Circuiti complicati

francesco.fuso@unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 4 - FF, 13 ottobre 2016)

Questa nota riporta dei facili esempi di applicazione di alcune "regole" per la "soluzione" di circuiti elettrici. Tali regole rappresentano in sostanza la formalizzazione di considerazioni pressoché ovvie nell'elettrostatica e elettricità (definizioni, "principi" di conservazione, etc.), per cui non aggiungono conoscenza a quanto già noto. Tuttavia esse possono essere utili per determinare correnti e d.d.p.in circuiti complicati, specialmente quando sono presenti più generatori (di d.d.p. o di corrente), come spesso succede in elettronica.

I. NOMENCLATURA E REGOLE

Un circuito può essere genericamente indicato come la composizione di diversi componenti, uniti tra loro a formare uno o più sottocircuiti collegati e chiusi su se stessi attraverso fili (perfettamente) conduttori. I componenti possono in generale avere due o più elettrodi (o reofori, o fili di collegamento): per il momento conosciamo solo componenti a due elettrodi, detti anche *bipoli*, in particolare generatori di d.d.p., in questo contesto considerati ideali, e resistori. Pertanto gli esempi di questa nota saranno costruiti solo collegando resistori e generatori di d.d.p. tra loro.

Diamo un po' di nomenclatura:

1. si chiama *nodo* il punto in cui si diramano le correnti, cioè la congiunzione tra tre o più fili;

2. si chiama *ramo* il tratto di circuito che congiunge due nodi (adiacenti);

3. si chiama *maglia* la successione di rami che si richiudono su se stessi.

In presenza di un circuito complicato, il primo obiettivo è quello di scomporlo in diverse maglie, ovvero diversi sotto-circuiti. Esiste un teorema che stabilisce che il numero delle maglie (indipendenti) N_m dipende da quello dei rami e dei nodi (rispettivamente N_r e N_n) secondo la relazione

$$N_m = N_r - N_n + 1 \; . \tag{1}$$

"Risolvere" un circuito equivale nella pratica a scrivere un sistema di equazioni algebriche (almeno per il momento, lineari) che contiene tante equazioni quante maglie indipendenti. Ognuna di queste equazioni lega tra loro grandezze elettriche di interesse, che per noi sono differenze di potenziale ΔV e intensità di corrente I.

Le equazioni devono essere scritte tenendo conto del modello, o *relazione costitutiva*, che descrive il funzionamento dei vari componenti, cioè, per noi al momento, la legge di Ohm [1]. Esistono poi due regoline, che qualche volta prendono il pomposo nome di "leggi di Kirchoff":

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \text{ su una maglia} \tag{2}$$

$$\sum_i I_i = 0 \text{ su un nodo} \; , \tag{3}$$

dove le somme si intendono estese su tutte le d.d.p. ai capi degli elementi della maglia considerata, o su tutte le correnti che interessano il nodo considerato. Si intende che, nella scrittura data, devono essere impiegate opportune convenzioni per stabilire i segni di ΔV_i (rispetto a un verso convenzionalmente positivo di percorrenza della maglia) e di I_i (generalmente positivo/negativo a seconda che la corrente entra/esca dal nodo). Di questo ci renderemo facilmente conto svolgendo gli esercizi di esempio. Le Eqq. 2,3 hanno un'ovvia origine fisica legata rispettivamente al carattere additivo dei potenziali scalari statici (ricordatene la definizione attraverso integrale di linea) e alla conservazione della carica che per unità di tempo passa attraverso un nodo (il nodo non è né un pozzo, né una sorgente di carica).

Il modo con cui si scrivono le tante equazioni necessarie alla soluzione del circuito non è univoco. Qui useremo un metodo, generalmente molto efficiente, che si basa sull'Eq. 2 e che pertanto mescola in ogni singola equazione le correnti delle diverse maglie. Ci sono anche dei metodi che si basano sull'Eq. 3 e tanti metodi "misti", che usano le due regole scritte sopra. Questi metodi misti sono quelli che in pratica si usano, in maniera più o meno immediata, quando si risolvono circuiti molto semplici, in cui è facile distinguere collegamenti in serie e parallelo.

