio di azione e reazione (il terzo principio della dinamica), che vale a prescindere dal "tipo" di interazione, queste due forze sono *uguali e opposte* in verso. Allora, se prendiamo in considerazione le variazioni delle quantità di moto dei due corpi e chiamiamo Δt la durata temporale dell'interazione, sarà:

$$\Delta \vec{p}_1 = < \vec{F}_{1,2} > \Delta t = - < \vec{F}_{2,1} > \Delta t = -\Delta \vec{p}_2 \ , \tag{5.6}$$

cioè le variazioni di quantità di moto dei due corpi sono *uguali e opposte* in verso.

A questo punto possiamo osservare che la quantità di moto *totale* del sistema, $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, ha una variazione $\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$. Quindi *la quantità di moto totale si conserva* nel processo. Il risultato trovato è generale: in ogni sistema **isolato**, cioè in cui le forze si esercitano solo tra i suoi componenti, ovvero non ci sono forze *esterne al sistema*, la quantità di moto totale si conserva.

Ponete attenzione a tre importanti aspetti della nostra affermazione. La quantità di moto è una grandezza vettoriale, ed il comportamento del sistema nelle tre direzioni (ad esempio cartesiane) dello spazio può essere ritenuto "indipendente": per intenderci, in linea di principio quello che succede nella direzione X non ha nulla a che fare con quello che succede nella direzione Y. Di conseguenza è possibile che il sistema possa essere considerato *isolato* solo in alcune direzioni, e non in altre, e allora la quantità di moto conserverà solo le sue componenti nelle direzioni in cui il sistema è isolato.

Inoltre in genere saremo interessati a stabilire la dinamica del sistema *subito dopo* l'interazione (l'urto) conoscendo alcuni dettagli di quello che si verifica *subito prima* l'interazione (l'urto): dunque nel verificare se un sistema è isolato (in qualche direzione) o meno, dovremo tenere conto del fatto che l'interazione ha una durata Δt generalmente piccola, nella quale possono avere un ruolo significativo solo forze di tipo impulsivo. Allora, come vedremo meglio con alcuni esempi, potrà verificarsi che, pur in presenza di forze esterne, un sistema possa essere considerato isolato, perché le forze considerate non sono impulsive e quindi non possono produrre variazioni (significative) della quantità di moto nella breve durata dell'urto.

Infine, è chiaro che la conservazione della quantità di moto per un sistema di diversi componenti si scrive nella forma che abbiamo appena introdotto solo se le velocità dei vari componenti sono riferite allo stesso riferimento; talvolta, come vedremo, risulta più pratico impiegare sistemi di riferimento diversi. In questi casi è ovviamente necessario porre attenzione a convertire le grandezze che compaiono nel problema in modo da riferirsi sempre allo stesso sistema.

5.1.3 Esercizio: il rinculo

Un tiratore al piattello spara un proiettile di massa $m_p = 4.0$ g che lascia il fucile con velocità $v = 250$ m/s (misurata rispetto al suolo). Sapendo che l'insieme dei processi chimico-fisici che portano all'espulsione del proiettile (percussione della cartuccia, esplosione, sparo, etc) avvengono in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ ms, quanto vale in modulo la forza media $< F >$ di rinculo sulla spalla del tiratore?

Soluzione. Il sistema costituito da proiettile e fucile può essere considerato un sistema isolato ai fini del processo di sparo; in effetti sul sistema agisce sicuramente una forza esterna, la forza peso dei vari componenti, ma la forza peso non può avere carattere impulsivo, e quindi può essere trascurata. In alternativa, potremmo ragionare supponendo che la traiettoria di tiro sia orizzontale, e limitarci a considerare la conservazione della

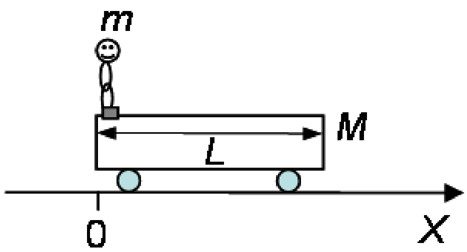


Figura 5.1: Rappresentazione schematica dell'esercizio con l'omino che si muove sopra un carrello.

quantità di moto in questa direzione, in cui non agiscono forze esterne. La quantità di moto totale all'inizio vale zero, dato che sia proiettile che fucile sono fermi. Pertanto la quantità di moto totale *subito dopo lo sparo* deve anche essere nulla, cioè $0 = \vec{p}_p + \vec{p}_f$, avendo indicato con $\vec{p}_p = m_p \vec{v}_p$ la quantità di moto del proiettile e con $\vec{p}_f$ quella del fucile. Quindi il fucile acquista una quantità di moto che vale, in modulo, $p_f = m_p v_p$. Poiché il fucile era fermo prima dello sparo, questa rappresenta anche la variazione della quantità di moto del fucile, che, come abbiamo visto, può essere espressa come $< F > \Delta t$. Allora la soluzione è, in modulo, $< F >= m_p v_p / \Delta t$, che numericamente vale 100 N una forza tutt'altro che trascurabile (corrisponde al peso di una massa da circa 10 kg).

5.1.4 Esercizio: camminare sul carrello

Un omino di massa $m = 50$ kg si trova, in quiete, in piedi sull'estremo di un carrello, di lunghezza $L = 5.0$ m e massa $M = 200$ kg, che può scorrere senza attrito su un piano orizzontale, come rappresentato in Fig. 5.1. Ad un dato istante l'omino si mette in movimento e raggiunge l'estremo opposto del carrello avendo velocità di modulo $v' = 0.50$ m/s (misurata rispetto al carrello). Quanto vale in questo stesso istante il modulo della velocità V del carrello? (Considerate l'omino come un corpo puntiforme!)

Soluzione. Questo problema tratta una situazione fisica molto divertente: a tutti sarà capitato di salire su qualcosa che assomiglia ad un carrello e di mettercisi a camminare sopra. Tutti sappiamo che in queste condizioni il carrello (o quello che è) si mette in movimento in verso opposto. La causa fisica del movimento è l'interazione tra l'omino, per meglio dire i piedi dell'omino, ed il carrello, cioè è legata a forze di attrito tra i due componenti del sistema. Infatti probabilmente qualcuno avrà provato a camminare sopra un carrello insaponato, cioè con una superficie a basso attrito, e si sarà facilmente reso conto che in questo caso è molto più difficile spostarsi. Detto X un asse di riferimento orizzontale, centrato nella posizione iniziale dell'omino, come in figura, è chiaro che il sistema omino e carrello è *isolato* in questa direzione. Notate che in questo problema le forze di interazione (appunto, l'attrito) non hanno necessariamente carattere impulsivo, e d'altra parte lo spostamento che stiamo considerando avviene in un intervallo di tempo non necessariamente breve. Comunque, nella direzione orizzontale non ci sono forze esterne, e quindi la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema, p_x, si deve conservare. Altrettanto non può dirsi della componente verticale, dato che in direzione verticale ci sono forze esterne al sistema (la forza peso, la reazione vincolare del suolo sul carrello), però sappiamo bene che in direzione verticale non c'è spostamento, e quindi il problema è di fatto unidimensionale (tutto avviene lungo X).

