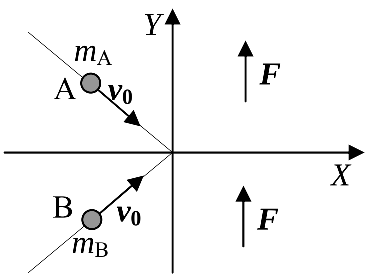
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 29/11/2005

Nome e cognome: ……………………………………………………..   Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Due particelle puntiformi A e B di massa m_A = 1.0 g e m_B (incognita) si muovono **senza attrito** su un piano **orizzontale** *XY*. All'istante t_0 = 0 esse passano entrambe per l'origine (il fatto che siano puntiformi rende possibile il loro passaggio simultaneo per una stessa posizione!) provenendo dalle bisettrici rispettivamente del quarto e del terzo quadrante con **velocità iniziali** di modulo uguale e pari a v_0 = 2.0 m/s, come indicato in figura. Nella regione di spazio $x > 0$ le due particelle incontrano un campo di forza **uniforme e costante** diretta lungo il verso positivo dell'asse *Y* e di modulo $F = 1.6\text{x}10^{-2}$ N. [Può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 0.71$, e $sin^2(\pi/4) = cos^2(\pi/4) = 1/2$]



a) Sapendo che le due particelle si incontrano di nuovo in un punto che ha coordinata orizzontale x' = 1.0 m, quanto vale la massa m_B?

m_B = …………………………………… = ……….. Kg $m_A/(1 - 4v_0^2 sin\theta\ cos\theta\ m_A/(x'F)) = m_A/(1 - 2v_0^2 m_A/(x'F)) = 2.0\text{x}10^{-3}$ Kg , essendo $\theta = \pi/4$ [viene notando che l'istante di impatto deve essere $t' = x'/(v_0 cos\theta)$ (notate che la velocità iniziale orizzontale vale $v_0 cos\theta$ per ambedue le masse, e quindi si ha sempre $x_A(t)=x_B(t)$); d'altra parte imponendo $y_A(t') = y_B(t')$ si ha: $2v_0 sin\theta = (Ft'/2)(1/m_A - 1/m_B)$, da cui la soluzione; si può anche risolvere trovando le intersezioni delle due parabole che descrivono le traiettorie delle due particelle]

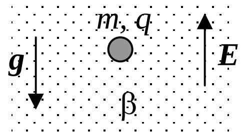
b) Quanto vale il lavoro L_A compiuto dalla forza *F* sulla particella A nel suo movimento dall'origine al punto di incontro?

L_A = …………………………………… = ……….. J $Fy'=F(-v_0 sin\theta x'/(v_0 cos\theta) + (F/(2m_A)x'^2/(v_0 cos\theta)^2) = F(-x'+(Fx'^2/(m_A v_0^2)) = 4.8\text{x}10^{-2}$ J [la forza è uniforme e costante, ed il lavoro si ottiene moltiplicando *F* per lo spostamento Δy **lungo *Y*;** dato che si parte dall'origine, si ha $\Delta y = y' = y_A(t') = y_A(x'/(v_0 cos\theta)) = -x'+(F/(2m_A))(x'^2/(v_0^2 cos^2\theta))$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale la componente lungo *Y* della velocità, v'_{AY}, della particella A nel punto di incontro?

v'_{AY} = …………………………………… = ……….. m/s $-v_0 sin\theta + (F/m_A)\ (x'/(v_0 cos\theta)) = 9.9$ m/s [dalla legge oraria della velocità si ha $v_{AY}(t) = -v_0 sin\theta + (F/m_A)t$, da cui, ponendo $t = t' = x'/(v_0 cos\theta)$, si ha la soluzione]

2. Un granellino di plastica di massa *m* (incognita) porta una carica elettrica *q* (anch'essa incognita). Il granellino si trova in una regione di spazio, rappresentata in figura, in cui è presente un **attrito viscoso** con coefficiente $\beta = 2.1\text{x}10^{-4}$ Kg/s e un **campo elettrico omogeneo** diretto verticalmente verso l'alto e di modulo *E* = 49 N/C. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Sapendo che il granellino di plastica è fermo in equilibrio, quanto vale il rapporto *q/m*?