Esiste poi un altro metodo molto utile nel caso in cui in un circuito siano presenti più generatori di d.d.p., o di corrente, che ugualmente serve per scrivere tante equazioni quante sono le maglie indipendenti del circuito. Esso si basa sul *principio di sovrapposizione*, valido grazie al carattere "lineare" della legge di Ohm, che viene applicato a correnti e d.d.p.. Le regoline su cui si basa questo metodo sono:

1. la soluzione del circuito può essere compiuta a passi successivi, cioè scrivendo tante equazioni in cui tutti i generatori *tranne uno* sono sostituiti da un *cortocircuito* (se generatore di d.d.p.) o circuito aperto (se generatore di corrente, caso che non esamineremo);

2. la soluzione "finale" si ottiene allora sovrapponendo, cioè sommando algebricamente, le d.d.p. e le correnti determinate nei vari passi.

Anche di queste regoline, almeno in parte, faremo uso in qualche esempio, in modo da chiarirne la ricetta pratica di impiego. Per il momento osservate che sostituire un generatore di d.d.p. (ideale, in questo contesto) con un cortocircuito è in accordo con le specifiche dei generatori secondo il modello di Thévenin.

II. ESEMPIO MOLTO SEMPLICE

La Fig. 1 mostra un semplicissimo circuito costituito dal generatore di d.d.p. V_0 (ideale) e da tre resistenze R_{1-3}. La sua semplicità, in particolare il fatto che è presente un solo generatore, fa sì che a nessuna persona dotata di minimo buon senso venga in mente di impiegare le regole di cui alla sezione precedente. Infatti è ben più semplice risolvere il circuito basandosi su considerazioni immediate, o intuitive, le quali fanno in pratica uso di una mescolanza di tutte le varie regoline prima enunciate. È evidente che il circuito è un partitore di tensione realizzato dalla serie di R_1 con il partitore di corrente costituito dal parallelo di R_2 e R_3. Di conseguenza è facile dedurre tutte le informazioni di interesse. Per esempio, la corrente I erogata dal generatore è $I = V_0/R_{tot}$, con $R_{tot} = R_1+R_{2//}R_3 = (R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)/(R_2+R_3)$. Se fossimo, ancora per esempio, interessati a conoscere la differenza di potenziale ΔV_2 ai capi di R_2 (naturalmente uguale a ΔV_3 ai capi di R_3), potremmo immediatamente affermare che essa è $\Delta V_2 = (R_{2//}R_3)I = V_0(R_2R_3)/(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)$, e così via.

Tuttavia, al solo scopo di esercitarci, proviamo a ragionare nei termini prima stabiliti. Cominciamo individuando i nodi, che sono in numero $N_n = 2$, e i rami, che sono in numero $N_r = 3$ (nodi e rami sono marcati in figura con le lettere n_i e r_i). Dunque si hanno $N_m = 2$ maglie indipendenti. La scelta delle maglie non è univoca: decidiamo di usare le maglie indicate con $m_{1,2}$ in figura e stabilire che il loro verso di percorrenza è positivo quando le correnti fluiscono in senso orario. Questa scelta è ovvia considerando la disposizione dei poli del generatore (la corrente va dal positivo al negativo), che permette di stabilire il verso di percorrenza di m_1, da cui anche quello di m_2, che deve essere coerente.

Prima di procedere con la soluzione, conviene individuare quali componenti, o rami, si trovano *a comune* tra diverse maglie, cosa che ovviamente dipende dalla scelta delle maglie stesse. Per la scelta fatta, R_2 si trova ad essere interessata dalle correnti di tutte e due le maglie (con versi opposti). Di conseguenza la d.d.p. ai suoi capi dipenderà da *entrambi* le intensità di corrente delle due maglie [2].