Per la conservazione della quantità di moto in direzione orizzontale avremo $p_{x,0} = p_{x,1}$, avendo indicato con il pedice 0 la situazione iniziale (quando tutto è fermo) e con 1 quella in cui l'omino ha raggiunto l'estremo del carrello (si è mosso sopra a questo per un tratto $\Delta x' = L$). Inizialmente tutto è fermo e quindi $p_{x,0} = 0$. All'istante "finale" del nostro problema è $p_{x,1} = mv_x + MV_x$. Sappiamo che la velocità "finale" dell'omino *misurata rispetto al carrello* vale, in modulo, v'; ricordando la legge di composizione delle velocità, e quindi tenendo conto del fatto che il carrello si muove rispetto al sistema di riferimento che stiamo usando, che è solidale al suolo, con velocità V_x, avremo $v_x = v' + V_x$. Sostituendo e tenendo conto della conservazione della quantità di moto avremo: $0 = mv' + (m+M)V_x$, cioè $V_x = -v'm/(m+M)$, dove il segno negativo tiene in debito conto il fatto che il carrello si muove in verso opposto all'omino. Il modulo di questa velocità è $V = v'm/(m+M) =$ 0.10 m/s. Osservate che, se il carrello fosse molto più pesante dell'omino (cioè $M >> m$), allora questa velocità tenderebbe a zero, come suggerisce il buon senso.

5.1.5 Esercizio: un piano inclinato a rotelle

Poniamo una massa m sulla sommità di un piano inclinato di altezza h, su cui essa può scivolare senza attrito. A differenza dei tanti problemi che abbiamo affrontato finora con piani inclinati e simili, stavolta immaginiamo che il piano inclinato, che ha massa M, non sia fisso, ma che possa muoversi senza attrito su un piano orizzontale (ad esempio perché dotato di rotelle ben lubrificate). Ad un dato istante la massa viene lasciata scendere lungo il piano con velocità iniziale nulla. Quanto vale, in modulo, la velocità V del piano inclinato nell'istante in cui la massa m raggiunge la sua base? (Per semplicità, supponiamo che il piano inclinato termini con un breve tratto orizzontale anch'esso senza attrito, come rappresentato in Fig. 5.1.5; quindi la massa m avrà, al termine del piano, velocità diretta *orizzontalmente*)

Soluzione. Il sistema composto da massa e piano inclinato è isolato in direzione orizzontale, dato che non ci sono forze esterne con componenti in questa direzione. Dunque la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema, che inizialmente è nulla (tutto è fermo), rimane costantentemente nulla. All'istante "finale" del nostro fenomeno, quando la massa m ha raggiunto la base del piano inclinato, tutte le velocità hanno direzione orizzontale, secondo quanto dichiarato nel testo. Quindi, con ovvio significato dei termini, e riferendoci ad un asse X orizzontale, dovrà essere: $0 = mv_x + MV_x$. D'altra parte, non essendoci forze dissipative, l'energia meccanica (totale!) del sistema dovrà conservarsi. Tenendo conto dell'energia potenziale iniziale della massa m (che si trova, all'inizio, alla quota h), avremo $mgh = (m/2)v_x^2 + (M/2)V_x^2$, dove abbiamo nuovamente usato la circostanza che le velocità "finali" hanno solo componente orizzontale (così non fosse dovremmo mettere anche le componenti verticali) ed abbiamo

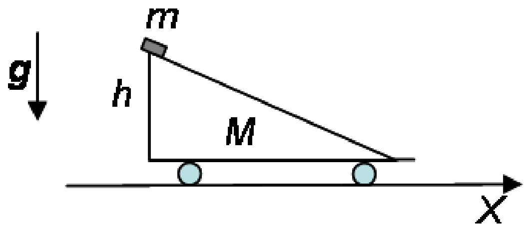


Figura 5.2: Rappresentazione schematica dell'esercizio riguardante la discesa di un corpo di massa m su un piano inclinato di massa M libero di muoversi in direzione orizzontale: al termine del piano si trova un breve tratto orizzontale, come descritto nel testo.

debitamente considerato l'energia cinetica del piano inclinato. Abbiamo quindi un sistema di due equazioni con le due incognite v_x e V_x; usando un po' di algebra si ottiene $V_x = -(m/M)^{1/2}(2mgh/(m+M))^{1/2}$ e $v_x = -(M/m)V_x = (M/m)^{1/2}(2mgh/(m+M))^{1/2}$, dove la scelta dei segni indica che i due corpi si muovono in verso opposto (ed abbiamo scelto come positivo quello verso cui si muove la massa m). È facile verificare che nel caso $M >> m$ $V_x \rightarrow 0$ e $v_x \rightarrow \sqrt{2gh}$, cioè si ritrova la nota soluzione ottenuta supponendo fisso il piano inclinato (se la sua massa è molto grande, se ne rimane fermo!).

5.1.6 Esercizio: la propulsione del razzo

La propulsione di un razzo nello spazio interplanetario, cioè in assenza di atmosfera, è un classico esempio di applicazione della conservazione della quantità di moto. Il movimento del razzo, infatti, avviene in seguito al rilascio di propellente, in un meccanismo che si chiama di moto *a reazione*. La derivazione della legge oraria del moto di un razzo è obiettivo che richiede l'uso di strumenti matematici un po' complicati, e quindi ci limitiamo ad un esercizio relativamente semplice. Supponiamo che un razzo abbia, ad un dato istante, massa M_0 e velocità $\vec{V_0}$. I motori vengono accesi ed il propellente viene espulso dal razzo nella stessa direzione del suo moto ma con *verso opposto*, con una velocità *relativa* al razzo che ha modulo costante v. Quanto vale, in modulo, la velocità V' del razzo quando è stata "bruciata" (cioè è stata espulsa) una quantità M' di propellente?