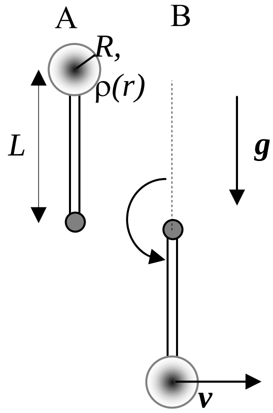
q/m = …………………………………… = ……….. C/Kg g/E = 0.20 C/Kg   [eq. forze]

b) Supponete ora di spegnere il campo elettrico. In queste condizioni si osserva che il granellino cade verticalmente verso il basso, con una velocità il cui modulo aumenta fino al valore (asintotico) v_1 = 7.0 mm/s. Quanto vale la carica *q* portata dal granellino? [Quanto descritto somiglia molto al cosiddetto esperimento di Millikan; per la soluzione dovete tenere in conto la risposta al punto precedente]

q = ... = ... C $\beta v_1/E = 3.0\times10^{-8}$ C [la forza di attrito viscoso vale $-\beta v$ e la velocità "limite" raggiunta asintoticamente dal granellino (quando la forza di attrito uguaglia, in modulo, la forza peso) è data da $mg = \beta v_1$, cioè $v_1 = mg/\beta$; combinando con la soluzione del punto precedente si ottiene il risultato]

c) Quanto vale, come ordine di grandezza, il tempo τ necessario affinché il granellino raggiunga il valore asintotico di velocità v_1? [Date una risposta ricordando i tempi caratteristici coinvolti nell'andamento temporale della velocità in presenza di attrito viscoso]
τ .... ~ .... s $m/\beta = E/(gq\beta) = v_1/g \sim 7.1\times10^{-4}$ s [la velocità decresce in modo esponenziale ed il tempo caratteristico dell'esponenziale, quello a cui la velocità raggiunge il valore v_1/e, vale m/β ; sostituendo la massa derivata dalle considerazioni precedenti si ottiene il risultato]

3. Una sfera **disomogenea** di raggio R = 2.0 cm è fatta di un materiale la cui densità di massa varia con la distanza dal centro r secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 R^2 / r^2$, con $\rho_0 = 2.0\times10^3$ Kg/m^3 [notate che fisicamente la distribuzione di densità proposta è poco realistica]. Tale sfera è fissata ad un'asta di lunghezza L = 0.61 m e **massa trascurabile,** che può ruotare **senza attrito** su un piano verticale. La configurazione iniziale è con l'asta posta in direzione verticale, e quindi con la sfera che si trova nella posizione più alta, come in figura A. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e, per quanto riguarda la dinamica, considerate la sfera come puntiforme]



a) Quanto vale la massa m della sfera? [Suggerimento: scomponete idealmente la sfera in gusci sferici concentrici e...]
m = ... ~ .... Kg $\int_{Sfera} \rho\, dV = \int_0^R \rho\, 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi R^2 \int_0^R (r^2/r^2)\, dr = \rho_0 4\pi R^2 \int_0^R dr = \rho_0 4\pi R^3 \sim 2.0\times10^{-1}$ Kg [l'elemento di volume dV è pari al volume di un guscio sferico di raggio r generico e spessore dr; "al primo ordine" si ha $dV = 4\pi r^2\, dr$, dato che si può considerare il volume come dato dalla superficie del guscio, $4\pi r^2$, per il suo spessore, dr]

b) Ad un dato istante l'asta viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla; essa comincerà allora a ruotare attorno al perno, e quindi la sfera scenderà verso il basso. Quanto vale il modulo v della velocità della sfera quando essa si trova nel punto più basso che può raggiungere (quello di figura B)?
v = ... ~ .... m/s $(2g(2L))^{1/2} = (4gL)^{1/2} \sim 4.9$ m/s [dalla conservazione dell'energia meccanica, notando che la sfera nel suo moto si "abbassa" di una quantità pari a $2L$]

c) Quanto vale il modulo della forza F che l'asta esercita sulla sfera quando questa si trova nel punto di cui alla domanda precedente? [Suggerimento: tenete conto che la massa si sta muovendo su una circonferenza e considerate tutte le forze che agiscono sulla sfera quando essa passa per la posizione in questione!]
F = ... ~ .... N $mg + mv^2/L = mg + m4gL/L = 5mg \sim$ 9.8 N [l'asta esercita sulla sfera forze che servono per equilibrare la forza peso, mg, e per fornire l'accelerazione centripeta, v^2/L , da cui la risposta]