Scriviamo ora le equazioni per i componenti delle due maglie seguendo le regole di Eq. 2 e partendo dal punto di circuito collocato "in basso a sinistra" in figura (questo giustifica i segni):

$$0 = V_0 - R_1I_{m1} - R_2I_{m1} + R_2I_{m2} \text{ per la maglia } m_1 \quad (4)$$
$$0 = R_2I_{m1} - R_2I_{m2} - R_3I_{m2} \text{ per la maglia } m_2 \ , \quad (5)$$

dove abbiamo indicato con I_{m1} e I_{m2} le intensità di corrente delle due maglie. Osservate che i segni dei contributi alla d.d.p. ai capi di R_2 devono essere opposti tra loro a causa della scelta dei versi di circolazione.

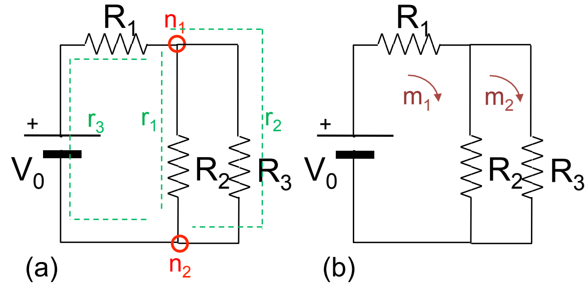

Figura 1. Schema del circuito considerato nel testo con indicati i nodi e i rami (a), e le maglie indipendenti utilizzate nella soluzione (b).

Personalmente trovo più conveniente scrivere le equazioni delle maglie in modo che l'eventuale presenza del generatore sia chiara guardando il primo membro delle equazioni stesse. In questo modo le Eqq. 4, 5 diventano, con qualche riaggiustamento di segno,

$$V_0 = R_1I_{m1} + R_2I_{m1} - R_2I_{m2} \text{ per la maglia } m_1 \quad (6)$$
$$0 = R_2I_{m1} - R_2I_{m2} - R_3I_{m2} \text{ per la maglia } m_2 \ . \quad (7)$$

Supponendo di conoscere i valori di V_0 e delle resistenze, la soluzione del sistema delle due equazioni lineari algebriche consente di dedurre tutto quello che si vuole sul circuito in esame. Le intensità di corrente di maglia sono determinate come

$$I_{m1} = V_0 \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (8)$$
$$I_{m2} = V_0 \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \ . \quad (9)$$

Si verifica facilmente che queste intensità di corrente di maglia danno gli stessi risultati che si ottengono con il metodo immediato riportato in precedenza. Infatti la corrente erogata dal generatore di d.d.p., che prima abbiamo indicato con I, coincide con I_1 come deve essere. Inoltre la ΔV_2 di prima si calcola in questo caso come

$$\Delta V_2 = R_2(I_{m1} - I_{m2}) = V_0 \frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \ , \quad (10)$$

dove il segno positivo indica che il nodo "in alto" in figura si trova a potenziale maggiore di quello "in basso".

III. CIRCUITO UN PO' PIÙ COMPLICATO

Consideriamo il circuito rappresentato in Fig. 2: ci sono due generatori (ideali) di d.d.p., rispettivamente di valore V_1 e V_2, e cinque resistori, di resistenza R_{1-5}. Di questo circuito riusciremo a sapere tutto, però, tanto per porre una domanda semplice, immaginiamo di voler conoscere la differenza di potenziale ΔV_2 ai capi del resistore R_2. Al solo scopo di permettere conti abbastanza

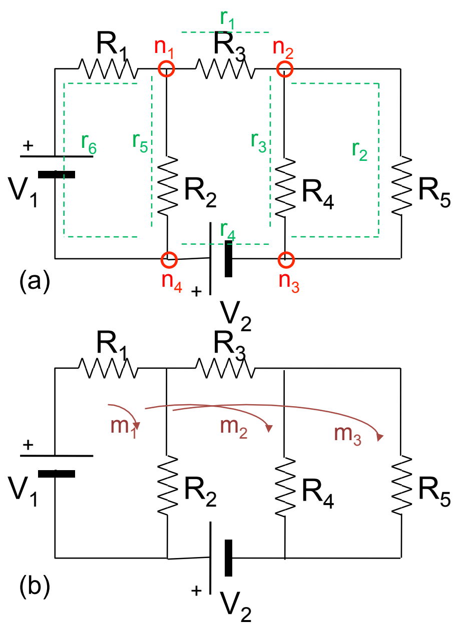

Figura 2. Schema del circuito considerato nel testo con indicati i nodi e i rami (a), e le maglie indipendenti utilizzate nella soluzione (b).

facili, immaginiamo anche $V_2 = 2V_1 = 2V$ e $R_j = jR$ (vuol dire $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, e così via), tranne che $R_5 = R_4 = 4R$.