Soluzione. Il sistema razzo e propellente è evidentemente isolato, poiché non esistono altre forze al di fuori di quelle, interne al sistema, che provocano la fuoriuscita del propellente (per esempio, le forze che hanno a che fare con la sua combustione o con qualche altro meccanismo). Inoltre il problema è unidimensionale, dato che la direzione di moto e quella di espulsione del propellente coincidono (il verso è opposto). La quantità di moto del sistema si deve conservare; consideriamo un breve intervallo di tempo durante il quale viene espulsa una piccola quantità di propellente, di massa ΔM; prendendo come "finale" l'istante in cui questa piccola quantità di massa è stata espulsa, avremo: $\Delta p = p_r + p_p - p_0$, dove abbiamo considerato le componenti della quantità di moto del razzo e del propellente al termine di questo breve intervallo, chiamandole con il pedice r e p, rispettivamente, e abbiamo indicato la quantità di moto "iniziale" con il pedice

0. Esplicitiamo i vari termini per una scelta generica dell'istante iniziale, quando si suppone che il razzo abbia massa $(M + \Delta M)$ e velocità V (generiche): $p_0 = (M + \Delta M)V$, $p_r = M(V + \Delta V)$, $p_p = \Delta M(V - v)$, dove abbiamo tenuto conto del fatto che all'istante "finale" per questo breve processo una quantità ΔM di propellente è stata espulsa con velocità relativa v, cioè con velocità $(V + v)$ misurata nello stesso sistema di riferimento in cui è misurata la velocità del razzo; inoltre abbiamo espresso con ΔV la variazione di velocità del razzo. La conservazione della quantità di moto per questo breve intervallo di tempo si scrive allora:

$$0 = \Delta p = M(V + \Delta V) + \Delta M(V + v) - (M + \Delta M)V = M\Delta V - \Delta M v \ . \tag{5.7}$$

Passiamo ora a considerare processi di durata molto molto piccola, cioè inifinitesima. In simili processi le variazioni di massa e velocità del razzo sono anche infinitesime, cioè al posto di ΔM scriveremo dM e al posto di ΔV scriveremo dV. Con un po' di manipolazioni algebriche, l'Eq. 5.7 diventa $MdV + vdM = 0$, ovvero, portando i vari elementi al primo e al secondo membro:

$$dV = -v\frac{dM}{M} \ . \tag{5.8}$$

La soluzione si ottiene adottando il metodo che già abbiamo incontrato per le equazioni differenziali *a variabili separabili* in Par. 3.9.9. In sostanza si integra al primo ed al secondo membro, ottenenendo, usando la terminologia del testo dell'esercizio: $\Delta V = V' - V_0 = -v(\ln(\frac{M_0 - M'}{M_0}))$.

5.2 Urti elastici ed anelastici

La nostra esperienza con i processi di urto ci suggerisce che la loro effettiva dinamica può essere influenzata da condizioni che, per il momento, non abbiamo ancora considerato. Ad esempio, se vogliamo palleggiare con un pallone da basket (il processo consiste nell'urto del pallone con il parquet della palestra), sappiamo bene che le cose cambiano a seconda che il pallone sia bello gonfio, oppure no. Analogamente, il nostro gattino si divertirà un mondo se lo facciamo giocare con una "pallina magica", godrà molto di meno se gli diamo una pallina che "non rimbalza" (dovrà trovarsi un giochino più complicato che non il semplice inseguire la pallina dopo l'urto contro una parete rigida!). Queste osservazioni sono la manifestazione del carattere più o meno *elastico* (o più o meno *anelastico*) della collisione considerata.

Per definizione, si dice totalmente **elastico** un processo di urto in cui si conserva l'energia *cinetica* totale del sistema; totalmente **anelastico** quello in cui l'energia cinetica non si conserva affatto. Esiste poi la possibilità di urti con caratteristiche intermedie.

Prendiamo come esempio proprio quello del pallone da basket che, lasciato da una certa altezza, rimbalza sul parquet, supponendo per semplicità che il movimento avvenga in direzione ortogonale al pavimento (il caso più generale sarà trattato nell'Es. 5.2.1). Se il pallone è ben gonfio, sappiamo che l'altezza raggiunta dopo il rimbalzo è simile (di poco inferiore) a quella di partenza; tenendo conto della conservazione dell'energia meccanica, questo indica che l'energia *cinetica* del corpo (subito) dopo l'urto è indentica[2] a quella (subito) prima dell'urto, che allora si dice totalmente *elastico*. Se per esempio il pallone fosse sgonfio o, magari, riempito di sabbia, o fatto di legno, sicuramente questa affermazione sarebbe falsa. Addirittura possiamo facilmente pensare a casi in cui il corpo, una volta raggiunto il pavimento, vi rimane attaccato (un pallone fatto di chewing-gum è un buon esempio!).

Se ragioniamo in termini di bilancio energetico, è ovvio che in tutti quei casi in cui "il rimbalzo non è perfetto", cioè quando l'urto è *anelastico*, dobbiamo ipotizzare dei meccanismi che sottraggono energia. Come al solito, la nostra rappresentazione dell'urto si basa su *modelli* macroscopici, e quindi non abbiamo molte possibilità di generalizzare i tanti fenomeni di base che possono essere coinvolti; però, ad esempio, per il pallone sgonfio possiamo immaginare che parte dell'energia cinetica posseduta dal corpo prima dell'urto venga trasferita in energia elastica (di deformazione) del pallone. Infatti, quando un pallone sgonfio urta con una parete, è facile pensare che l'interazione tra la sua superficie e la parete stessa duri un tempo sufficientemente lungo perché la sua struttura possa essere modificata, e quindi l'energia possa essere dissipata attraverso un qualche meccanismo legato alla deformazione e risultante, alla fine, in un qualche aumento di temperatura (o altro processo dissipativo).

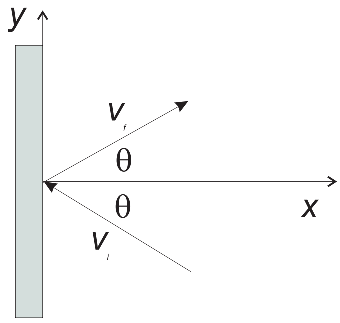
Sottolineiamo che la domanda interessante da porsi riguarda la conservazione, o meno, della *sola* energia cinetica dell'intero sistema, e non della sua energia meccanica. Infatti è proprio l'energia cinetica ad essere legata direttamente alle variabili dinamiche del sistema (la velocità dei vari componenti), e quindi alla quantità di moto. Non è difficile trovare la relazione che lega energia cinetica e quantità di moto: per un corpo che ha quantità di moto $\vec{p}$, l'energia cinetica si esprime come $E_k = |\vec{p}|^2/(2m) = p^2/(2m)$. Osservate bene che il carattere delle due grandezze considerate è ben diverso: la quantità di moto è un vettore, l'energia cinetica uno scalare.