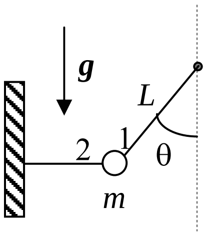
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 29/11/2005 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 29/11/2005

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una massa puntiforme m = 100 g è legata a due corde inestensibili e di massa trascurabile. Una delle due corde, denominata 1, è lunga L = 20 cm ed ha l'altro estremo legato ad un piolo infisso su un piano verticale. L'altra corda, denominata 2, è invece inchiodata ad una parete verticale. La situazione iniziale è descritta in figura: la massa è ferma in equilibrio, la corda 1 forma un angolo $\theta = \theta_0$ = 45 gradi rispetto alla verticale e la corda 2 è orizzontale. [Ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4)$ = 0.71 e $sin(\pi/4)cos(\pi/4)$ = ½; usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

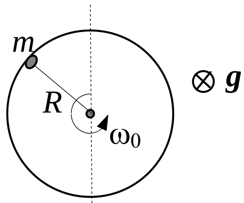


   a) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della tensione T_1 della corda 1?
   T_1 = …………………………………….= ……… N $mg/cos\theta_0$ = 1.4 N   [non conoscendo la tensione della corda 2, che sarà determinata nella risposta successiva, conviene scrivere l'equilibrio in direzione verticale ; si ha per i moduli $T_1 cos\theta_0 = mg$, da cui la risposta]

   b) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della tensione T_2 della corda 2?
   T_2 = …………………………………….= ……… N $T_1 sin\theta_0 = mg\ tg\theta_0 = 9.8\text{x}10^{-1}$ N   [qui si può considerare l'equilibrio in direzione orizzontale : $T_2 = T_1\ sin\theta_0$ che, combinata con la risposta precedente, fornisce il risultato]

   c) Ad un dato istante, la corda 2 viene tagliata; la massa si mette quindi in movimento verso il basso rimanendo vincolata dalla corda 1. Quanto vale la velocità v con cui la massa passa per la verticale (cioè la velocità v della massa quando θ = 0)? [Trascurate ogni attrito nel moto della massa]
   v = ……………………………………....~ .... m/s $(2gL(1-cos\theta_0))^{1/2}$ ~ 1.1 m/s   [viene dalla conservazione dell'energia meccanica : $\Delta E_K = (m/2)\ v^2 = -\ \Delta U_G = mgL(1-cos\theta_0)$]

2. Un gioco da luna park è costituito da un guscio cilindrico, di raggio interno R = 4.9 m, che viene messo in rotazione attorno al suo asse grazie ad un motore elettrico. Un bambino (che approssimerete ad un punto materiale!), di massa m = 20 Kg, si appoggia alla superficie interna del guscio, scabra, quando il motore è fermo. Quindi il motore viene acceso e, quando il guscio raggiunge una certa velocità angolare, il pavimento viene rimosso ed il bambino rimane "attaccato" alla superficie interna del guscio. La figura rappresenta una vista **dall'alto** della configurazione (l'accelerazione di gravità, il cui modulo vale g = 9.8 m/s^2, entra nel foglio). Sapete che il coefficiente di attrito statico tra bambino e superficie interna del guscio è μ_S = 0.50.



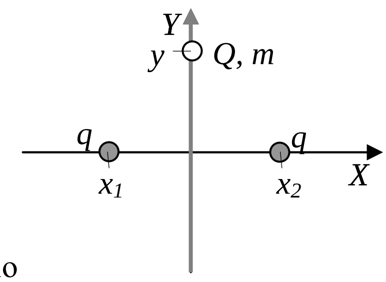
Vista dall'alto

   a) Supponendo che, a regime, il guscio ruoti con velocità angolare uniforme e costante ω_0 = 10 rad/s, quanto vale il modulo della reazione vincolare N esercitata dalla superficie interna del guscio sul bambino?
   N = …………………………………… = ………. N $m\omega_0^2 R$ = $9.8\text{x}10^3$ N   [la reazione vincolare produce la forza centripeta che fa ruotare il bambino ; visto il valore numerico, io non farei salire mio figlio su questo gioco !]