Cominciamo con l'individuare nodi e rami, che sono in numero $N_n = 4$ e $N_r = 6$ (tutto è indicato in Fig. 2 con la stessa notazione di Fig. 1). Il numero di maglie indipendenti è $N_m = 3$. Le tre possibili maglie m_{1-3} sono anche marcate in figura; anche qui scegliamo come positivo il verso di percorrenza orario per le correnti di maglia.

A. Semplificazione

Prima di procedere "al buio", conviene notare che, ai fini della domanda che ci siamo posti, il circuito può essere notevolmente semplificato. Infatti i resistori R_4 e R_5 sono evidentemente in parallelo tra loro senza nessun generatore o altro componente in mezzo, e il resistore R_3 è in serie con quel parallelo. Possiamo allora ridurre il circuito dato a quello di Fig. 3, in cui compare il resistore R_{345} che sostituisce i precedenti resistori ed equivale a quelli. Usando le regoline di serie e parallelo si trova facilmente $R_{345} = 5R$.

In questo nuovo circuito i nodi sono solo due e i rami tre, per cui le maglie da considerare sono solo due.

Complessivamente nel circuito si possono individuare tre differenti maglie, quella di sinistra, quella di destra e quella esterna, come rappresentate e denominate in figura. Vedremo come, operando due diverse scelte per la scomposizione in maglie, sarà possibile giungere allo stesso risultato. Alla fine proveremo anche un metodo differente, che è anche atteso portare allo stesso risultato.

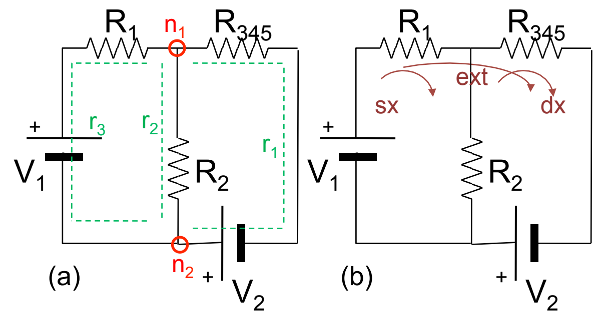

Figura 3. Schema del circuito semplificato equivalente a quello di Fig. 2 per gli scopi dell'esercizio; al solito, il pannello (a) mostra nodi e rami, e il pannello (b) le maglie considerate nella soluzione, con la denominazione usata nel testo (sx, dx ed ext stanno per sinistra, destra, esterna, rispettivamente).

B. Metodo 1: maglie laterali

Cominciamo considerando le due maglie laterali, di sinistra e di destra, facendo riferimento ai segni di figura per il verso positivo di circolazione delle correnti di maglia I_{m1} e I_{m2}. Notiamo poi che la resistenza R_2 è a comune fra le due maglie. Le equazioni di maglia, scritte nel modo da me preferito, sono

$$V_1 = R_1 I_{m1} + R_2 I_{m1} - R_2 I_{m2} \tag{11}$$
$$V_2 = R_2 I_{m2} - R_2 I_{m1} + R_{345} I_{m2}\ . \tag{12}$$

Usando le relazioni numeriche tra le varie grandezze si trova

$$V = 3RI_{m1} - 2RI_{m2} \tag{13}$$
$$2V = -2RI_{m1} + 7RI_{m2}\ . \tag{14}$$

Questo sistema a due equazioni algebriche lineari e due incognite può essere facilmente risolto fornendo $I_{m1} = (V/R)(11/17)$ e $I_{m2} = (V/R)(8/17)R$. Le due correnti scorrono in senso inverso attraverso il resistore R_2. Dunque per la legge di Ohm si avrà $\Delta V_2 = R_2(I_{m1} - I_{m2}) = (6/17)V$, dove il segno positivo indica che il punto più in alto del resistore in figura si trova a potenziale maggiore.