5.2.1 Esercizio: il pallone (ben gonfio) contro la parete

Svolgiamo l'esercizio del pallone (ben gonfio!) di massa m tirato contro la parete (rigida ed indeformabile), supponendo stavolta che l'incidenza non avvenga in direzione ortogonale alla parete, come in Es. 5.1.1; in particolare, chiamiamo v_i il modulo della velocità prima dell'urto e poniamo che il vettore velocità sia diretto in modo da formare un angolo θ (generico, non necessariamente nullo) rispetto alla direzione ortogonale alla parete. La situazione è raffigurata in Fig.5.3. Quanto vale, in modulo e direzione, la velocità finale v_f subito dopo l'urto?

Soluzione. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano XY con l'origine coincidente con il punto di impatto, e prendiamo l'asse Y parallelo alla superficie. In base al testo dell'esercizio, il moto avviene su questo piano. La velocità iniziale $\vec{v_i}$ avrà componenti $v_{i,x}$ e $v_{i,y}$. Disegnando il sistema di riferimento come in figura, si ha $v_{i,x} < 0$ e $v_{i,y} > 0$. La trigonometria stabilisce i valori delle componenti a partire dal modulo v_i e dall'angolo θ.

[2]Con un vero pallone da basket un po' di energia viene sempre persa, ma comunque esistono processi reali in cui tali perdite sono assolutamente trascurabili.



[h!]

Figura 5.3: Rappresentazione schematica dell'urto di un pallone contro una parete. Sono indicate tutte le variabili (angolo di incidenza, sistema di riferimento, etc.) rilevanti per la soluzione del problema riportato nel testo.

Si ha $v_{i,x} = -v_i \sin\theta$ e $v_{i,y} = v_i \cos\theta$. L'esercizio richiede di determinare le componenti $v_{f,x}$ e $v_{f,y}$ della velocità subito dopo l'urto. Consideriamo il problema usando gli strumenti che abbiamo appena messo a punto; in particolare vediamo il fenomeno come una collisione fra i due elementi del sistema costituito da parete e pallone. La parete rimane sempre ferma (la sua velocità è nulla sia all'inizio che alla fine del processo collisionale, a meno di non tirare una cannonata). L'interazione fra i due componenti coinvolge la forza che si esercita fra parete e pallone all'atto dell'urto. Questa forza può essere considerata parente prossima della forza di reazione vincolare che abbiamo più volte incontrato in precedenza: pertanto essa è attesa avere solo *componente ortogonale* alla superficie della parete; inoltre essa è evidentemente interna al sistema, però il sistema nel suo complesso *non può* essere considerato come isolato. Infatti, mentre il pallone cambierà la sua dinamica in seguito all'urto, la parete resta sempre ferma, e quindi deve necessariamente risentire di un'altra forza, di carattere impulsivo, uguale ed opposta alla forza che il pallone esercita su di essa. È facile individuare questa forza nei meccanismi che tengono legata la parete al "resto del mondo" (ad esempio, le fondamenta). Dunque, il sistema *non è* isolato in direzione X, e quindi la quantità di moto totale lungo questa direzione non resta inalterata: essendo sempre nulla quella della parete, quella del pallone deve cambiare, come già preannunciato nell'Es. 5.1.1.

Invece, nella direzione parallela alla parete, la direzione Y del nostro riferimento, il sistema *è* isolato: infatti, anche se ci fossero altre forze esterne, come ad esempio la forza peso, esse, non avendo carattere impulsivo, non potrebbero avere effetti sulla dinamica collisionale (siamo infatti interessati a studiare il moto del pallone *subito dopo l'urto*, e forze non impulsive non "hanno il tempo" per produrre effetti). Quindi la componente Y della quantità di moto totale resta inalterata, e, tenendo conto che la parete resta sempre ferma e che il pallone non modifica la sua massa durante l'urto, possiamo concludere $v_{i,y} = v_{f,y}$.

Come vedete, la conservazione della quantità di moto da sola non è sufficiente a risolvere questo problema; rivolgiamoci allora all'analisi dell'energia cinetica. È chiaro che l'urto che stiamo analizzando è da considerare di tipo *elastico* (il pallone è gonfio e la parete rigida), e possiamo ragionevolmente supporre che l'energia cinetica del sistema si conservi. Essendo la parete sempre ferma, possiamo scrivere $(m/2)v_i^2 = (m/2)(v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2) = (m/2)v_f^2 = (m/2)(v_{f,x}^2 + v_{f,y}^2)$, cioè, tenendo conto di quanto sopra affermato: $v_{f,x} = \pm v_{i,x}$, dove il doppio segno nasce dalle proprietà dell'elevazione al quadrato. L'ambiguità sul segno si risolve facilmente: se valesse il segno positivo, allora le componenti ortogonali della velocità dopo e prima dell'urto sarebbero le stesse, cioè il pallone passerebbe attraverso la parete mantenendo indisturbato il suo stato di moto. La soluzione corretta è, chiaramente, quella con il segno negativo, e quindi abbiamo dimostrato che in un urto *elastico* tra una parete rigida e fissa ed un oggetto, il segno della componente ortogonale della velocità dell'oggetto stesso cambia di segno. In altre parole, l'angolo θ' che la velocità finale forma con la direzione ortogonale alla parete è uguale all'angolo θ di incidenza, come si dimostra facilmente. Si può in modo sintetico affermare che, per un urto elastico da parete rigida, si ha *riflessione speculare* del corpo che incide sulla parete stessa[3].

5.2.2 Esercizio: pesce grande mangia pesce piccolo

Un pesciolino di massa m si muove con velocità v. Alle sue spalle arriva un pesciolone di massa M che si muove nella stessa direzione e verso del pesciolino con velocità V (evidentemente $V > v$). Quando il pesciolone raggiunge il pesciolino, apre la bocca e se lo mangia. Quanto vale la sua velocità V_f subito dopo questo evento (nefasto per il pesciolino)?

Soluzione. Questo problema può essere considerato come un urto *completamente anelastico*: il sistema, che inizialmente è costituito dai due pesci separati, alla fine comprende solo un elemento, di massa $m + M$, che viaggia a velocità V_f. Non possiamo quindi utilizzare la conservazione dell'energia cinetica, ma dobbiamo sfruttare la conservazione della quantità di moto totale, che in questo caso (unidimensionale) si scrive: $mv + MV = (m + M)V_f$, da cui $V_f = (mv + MV)/(m + M)$.