   b) All'istante t_0 = 0, il guscio inizia a diminuire la sua velocità angolare essendo sottoposto ad una accelerazione angolare **costante ed uniforme** α = - 0.50 rad/s^2. Come si scrive la funzione che esprime la velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo t? [Non usate valori numerici!]
   $\omega(t)$ = …………………………………….... $\omega_0 + \alpha t$

c) Durante la decelerazione del guscio, si osserva che ad un certo istante T il bambino comincia a scivolare verso il basso. Quanto vale T?
T = ……………………………………..= ………. s $((g/(R\mu_S))^{1/2} - \omega_0)/\alpha$ = 16 s [affinché il bambino rimanga "attaccato" alla parete interna del guscio occorre che la forza di attrito, che ha modulo $\mu_S N = \mu_S m\omega^2 R$, sia maggiore o uguale della forza peso, mg; esprimendo ω in funzione del tempo secondo quanto scritto nella risposta precedente e risolvendo l'uguaglianza per t si ottiene il risultato]

3. Due cariche elettriche puntiformi uguali e di valore q = - 2.5x10^{-5} C si trovano **fisse** sull'asse X di un sistema di riferimento nelle posizioni rispettivamente $x_1 = - x' = -4.0$ m e $x_2 = x' = 4.0$ m. Una terza carica, di valore Q = 2.0x10^{-4} C e di massa m = 9.0 Kg, può muoversi **senza attrito** essendo vincolata ad una guida disposta lungo l'asse Y dello stesso piano (notate che il piano XY è orizzontale). [Usate il valore κ = 9.0x10^9 Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica]



a) Quanto vale, in funzione della coordinata y della carica Q, il modulo della reazione vincolare $N(y)$ esercitata dalla guida sulla carica stessa? [Suggerimento: pensate bene alla direzione della reazione vincolare e considerate la geometria del problema!]
$N(y)$ = ……………………………………= ……… N 0 [la risultante delle forze elettriche prodotte dalle due cariche fisse sulla carica Q ha componenti nulle lungo la direzione ortogonale alla guida, che è quella lungo la quale potrebbe essere diretta la reazione vincolare, e che nel nostro disegno è la direzione X]

b) Come si scrive, in funzione della coordinata y della carica Q, la componente lungo l'asse Y, $F_Y(y)$, della forza esercitata dalle cariche fisse? [Qui non serve mettere i valori numerici delle grandezze]
$F_Y(y)$ = …………………………………… $\kappa\, Qq(y/(x_1^2+y^2)^{3/2}+y/(x_2^2+y^2)^{3/2})= 2\kappa\,(Qq/m)(y/(x'^2+y^2)^{3/2})$ [infatti la forza elettrica esercitata, ad esempio, dalla carica fissa che si trova in x_1 vale $\kappa Qq/(x_1^2+y^2)$, e la sua componente Y si ottiene, grazie alla similitudine dei triangoli rettangoli, moltiplicando per $y/(x_1^2+y^2)^{1/2}$; inoltre, dato che $x_1^2 = x_2^2 = x'^2$, le componenti delle forze originate dalle due cariche fisse si sommano]

c) Supponendo che la carica parta **da ferma** dalla posizione y_0 = 3.0 m e che venga lasciata muoversi sotto l'effetto della forza $F_Y(y)$ di cui al punto precedente, quanto vale la velocità v che la carica possiede quando passa per l'origine? [Suggerimento: considerate con attenzione se la forza che agisce sulla carica Q è uniforme, o meno; inoltre tenete conto che esiste la seguente regola di integrazione indefinita per una variabile ξ e una costante δ generiche: $\int \xi/(\delta^2+\xi^2)^{3/2}\, d\xi = -1/(\delta^2+\xi^2)^{1/2}$]
v = ……………………………………..= ……… m/s $((2/m) \int_{y_0}^{0} F_Y(y)\, dy)^{1/2} = (2 \int_{y_0}^{0} 2\kappa\,(Qq/m)\,(y/(x'^2+y^2)^{3/2})\, dy)^{1/2} = (-4\kappa\,(Qq/m)(1/x'-1/(x'^2+y_0^2)^{1/2}))^{1/2}$ = 1.0 m/s [si conserva l'energia meccanica, per cui $\Delta E_K = (m/2)v^2 = L_{Elettrico} = \int_{y_0}^{0} F_Y(y)\, dy$, da cui, con un po' di algebra e tenendo conto del suggerimento, esce la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 29/11/2005 Firma:

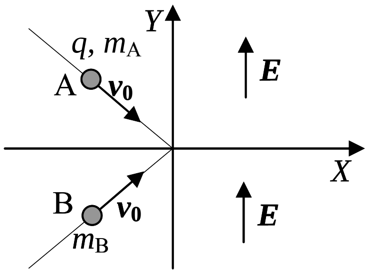
C

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 29/11/2005

Nome e cognome: ……………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Due particelle puntiformi A e B di massa m_A = 1.0 g e m_B si muovono **senza attrito** su un piano **orizzontale** *XY*. La particella A porta una carica elettrica $q = 7.1\text{x}10^{-4}$ C, mentre la particella B è scarica. All'istante $t_0 = 0$ esse passano entrambe per l'origine (il fatto che siano puntiformi rende possibile il loro passaggio simultaneo per una stessa posizione!) provenendo dalle bisettrici rispettivamente del quarto e del terzo quadrante con velocità iniziali di modulo uguale pari a v_0 = 2.0 m/s, come indicato in figura. Nella regione di spazio $x > 0$ è presente un campo elettrico **uniforme e costante** diretto lungo il verso positivo dell'asse *Y* e di modulo $E = 4.0\text{x}10^3$ N/C. [Ricordate che, per θ = 45 gradi, si ha $sin\theta = cos\theta = 0.71$]

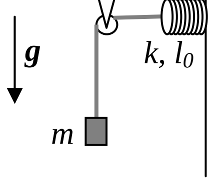


a) Determinate l'istante *t'* in cui le due particelle si incontrano nuovamente nel loro moto.
t' = …………………………………… = ………… s $4\ v_0\ m_A\ sin\theta / (qE) = 2.0\text{x}10^{-3}$ s
[viene imponendo $y_A(t') = -v_0 sin\theta\ t' + (qE/(2m_A))t'^2 = y_B(t') = v_0 sin\theta t'$; notate che, scrivendo in questo modo, abbiamo scelto di misurare l'angolo θ "a partire dall'asse *X*", cioè la componente *Y* delle grandezze vettoriali si ottiene moltiplicando per *sin*θ; avessimo fatto la scelta di misurarlo "a partire dall'asse *Y*" non sarebbe cambiato un bel nulla, dato che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4)$]

b) Quanto vale la variazione di energia cinetica ΔE_{KA} della particella A dall'istante t_0 = 0 all'istante *t'* determinato sopra?
ΔE_{KA} = …………………………………… = ………… J $(m_A/2)(v'^2_A - v_0^2) = (m_A/2)(v'^2_{AX} + v'^2_{AY} - v_{0X}^2 - v_{0Y}^2) = (m_A/2)((-v_0 sin\theta + (qE/m_A)t')^2 - v_0^2 sin^2\theta) = (m_A/2)((3v_0 sin\theta)^2 - v_0^2 sin^2\theta) = 4m_A v_0^2 sin^2\theta = 2m_A v_0^2 = 8.0\text{x}10^{-3}$ J [notate che la velocità lungo *X* rimane inalterata e che, in generale per un moto su un piano, $v^2 = v_X^2 + v_Y^2$; per esercizio, verificate che un identico risultato si ottiene anche considerando la conservazione dell'energia meccanica: $\Delta E_{KA} = -\Delta U_E = L_E$]

c) Quanto vale il lavoro totale *L* che il campo elettrico esegue sulle due particelle dall'istante t_0 = 0 all'istante *t'* determinato sopra?
L = …………………………………… = ………… J $\Delta E_{KA} = 8.0\text{x}10^{-3}$ J-   [dalla conservazione dell'energia meccanica, e si può anche verificare che lo stesso risultato si ottiene facendo il prodotto di forza elettrica per lo spostamento, come deve essere]

2. Una massa $m = 4.9\text{x}10^{-1}$ Kg è attaccata all'estremità di una fune inestensibile di massa trascurabile che passa attorno ad una puleggia di massa trascurabile che può ruotare **senza attrito** attorno al suo asse, il quale è imperniato su un supporto vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. L'altro capo della corda è attaccato ad una molla, di massa trascurabile, costante elastica k = 49 N/m e lunghezza di riposo l_0, il cui altro estremo è vincolato ad una parete rigida indeformabile. La figura rappresenta schematicamente il problema. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale l'elongazione Δ_0 della molla in condizioni di equilibrio? [Per elongazione si intende, ovviamente, la grandezza $l - l_0$, l essendo la lunghezza della molla]

Δ_0 = ……………………………………= ……… m $mg/k = 9.8\text{x}10^{-2}$ m [la fune « trasmette » la forza elastica sulla massa ; d'altra parte se la massa si sposta, ad esempio, verso il basso di una certa quantità Δ, la molla si allunga della stessa quantità, essendo la fune inestensibile]

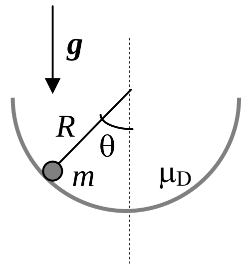
b) All'istante $t_0 = 0$, la massa, che si trova nella posizione di equilibrio, viene lanciata verso il basso con una **velocità iniziale** di modulo $v_0 = 7.0\text{x}10^{-2}$ m/s. La massa si muove verso il basso e, di concerto, la molla si allunga fino ad un certo punto. Quanto vale l'elongazione massima Δ_M raggiunta dalla molla?