C. Metodo 2: maglie sinistra e esterna

Vediamo cosa succede se scegliamo quest'altra suddivisione del circuito in maglie. Indicando con I'_{m1} e I'_{m2} le nuove correnti di maglia, e osservando che stavolta è R_1 ad essere in comune tra le maglie (occhio: le correnti di maglia hanno lo stesso verso su questo resistore e quindi producono d.d.p. dello stesso segno), le equazioni relative saranno

$$V_1 = R_1 I'_{m1} + R_1 I'_{m2} + R_2 I'_{m1} \quad (15)$$

$$V_1 + V_2 = R_1 I'_{m2} + R_1 I'_{m1} + R_{345} I'_{m2} \, , \quad (16)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che i due generatori sono in serie tra loro nella maglia esterna (ancora principio di sovrapposizione delle tensioni, oppure Eq. 2).

Semplificando le espressioni come prima, si trova

$$V = 3RI'_{m1} + RI'_{m2} \quad (17)$$

$$3V = RI'_{m1} + 6RI'_{m2} \, . \quad (18)$$

Risolvendo si ottiene $I'_{m1} = (V/R)(3/17)$ e $I'_{m2} = (V/R)(8/17)$. Stavolta, il resistore R_2 è attraversato dalla sola corrente I'_{m1}, per cui $\Delta V_2 = R_2 I'_{m1} = (6/17)V$, che è risultato identico a quello di prima.

D. Metodo 3: sovrapposizione dei generatori

Utilizziamo qui il metodo che consiste nello scrivere equazioni in cui, di volta in volta, si considera un solo generatore di d.d.p., essendo gli altri (l'altro, in questo caso) sostituito da un corto-circuito. Risolto il sistema delle due equazioni così scritte, potremo usare il principio di sovrapposizione per ottenere le intensità di corrente e le d.d.p. come somme algebriche di quelle ottenute da ogni equazione.

Dunque riprendiamo l'intero circuito e rimpiazziamo il generatore 2 con un cortocircuito. Quello che resta è facile da descrivere. Al generatore superstite, quello che eroga la d.d.p. V_1, è collegata la serie di R_1 con il parallelo tra R_2 e R_{345}, con resistenza equivalente $R_{2345} = (10/7)R$. Con un po' di applicazione delle regoline dei partitori di corrente e tensione si trova che la d.d.p. ai capi del resistore R_2 è $\Delta V_{2,G1} = (10/17)V$.

Facciamo la stessa operazione sostituendo il generatore 1 con un cortocircuito: stavolta al generatore che eroga la d.d.p. V_2 resterà collegata la serie di R_{345} con il parallelo di R_1 e R_2, che ha resistenza equivalente $R_{12} = (2/3)R$. Ragionando come sopra, si trova $\Delta V_{2,G2} = -(4/17)V$, dove il segno negativo indica che in questo caso il nodo "in alto" di figura del resistore R_2 si trova a potenziale minore.

Per il principio di sovrapposizione è $\Delta V_2 = \Delta V_{2,G1} + \Delta V_{2,G2} = (6/17)V$, che è anche stavolta lo stesso risultato ottenuto prima.

Siete invitati a provare come esercizio altre possibilità (scelta di diverse maglie, trattazione del circuito originale) e anche a calcolare altre grandezze relative al circuito considerato o a inventarvi (e risolvere) altri circuiti.

---

[1] I circuiti considerati qui sono alimentati in continua, dato che i generatori considerati sono continui, cioè operano in condizioni stazionarie. Nel seguito vedremo un'estensione piuttosto immediata a situazioni di d.d.p. e corrente alternate.

[2] Volendo, la necessità di considerare tutte le diverse correnti di maglia che interessano un ramo è conseguenza del principio di sovrapposizione, che noi abbiamo citato come ingrediente da usare nel caso di presenza di più generatori, ma che naturalmente vale "a prescindere" per tutte le grandezze fisiche di nostro interesse (in questo caso per determinare la d.d.p. ai capi di R_2).