5.2.3 Esercizio: il crash test

In un crash test, un'automobile di massa $m = 1.0 \times 10^3$ kg viene lanciata a velocità $v = 36.0$ km/h contro una barriera fissa ed indeformabile. Si osserva che, subito dopo l'impatto, l'auto "rimbalza" e si muove nella stessa direzione e verso opposto a quello di incidenza sulla barriera con velocità $V = 3.6$ km/h. Quanta energia è stata "assorbita" dalla "cellula di sopravvivenza" dell'automobile?

[3] In meccanica quantistica, la radiazione luminosa può essere interpretata in chiave *corpuscolare*: in questo ambito, un raggio di luce può essere visto come un fascio di particelle, dette *fotoni*. Queste particelle hanno delle caratteristiche peculiari, ad esempio non hanno massa, ma presentano ugualmente una quantità di moto ed un energia cinetica ben definite. La riflessione speculare di un raggio di luce, che si ha ad esempio quando il raggio viene inviato su uno specchio (di buona qualità), può essere interpretata come un urto elastico (o quasi) tra i fotoni del fascio e la superficie. Quanto descritto nell'esercizio del testo spiega allora la nota proprietà della riflessione luminosa, in cui angolo di incidenza ed angolo di riflessione sono uguali.

Soluzione. In questo esempio si ha a che fare con un urto in cui non si conserva la quantità di moto totale. Infatti la barriera, dovendo rimanere fissa, deve evidentemente subire una forza *esterna* che annulla gli effetti della forza di interazione collisionale. D'altra parte, se così non fosse, dopo il rimbalzo l'automobile dovrebbe muoversi con una velocità di modulo pari alla velocità prima dell'impatto. Neanche l'energia cinetica totale si conserva: la sua variazione vale $\Delta E_{kin} = (m/2)(V^2 - v^2) = -3.96 \times 10^3$ J, che rappresenta proprio l'energia assorbita dalla carrozzeria durante l'urto.

5.2.4 Esercizio: vagoncini agganciati

Un vagoncino di un trenino, che ha massa $m = 40$ g e si muove senza attrito a velocità $v_0 = 10$ cm/s, urta un vagoncino analogo, inizialmente fermo sui binari. Dopo l'urto i due vagoncini restano agganciati fra loro, e si muovono a velocità V. Quanto vale V? Quanto vale la variazione di energia cinetica ΔE_k dell'intero sistema?

Soluzione. Per la conservazione della quantità di moto, che inizialmente vale $p_0 = mv_0$, deve essere $mv_0 = (m+m)V$, da cui $V = v_0/2 = 5.0$ cm/s. L'energia cinetica dell'intero sistema non si conserva, essendo l'urto perfettamente anelastico. Si ha infatti: $\Delta E_k = ((m+m)/2)V^2 - (m/2)v_0^2 = -(m/4)v_0^2 = -E_{k,0}/2 = -0.25$ J, dove il segno negativo indica che parte dell'energia cinetica iniziale è stata convertita in altra forma per creare il "legame" tra i due vagoncini.

5.2.5 Esercizio: vagoncini e respingente

Questo esercizio è simile all'Es. 5.2.4, ma qui immaginiamo che tra i due vagoncini si trovi un "respingente", cioè una molla di costante elastica k disposta con il suo asse lungo la direzione del moto dei vagoncini. Inizialmente la molla è alla sua lunghezza di riposo; quanto vale la *massima* compressione Δ che essa subisce nel processo?

Soluzione. Il fenomeno di urto che qui si considera è piuttosto complicato da descrivere nel suo complesso, dato che la molla comincerà a comprimersi non appena si instaura un contatto fra i vagoncini, e poi, dopo aver raggiunto la massima compressione, tornerà ad elongarsi dando luogo ad una dinamica che non può essere descritta in modo semplice. Tuttavia la condizione di massima compressione può essere facilmente individuata: infatti essa corrisponde all'istante in cui i due vagoncini si muovono *alla stessa velocità*. Se così non fosse, allora i due vagoncini avrebbero una velocità relativa diversa da zero e, quindi, si starebbero avvicinando o allontanando, cioè la molla non sarebbe alla sua massima compressione. Fatta questa osservazione, la soluzione diventa semplice: in queste condizioni l'urto può essere considerato completamente anelastico (i vagoncini hanno la stessa velocità) e la differenza di energia cinetica del sistema, il ΔE_k prima calcolato, è interamente convertito in energia elastica, cioè è $\Delta E_k = \Delta U_{ela} = (k/2)\Delta^2$. Da questa equazione si può agevolmente trovare il valore di Δ richiesto.

5.2.6 Urti centrali e non centrali

La discussione dell'energia cinetica nell'urto (se si conserva, o no) è generalmente essenziale per la soluzione di quei problemi in cui tutti e due i corpi che urtano sono liberi di muoversi. Tuttavia alucni problemi richiedono di dare ulteriori specifazioni se si vuole ottenere una soluzione completa. Prendiamo per esempio due biglie di biliardo[4] che sbattono l'una contro l'altra. A meno di non immaginare fenomeni in cui una, o tutte e due le biglie, si staccano dal piano del biliardo, fenomeni che sono in genere indesiderati dai giocatori, il problema ha un evidente carattere bidimensionale. Normalmente, in problemi di questo tipo si vuole conoscere la velocità delle biglie (subito) dopo l'urto conoscendo quella (subito) prima l'urto. Supponendo ragionevolemente che la quantità di moto del sistema delle due biglie si conservi *vettorialmente* nel processo, la condizione $\Delta\vec{p} = 0$, ci dà la possibilità di scrivere *due* equazioni indipendenti (una per ogni direzione del piano del biliardo). Sapere che l'urto è elastico, come è ragionevole in questi casi, aggiunge un'ulteriore equazione per i *moduli quadri* delle velocità. Le incognite del problema, però, sono *quattro*; quindi la soluzione completa può essere scritta solo se si aggiunge una qualche ulteriore condizione, per esempio sulla *direzione* delle velocità dopo l'urto.

Infatti, come sanno i giocatori di biliardo, in seguito all'urto le biglie possono assumere velocità che hanno diverse direzioni, che dipendono in modo piuttosto complicato dalla distanza tra le direzioni dei vettori che rappresentano le velocità iniziali delle due biglie, grandezza che si definisce **parametro di impatto**. Esiste un importante sottoinsieme di fenomeni collisionali (generalmente corrispondenti a parametri di impatto nulli) nei quali le velocità coinvolte nel processo hanno *tutte la stessa direzione*. Fenomeni di questo tipo si chiamano **urti centrali**, e la possibilità di risolverli è dovuta al fatto che essi si riconducono facilmente a problemi *unidimensionali*.