Δ_M = ……………………………………....~ .... m $(\Delta_0^2 + (m/k)v_0^2)^{1/2} = ((mg/k)^2 + (m/k)v_0^2)^{1/2} \sim 9.8\text{x}10^{-2}$ m [per la conservazione dell'energia meccanica, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA} = -(m/2)v^2 + (k/2)\Delta_M^2 - (k/2)\Delta_0^2$, da cui la soluzione]

c) Dopo quanto tempo t la massa ripassa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio, se ci ripassa?

t = …………………………………….. ~ .... s $\pi/\omega = \pi/(k/m)^{1/2} \sim 3.1\text{x}10^{-1}$ s [il moto è armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$; il periodo vale $T = 2\pi/\omega$ e la massa ripassa per la posizione di equilibrio (per la prima volta) dopo $T/2$]

3. Una massa puntiforme m = 100 g può scivolare su una guida semicircolare di raggio R = 10 cm disposta su un piano verticale come in figura. La guida è scabra e presenta un coefficiente di attrito dinamico μ_D = 0.50. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si scrive, in funzione dell'angolo θ indicato in figura (che può variare da $-\pi/2$ a $\pi/2$), il modulo della reazione vincolare $N(\theta)$ esercitata dalla guida sulla massa? [Non usate valori numerici per questa risposta!]

$N(\theta)$ = …………………………………… $mg\cos\theta$ [viene imponendo l'equilibrio in direzione radiale]

b) Quanto vale il lavoro L_A eseguito dalla forza di attrito sulla massa quando questa percorre l'intera semicirconferenza, cioè passa dalla posizione iniziale $\theta_{in} = -\pi/2$ alla posizione finale $\theta_{fin} = \pi/2$? [Notate che la forza di attrito **non** è uniforme e considerate bene la sua direzione e quella dello spostamento; suggerimento ulteriore: "parametrizzate" lo spostamento attraverso l'angolo θ; può farvi comodo rammentare la seguente regola di integrazione indefinita per una variabile generica ξ: $\int \cos\xi \, d\xi = \sin\xi$]

L_A = ……………………………………= ………. J $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{F_A} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} mg\,\mu_D \cos\theta\, R\, d\theta = -mg\,\mu_D R\, 2 = 9.8\text{x}10^{-2}$ J [notate che il segno negativo viene dalla circostanza che forza d'attrito e spostamento hanno versi opposti e stessa direzione, e si è espresso lo spostamento infinitesimo lungo la circonferenza come $ds = R\, d\theta$]

c) Se la massa viene lasciata partire con velocità iniziale v_0 = 2.0 m/s (diretta lungo la semicirconferenza, ovvero in direzione tangenziale) dall'inizio della guida (cioè dalla posizione $\theta_{in} = -\pi/2$), quanto vale la velocità v con cui arriva alla fine della guida (cioè alla posizione $\theta_{fin} = \pi/2$)?

v = ……………………………………....~ .... m/s $(v_0^2 + 2L_A/m)^{1/2} \sim 2.4$ m/s [viene dal bilancio energetico : $L_A = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)(v^2 - v_0^2)$, dato che quota di partenza e di arrivo sono le stesse]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 29/11/2005 Firma:

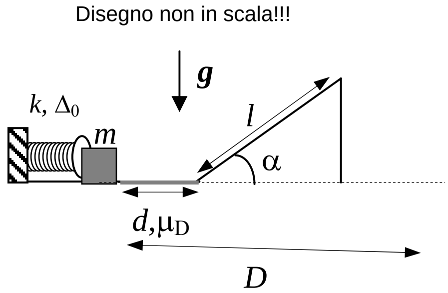
D

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 29/11/2005

Nome e cognome: ………………………………………………………. Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un cannoncino a molla (tipo flipper, per intenderci) è dotato di una molla di costante elastica k = 50 N/m che inizialmente è compressa di un tratto Δ_0 = 50 cm. All'atto dello "sparo", la molla si allunga fino alla sua posizione di riposo, ed una massa (puntiforme) m = 0.10 Kg acquista una certa velocità iniziale in direzione orizzontale (l'energia accumulata dalla molla diventa energia per il moto della massa). La **bocca di uscita** del cannoncino si trova a distanza d = 5.0 m dall'inizio di un piano inclinato di un angolo α = 30 gradi rispetto all'orizzontale e lunghezza l = 2.0 m. Il tratto compreso tra massa e piano inclinato è orizzontale e scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_D = 0.50, mentre il piano inclinato è liscio, cioè presenta un attrito trascurabile. Ad un certo istante, la molla viene lasciata libera di estendersi e la massa parte. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale il modulo della velocità v della massa quando questa raggiunge la **sommità** del piano inclinato?

v = ……………………………………......~ .... m/s $((k/m)\Delta_0^2 - 2g(\mu_D d + l\sin\alpha))^{1/2} \sim$ 7.5 m/s

[esce dal bilancio energetico: $L_A = - mg\mu_D d = \Delta(E_K + U_G + U_{ELA}) = (m/2)v^2 + mgl\sin\alpha - (k/2)\Delta_0^2$]

b) Dopo aver raggiunto la sommità del piano, la massa si libra in volo. Quanto vale l'altezza massima h_M da essa raggiunta rispetto al suolo? [Considerate come livello del suolo quello del cannoncino, come in figura; trascurate ogni forma di attrito nel volo della massa]

h_M = ……………………………………......~ .... m $v^2\sin^2\alpha/(2g) + l\sin\alpha \sim$ 2.4 m [si può ottenere dalle equazioni della dinamica, oppure dal bilancio energetico, tenendo però in debito conto il fatto che nel punto più alto la massa non è ferma, ma ha una velocità lungo X pari a $v\cos\alpha$]

c) Dopo aver raggiunto la sua quota massima, la massa cade al suolo. Quanto vale la distanza D tra la bocca del cannoncino ed il punto di impatto al suolo? [Si intende ovviamente la distanza in direzione orizzontale]

D = ……………………………………..~ ……… m $d + l\cos\alpha + v\cos\alpha((2(h_M - l\sin\alpha)/g)^{1/2} + (2h_M/g)^{1/2}) = d + l\cos\alpha + v\cos\alpha(v\sin\alpha/g + (2h_M/g)^{1/2}) = \sim$ 14 m [D è chiaramente dato dalla somma dei tratti orizzontali percorsi per arrivare sulla cima del piano inclinato e della distanza orizzontale percorsa, a velocità costante $v\cos\alpha$, nel volo, cioè nel tempo necessario ad arrivare da $l\sin\alpha$ ad h_M più quello necessario a cadere da h_M al suolo]

2. Un semplicissimo (ed irrealistico) modello "planetario" di atomo di idrogeno prevede che un protone di carica q = 1.6x10^{-19} C sia **fisso** nello spazio, e che attorno a lui possa ruotare, su un'orbita **circolare**, un elettrone di carica – q e massa m = 9.0x10^{-31} Kg. [Usate il valore κ = 9.0x10^9 Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica; trascurate ogni effetto della forza peso ed ogni forma di attrito nel moto dell'elettrone]

a) Sapendo che il raggio dell'orbita vale R = 5.0x10^{-11} m, e supponendo che il moto sia circolare **uniforme**, quanto vale la velocità angolare ω? [È sufficiente che esprimiate l'ordine di grandezza!]

ω = …………………………………~ ……… rad/s $(\kappa q^2/(mR^3))^{1/2} \sim 10^{16}$ rad/s [la forza centripeta, pari in modulo a $m\omega^2 R$, è data dall'attrazione elettrica, pari in modulo a $\kappa qQ/R^2$, da cui la soluzione]

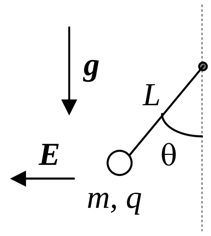
b) Se il raggio dell'orbita raddoppia, cioè diventa $R' = 2R = 1.0\text{x}10^{-10}$ m, quanto vale la variazione di energia cinetica ΔE_K? [Anche qui basta l'ordine di grandezza!]