5.2.7 Esercizio: urto centrale tra biglie

Avete due biglie da biliardo, di massa m_1 e m_2 (non necessariamente uguale fra loro) che hanno velocità iniziale rispettivamente $\vec{v}_{1,i}$ e $\vec{v}_{2,i}$ che appartengono alla *stessa direzione* (evidentemente esse devono avere segni opposti tra loro affinché possa esserci impatto). Quanto valgono le velocità finali $\vec{v}_{1,f}$ e $\vec{v}_{2,f}$ supponendo che l'urto sia perfettamente elastico e sia *centrale*, cioè che anche le velocità finali appartengano alla stessa direzione di quelle iniziali?

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che l'urto fra biglie del biliardo è ragionevolmente elastico; infatti i corpi sono molto rigidi ed indeformabili e "non c'è tempo" sufficiente perché l'energia cinetica possa essere dissipata in qualche forma. La conservazione dell'energia cinetica totale impone: $(m_1/2)v_{1,i}^2 + (m_2/2)v_{2,i}^2 = (m_1/2)v_{1,f}^2 + (m_2/2)v_{2,f}^2$. La conservazione della quantità di moto totale, scritta nella direzione delle velocità, dice

[4] Nel biliardo si ha sicuramente a che fare con oggetti, le biglie, che *rotolano* oltre che, eventualmente, scivolare. Non abbiamo ancora trattato questa tematica, ma comunque saremo in grado di dimostrare che le affermazioni fatte in questo paragrafo sono giuste anche in caso di rotolamento (a patto di considerare il moto di un punto particolare della biglia, il *centro di massa*. Quindi possiamo servirci di esempi di questo tipo già in questa fase del nostro studio.

invece: $m_1v_{1,i} + m_2v_{2,i} = m_1v_{1,f} + m_2v_{2,f}$. Queste sono due equazioni indipendenti che consentono di determinare le due incognite $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$. Per trovare la soluzione dobbiamo "lavorare" di algebra. Nella conservazione dell'energia togliamo il fattore 1/2 che compare a moltiplicare tutti i termini, e riscriviamo l'equazione in questa forma: $m_1(v_{1,f}^2 - v_{1,i}^2) = m_2(v_{2,i}^2 - v_{2,f}^2)$. Ricordando che il binomio generico $(a^2 - b^2)$ può essere scomposto nel prodotto $(a - b)(a + b)$, scriviamo la stessa equazione nella forma: $m_1(v_{1,f} - v_{1,i})(v_{1,f} + v_{1,i}) = m_2(v_{2,i} - v_{2,f})(v_{2,i} + v_{2,f})$. D'altra parte anche l'equazione che esprime la quantità di moto può essere riscritta come: $m_1(v_{1,f} - v_{1,i}) = m_2(v_{2,i} - v_{2,f})$. Sostituendo nell'altra equazione si ha: $v_{1,f} + v_{1,i} = v_{2,i} + v_{2,f}$, ovvero $v_{1,f} - v_{2,f} = v_{1,i} - v_{2,i}$, cioè la velocità *relativa* di allontanamento dopo l'urto è uguale alla velocità *relativa* di avvicinamento prima dell'urto.

Operando ancora con passaggi algebrici, quelli che ordinariamente si impiegano per la soluzione dei sistemi algebrici lineari, si ottiene:

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2v_{2,i}}{m_1 + m_2} \tag{5.9}$$

$$v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1v_{1,i}}{m_1 + m_2}\,. \tag{5.10}$$

Vediamo qualche caso particolare. Se $m_1 = m_2$ si ottiene subito che $v_{1,f} = v_{2,i}$ e $v_{2,f} = v_{1,i}$, cioè le due palline si "scambiano" fra loro le velocità. Se, inoltre, una delle due palline è inizialmente ferma, per esempio $v_{1,i} = 0$, allora essa si mette in movimento con la velocità che l'altra aveva prima dell'urto, mentre l'altra pallina si ferma. Provate da soli a vedere qual è il comportamento di urti in cui le palline hanno masse sensibilmente differenti tra loro: vedrete che il comportamento tende a quello già discusso dell'urto con una parete fissa.

5.2.8 Esercizio: un urto non centrale

Avete sempre la solita coppia di biglie, di massa m_1 ed m_2. Per semplificare i conti, supponiamo stavolta che $m_1 = m_2 = m$ e che la velocità iniziale di una delle due biglie sia nulla, cioè, ad esempio, $\vec{v}_{2,i} = 0$, mentre $v_{1,i} = 0.70$ m/s (in modulo). L'urto è elastico ma non centrale: si sa infatti che dopo l'urto la biglia 1 si muove in una direzione che forma un angolo $\theta_1 = \pi/4$ rispetto alla direzione della sua velocità iniziale, come mostrato in Fig. 5.4. Quanto valgono, in modulo, $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$? Quanto vale l'angolo θ_2 formato dalla direzione di moto della biglia 2 dopo l'urto (misurata rispetto alla direzione di $\vec{v}_1$)?

Soluzione. Chiamiamo asse X la direzione di $\vec{v}_{1,i}$, ed asse Y una direzione perpendicolare a questa ed appartenente al piano su cui si muovono le biglie. La conservazione dell'energia cinetica del sistema ci dice che $(m/2)v_{1,i}^2 = (m/2)v_{1,f}^2 + (m/2)v_{2,f}^2$. Il sistema è ovviamente isolato nelle due direzioni rilevanti e si può allora scrivere la conservazione delle due componenti della quantità di moto del sistema attraverso le seguenti due equazioni indipendenti (rispettivamente per le direzioni X ed Y): $mv_{1,i} = mv_{1,f}\cos\theta_1 + mv_{2,f}\cos\theta_2$ e $0 = mv_{1,f}\sin\theta_1 - mv_{2,f}\sin\theta_2$, dove il segno negativo è dovuto alla geometria del sistema (vedi figura - si intende che abbiamo espresso le velocità in *modulo*). Abbiamo quindi

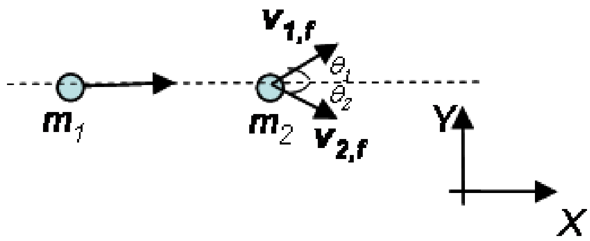


Figura 5.4: Rappresentazione schematica dell'esercizio riguardante un urto non centrale tra biglie (supposte corpi puntiformi) discusso nel testo.

a disposizione tre equazioni indipendenti per le tre incognite del problema, che quindi, avendo specificato come dato noto il valore di θ_1, risulta risolubile. La soluzione è un po' complicata dal punto di vista algebrico, però, grazie ai particolari valori numerici adottati nel testo, si ottiene con qualche passaggio: $v_{1,f} = v_{2,f} = v_{1,i}/\sqrt{2} \approx 0.50$ m/s, e $\theta_2 = \theta_1 = \pi/4$.