ΔE_K = ...~ .... J $(m/2)(v'^2 - v^2) = (m/2)(\omega'^2 R'^2 - \omega^2 R^2) = (\kappa q^2/2)(1/R' - 1/R) = -(\kappa q^2/(4R)) \sim -10^{-18}$ J [nell'ultimo passaggio si è sfruttato quanto trovato nella risposta precedente, cioè che $\omega^2 = \kappa q^2/(mR^3)$]

c) Quanto vale il lavoro L fatto dalla forza elettrica quando il raggio dell'orbita passa da R a R'? [Fate attenzione al fatto che la forza elettrica **non** è uniforme, ma dipende dal raggio r, che varia tra R e R'; ricordate che la forza elettrica ha direzione radiale; vi farà inoltre comodo rammentare la seguente regola di integrazione indefinita per una variabile generica ξ: $\int 1/\xi^2 \, d\xi = -1/\xi$; per questa risposta non serve che diate né il valore numerico, né l'ordine di grandezza]

L = ... $\int_R^{R'} F_{Elettrica}\, dr = \int_R^{R'} (-\kappa q^2/r^2)\, dr = -\kappa q^2 \int_R^{R'} 1/r^2\, dr = \kappa q^2 (1/R' - 1/R) = -\kappa q^2/(2R) = 2\Delta E_K$ [nel calcolo fate attenzione ai segni:è necessario ricordare che la forza tra cariche di segno opposto è attrattiva, cioè diretta in verso opposto rispetto a quello di integrazione]

3. Una massa puntiforme m = 100 g è legata a una corda inestensibile di massa trascurabile di lunghezza L = 20 cm, il cui altro estremo è legato ad un piolo infisso su un piano verticale; la massa porta una carica elettrica $q = 1.0\text{x}10^{-3}$ C. Nello spazio è presente un campo elettrico, diretto orizzontalmente nel verso di figura e di modulo E. La situazione iniziale è descritta in figura: la massa è ferma in equilibrio e la corda forma un angolo $\theta = \theta_0$ = 45 gradi rispetto alla verticale. [Usate il valore $\kappa = 9.0\text{x}10^9$ Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica ed il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) = 0.71$ e $sin(\pi/4)cos(\pi/4) = 1/2$]



a) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della tensione T della corda?

T = ... = ... N $mg/\cos\theta_0 = 1.4$ N [questo risultato si può ottenere anche senza conoscere il valore di E, che sarà determinato nella prossima risposta ; a questo scopo è sufficiente scegliere in modo « furbo » la direzione lungo la quale si scrive la condizione di equilibrio. In questo caso tale direzione è quella verticale, dove E non agisce : la componente verticale della tensione, $T\cos\theta_0$, deve uguagliare in modulo la forza peso, mg, da cui la soluzione]

b) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo E del campo elettrico applicato?

E = ...= .... N/C $(mg/q)\, tg\theta_0 = 9.8\text{x}10^2$ N/C [si ottiene subito impostando l'equilibrio in direzione orizzontale : si ha per i moduli $qE = T\sin\theta_0$, da cui, sostituendo il risultato del punto precedente, si ottiene la risposta]

c) Ad un dato istante, il campo elettrico viene portato istantaneamente al valore $E' = E/2$; la massa quindi non è più in equilibrio e si mette in movimento verso il basso. Quanto vale la velocità v con cui la massa passa per la verticale (cioè la velocità v della massa quando θ = 0)? [Suggerimento: considerate tutte le forze che agiscono sulla massa carica e le loro direzioni!]

v = ...~ .... m/s $(2L(g(1-\cos\theta_0) - (qE'/m)\sin\theta_0))^{1/2} = (2L(g(1-\cos\theta_0) - (qE/(2m))\sin\theta_0))^{1/2} = (2Lg((1-\cos\theta_0) - (tg\theta_0/2)\ \sin\theta_0))^{1/2} \sim$ impossibile, perché l'argomento della radice quadrata è negativo (vuol dire semplicemente che la massa **non** arriva al punto più basso !) [viene dalla conservazione dell'energia meccanica : $\Delta E_K = (m/2)\, v^2 = -\Delta U_G - \Delta U_E = mgL(1-\cos\theta_0) - qE'L\sin\theta_0$; notate che, dato che le due forze, gravitazionali ed elettrica, entrambe conservative, agiscono sui due assi verticale ed orizzontale, la variazione di energia è data dal prodotto forza per spostamento nelle direzioni in cui la forza agisce]