5.2.9 Esercizio: l'assalto di Zorro

Zorro, che ha massa $m = 100$ kg (è un po' in sovrappeso), cavalcando a velocità $v_0 = 3.6$ km/h affianca una diligenza, che ha massa $M = 5.0 \times 10^2$ kg ed una velocità iniziale analoga (in direzione, verso e modulo) a quella di Zorro. Zorro decide di saltare sulla diligenza, e per farlo spicca un salto tale da imprimergli una velocità di modulo $v' = 3.0$ m/s rispetto al suo cavallo (che continua a muoversi con la stessa velocità iniziale) orientata in direzione ortogonale a quella del cavallo e della diligenza. Giunto sulla diligenza, ci rimane in piedi. Quanto vale, in modulo, direzione e verso, la velocità $\vec{V}$ del sistema Zorro e diligenza? (Supponete che questa velocità sia completamente determinata dalla collisione con Zorro, cioè che tutti i corpi che costituiscono il sistema si comportino come oggetti puntiformi che si muvono senza attrito su di un piano)

Soluzione. Nonostante il testo sia un po' involuto, vogliamo occuparci di un semplice processo di urto completamente anelastico (Zorro rimane sulla diligenza). Supponiamo che il sistema sia isolato in tutte e due le direzioni di interesse, cioè quella delle velocità iniziali (che chiamiamo asse X) ed una direzione ortogonale a questa (che chiamiamo asse Y). Quindi la quantità di moto si conserva in tutte e due queste direzioni, e possiamo scrivere per la direzione X: $mv_0 + Mv_0 = (m+M)V_x$; per la direzione Y, notando che Zorro ha velocità di modulo v' lungo questa direzione: $mv' = (m+M)V_y$. Si osserva immediatamente che $V_x = v_0$, mentre $V_y = v'm/(m+M)$, per cui, in modulo, $V = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} = (v_0^2 + v'^2 m^2/(m+M)^2)^{1/2} \approx 1.1$ m/s ≈ 4.0 km/h.

5.3 Centro di massa per sistemi discreti

Il centro di massa e le leggi che ad esso si riferiscono sono uno strumento basilare per la descrizione del moto di sistemi non puntiformi ed avremo modo di tornare su questo argomento nel seguito. Anticipiamo ora la definizione di **posizione del centro di massa** $\vec{r}_{cm}$ per un sistema **discreto**, cioè formato da tanti elementini di massa m_i:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{r}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{r}_i}{M} , \tag{5.11}$$

dove abbiamo indicato con M la massa *complessiva* del sistema.

La posizione del centro di massa è chiaramente un vettore, che dipende dalla posizione $\vec{r}_i$ dei vari elementini che compongono il sistema. In seguito vedremo come sia possibile determinare $\vec{r}_{cm}$ in alcuni (semplici) casi di *corpi rigidi*, cioè sistemi in cui la posizione relativa dei vari componenti non cambia nel tempo. Ora, però, vogliamo vedere quali proprietà ha la posizione del centro di massa in problemi che hanno a che fare con la conservazione della quantità di moto.

Formalmente possiamo definire la **velocità del centro di massa** $\vec{v}_{cm}$ e l'**accelerazione del centro di massa** $\vec{a}_{cm}$ usando le derivate temporali:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{v}_i}{M} \tag{5.12}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{a}_i}{M} , \tag{5.13}$$

dove nei memebri di destra delle varie equazioni abbiamo supposto che la massa m_i dei vari elementini rimanga costante nel tempo (e quindi possa essere "tirata fuori" dal segno di derivata) ed abbiamo chiamato $\vec{v}_i$ e $\vec{a}_i$ velocità ed accelerazione dei vari elementini di massa.

Chiamando $\vec{p}$ la quantità di moto complessiva del sistema, è chiaro che abbiamo:

$$\vec{p} = \Sigma_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{cm} , \tag{5.14}$$

equazione molto importante sulla quale torneremo ampiamente nel seguito. Come prima conseguenza limitiamoci a considerare che, per un *sistema isolato, la velocità del centro di massa rimane costante*, come si può immediatamente vedere notando che in queste condizioni è $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = 0$. Possiamo anche facilmente renderci conto che, in simili condizioni, il moto di questo punto particolare, chiamato centro di massa, è quello di un punto (materiale) che non è soggetto ad alcuna forza (esterna). Quindi esso non cambierà il suo stato di moto durante il processo che stiamo considerando, cioè se era fermo inizialmente resterà fermo, se inizialmente si muoveva manterrà la stessa velocità iniziale.

5.3.1 Esercizio: spostamento del carrello quando l'omino ci cammina sopra

Riprendiamo l'Es. 5.1.4, chiedendoci stavolta quanto vale lo spostamento ΔX del carrello quando l'omino giunge al suo estremo.

Soluzione. Abbiamo già notato che il sistema è isolato in direzione orizzontale, che è quella rilevante per il problema, e sappiamo che la quantità di moto complessiva rimane costantemente nulla. Dunque il centro di massa del sistema, che era fermo inizialmente (dato che la quantità di moto complessiva era nulla), *resta fermo*. Per determinare la posizione del centro di massa del sistema abbiamo qualche problema: infatti possiamo ragionevolmente approssimare l'omino come un punto materiale, ma questa approssimazione non va granché bene per il carrello (che è sicuramente "lungo"!). Sapremo rispondere a questa domanda nel seguito; per il momento limitiamoci ad usare il buon senso che ci suggerisce che la posizione che dobbiamo attribuire al carrello nel calcolo del centro di massa del sistema deve mantenersi solidale al carrello stesso. Dunque lo spostamento Δx_{cm} della coordinata orizzontale (quella che ci interessa) del centro di massa del sistema, che, per ipotesi, deve essere nullo, si può scrivere: $0 = \Delta x_{cm} = (M\Delta X + m\Delta x)/(m+M)$, dove Δx è lo spostamento (orizzontale) dell'omino misurato nello *stesso riferimento* in cui si misurano gli altri spostamenti. Ragionando di geometria è facile stabilire che, quando l'omino è arrivato all'estremo del carrello, si ha $\Delta x = (L + \Delta X)$, da cui: $\Delta X = -Lm/(m+M) = -1.0$ m, dove il segno negativo indica che il carrello si sposta in verso opposto rispetto all'omino.

5.3.2 Esercizio: centro di massa nell'urto centrale di due biglie

Torniamo all'Es. 5.2.7, e chiediamoci quanto vale la velocità del centro di massa $v_{cm,f}$ dopo l'urto (che, ricordiamo, è elastico e centrale, e coinvolge biglie di massa m_1 ed m_2).

Soluzione. In questo esercizio sappiamo già che le velocità delle biglie dopo l'urto hanno l'espressione di Eq. 5.9; allora possiamo scrivere: $v_{cm,f} = (m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f})/(m_1 + m_2)$. Usando i risultati già citati per $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$ ed usando un po' di algebra è facile trovare che $v_{cm,f} = v_{cm,i}$. Questo risultato non ci stupisce: infatti, essendo il sistema isolato, la velocità del centro di massa *non* può cambiare in seguito all'urto.

5.4 Frammentazioni

Si parla di **frammentazioni** (o disgregazioni) quando un corpo unico si suddivide in più elementi; in genere, processi di questo tipo avvengono in tempi molto rapidi (quasi istantanei) e coinvolgono *solo forze interne*. Alcuni esempi sono la frammentazione di un fuoco d'artificio o di un razzo in più elementi, oppure la disgregazione di una molecola nei suoi componenti atomici. Il processo può essere visto come una sorta di collisione perfettamente *anelastica* che avviene "all'incontrario": se infatti immaginiamo di filmare una frammentazione e poi riguardiamo la pellicola invertendone il verso di proiezione[5], osserviamo qualcosa di molto simile ad una collisione anelastica. Pertanto non deve stupirvi il fatto che gli strumenti che si usano per analizzare i processi di frammentazione siano gli stessi che si usano nell'urto, in particolare la conservazione della quantità di moto:

[5] Cioè *invertendo il senso del tempo*, cosa possibile nella teoria della fisica!

infatti questi sistemi sono *isolati*, almeno per la durata del processo di frammentazione considerato.

Quindi nello studio dei processi di frammentazione possiamo tranquillamente usare l'apparato interpretativo che abbiamo costruito per l'analisi delle collisioni, in particolare degli urti totalmente anelastici: se il sistema che si frammenta può essere considerato isolato, allora la quantità di moto (complessiva) dovrà conservarsi; inoltre le considerazioni che abbiamo appena svolto relativamente al centro di massa ed al suo moto potranno anche essere trasferite in questo ambito, come ad esempio dimostrato in Es. 5.4.1.

5.4.1 Esercizio: il fuoco d'artificio

Il razzo di un gioco pirotecnico, di massa complessiva m, viene sparato dal suolo con una data velocità iniziale $\vec{v_0}$ che forma un certo angolo θ rispetto all'orizzontale. Ad una certa altezza h dal suolo, il razzo si separa in due parti, di massa rispettivamente m_1 ed m_2, per effetto di un'esplosione interna. Sapendo che il punto di caduta del frammento di massa m_1 dista d_1 dal punto di partenza del razzo, cosa si può dire sul punto di caduta del frammento m_2? (Supponete trascurabile l'attrito dell'aria e tenete conto che le distanze d_1 e d_2 sono misurate "al suolo", cioè in direzione orizzontale)

Soluzione La soluzione del problema richiede di considerare con molta attenzione tutte le informazioni fornite nel testo. In pratica, il razzo si separa in due parti per effetto di una qualche forza interna, un'esplosione, e l'unica forza esterna che agisce sul sistema e sulle sue parti (trascurando l'attrito dell'aria) è la forza peso. Il sistema è allora *isolato* in direzione orizzontale. Il centro di massa del sistema deve pertanto muoversi come un punto materiale di massa m che viene lanciato con velocità iniziale $\vec{v_0}$ e quindi subisce la forza peso. Come è facile dimostrare ricordando la soluzione dell'Es. 2.2.4, la "gittata" di questo moto vale $D = v_0^2 \sin\theta \cos\theta/g$. In altre parole, il centro di massa del sistema "cade al suolo" a distanza D dal punto di partenza, cioè nella stessa posizione che raggiungerebbe il fuoco d'artificio se rimanesse intero. Per definizione, la posizione orizzontale del centro di massa in qualsiasi istante del moto, e quindi anche alla caduta, deve essere $x_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2)/m$, cioè si deve avere $D = (m_1d_1 + m_2d_2)/m$. Da questa relazione si trova immediatamente $d_2 = D(m/m_2) - d_1(m_1/m_2)$.

5.4.2 Esercizio: l'automobile di James Bond

L'automobile di James Bond si muove "a folle" (cioè a motore spento) e senza attrito su una strada piana e rettilinea, con velocità uniforme di modulo V_0. Ad un dato istante dall'automobile parte un missile di massa m, diretto ed orientato come la velocità dell'automobile stessa (vuole colpire un bersaglio che ha di fronte). Sapendo che l'energia generata per il lancio (e spesa solo per questo scopo) vale E e che la massa dell'automobile comprensiva di missile valeva $M = 5m$, quanto valgono le velocità V e v dell'auto e del missile subito dopo il lancio?

Soluzione. Il sistema auto e missile è isolato nella direzione del moto, dato che non esistono forze esterne (il motore, che implicherebbe un'interazione fra sistema e mondo esterno, è spento e l'auto è in folle). Pertanto si conserva la quantità di moto in questa direzione, cioè deve essere $p_0 = MV_0 = 5mV_0 = mv + (M - m)V = mv + 4mV$, dove si è tenuto conto del fatto che la massa dell'automobile viene diminuita della massa del missile e si è fatta la sostituzione $M = 5m$. D'altra parte l'energia E liberata nel lancio del missile serve ad aumentare l'energia cinetica del sistema (pensate al processo di frammentazione che stiamo trattando come all'"inverso" di un urto anelastico), per cui il bilancio energetico recita: $((M - m)/2)V^2 + (m/2)v^2 = 2mV^2 + (m/2)V^2 = (M/2)V_0^2 + E = (5/2)mV_0^2 + E$. Abbiamo quindi un sistema di due equazioni e due incognite, la cui soluzione può essere determinata con pochi passaggi algebrici.