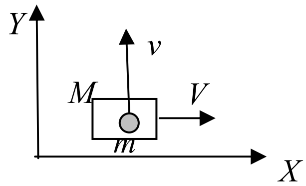
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 6/4/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………..   Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un carrellino di massa M = 1.0 Kg si muove **senza attrito** su un piano orizzontale con velocità di modulo V = 1.0 m/s diretta lungo il verso positivo dell'asse X (vedi figura). Sul carrellino è montato un "cannoncino a molla" che ad un dato istante spara un proiettile di massa m = 0.10 Kg con velocità v = 10 m/s diretta lungo il verso positivo dell'asse Y. [Si intende che dopo lo "sparo" la massa del carrellino diminuisce di una quantità m]

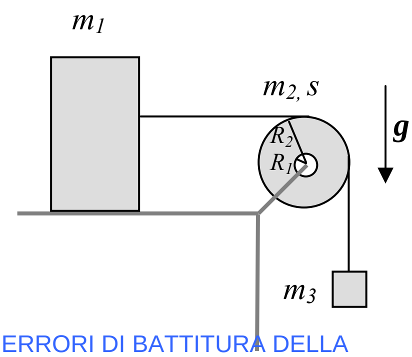


Vista dall'alto

   a) Quanto vale **il modulo** della velocità V' del carrellino subito dopo lo "sparo"?
   V'= ……………………………………~ ……… m/s $(M^2V^2+m^2v^2)^{1/2}/(M-m)$ = 1.6 m/s   [il sistema è isolato, e si deve conservare **vettorialmente** la quantità di moto **totale** ; componente per componente, dovrà allora essere : $(M-m)V'_X = MV$; $mv+(M-m)V'_Y = 0$. Poiché $V' = (V'^2_X+V'^2_Y)^{1/2}$ è immediato ricavare la soluzione]

   b) Sapendo che il cannoncino è costituito da una molla di costante elastica k = 1.1x10^2 N/m, quanto vale la compressione iniziale Δ_M di questa molla? [Cercate di capire cosa vi sto chiedendo!]
   Δ_M = ……………………………………....= .... m $(((M-m)V'^2+mv^2-MV^2)/k)^{1/2}=(((M-m)(M^2V^2+m^2v^2)/(M-m)^2+mv^2-MV^2)/k)^{1/2}=((mM/(k(M-m))(V^2+v^2))^{1/2}$ = 0.30 m [per la conservazione dell'energia meccanica, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA} =((M-m)/2)V'^2+ (m/2)v^2 - (M/2)V^2- (k/2)\Delta_M^2$, da cui, con un po' di algebra, la soluzione]

2. Un blocco di massa m_1 = 5.0 Kg può scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Al blocco è attaccata una fune inestensibile e di massa trascurabile, che dopo aver girato attorno alla gola di una puleggia, termina con una massa m_3 = 10.0 Kg che può muoversi su un piano verticale come indicato in figura. La puleggia è realizzata con un disco **disomogeneo** di massa m_2 = 20 Kg e spessore s = 20 cm; il disco è **cavo** fino al raggio R_1 = 10 cm, e quindi, per $R_1 \le r \le R_2$, cioè fino al raggio esterno R_2 = 50 cm, presenta una densità di massa disomogenea $\rho_m(r) = \rho_0 R_2^3/r^3$, con ρ_0 costante (non è un dato del problema!) ed r distanza dall'asse. Il disco è imperniato in modo da ruotare **senza attrito** attorno al proprio asse.



ERRORI DI BATTITURA DELLA VERSIONE ORIGINALE CORRETTI

   a) Quanto vale il momento di inerzia I della puleggia, cioè del disco? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; **nota:** se non sapete calcolarvi I, provate ugualmente a svolgere il resto del problema lasciando indicato con I il mom. di inerzia]
   I = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $\int_{R1}^{R2} \rho_m\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr = \rho_0 \int_{R1}^{R2}(R_2^3/r^3)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr = (m_2/(\int_{R1}^{R2} (R_2^3/r^3)2\pi\, s\, r\, dr))(\int_{R1}^{R2}(R_2^3/r^3)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr)= (m_2/(\int_{R1}^{R2} r^{-2} dr))(\int_{R1}^{R2} dr) = (m_2/((1/R_1)-(1/R_2)))(R_2-R_1) = m_2 R_1R_2 =$ 1.0 Kg m^2 [poiché ρ_0 non è un dato del problema, occorre ricavarselo dalla massa, ricordando che $m = \int_{VOL} \rho_m\, dV$; come elemento di volume, vista la simmetria cilindrica, si è usato $dV = 2\pi r s dr$, cioè si è suddiviso il cilindro in tanti gusci concentrici]

   b) Supponendo che ad un dato istante il sistema, precedentemente fermo, sia lasciato libero di muoversi, quanto vale il modulo della velocità v del blocco m_1 quando la massa m_3 è scesa verso il basso per un tratto d = 1.0 m? [Considerate che la fune, inestensibile, **non slitti** sulla gola della puleggia, ed usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

v = ……………………………………… ~ ………… m/s $(2m_3gd/(m_1+m_3+I/R_2^2))^{1/2}$ ~ 3.2 m/s
[si conserva l'energia meccanica del sistema, per cui $0 = \Delta U + E_K = - m_3gd + (m_1/2)v_1^2+(m_3/2)v_3^2+(I/2)\omega^2$; dato che la fune è inestensibile e non slitta sulla puleggia (di raggio esterno R_2), la relazione tra le velocità è $v = v_1 = v_3 = \omega R_2$]

c) Quanto vale il modulo dell'accelerazione a con cui si muove il blocco m_3? [Fate attenzione a considerare bene tutti gli elementi del sistema e ricordate che la fune, inestensibile, **non slitta** sulla gola della puleggia]
a = ……………………………………… ~ ………… m/s^2 $gm_3/(m_1+m_3+I/R_2^2)$ ~ 5.2 m/s^2 [si ottiene risolvendo il sistema di tre equazioni che regolano la dinamica dei tre elementi; dette T_1 e T_2 le tensioni della fune "a sinistra e a destra della puleggia", si ha: $m_1a_1 = T_1$; $(T_2-T_1)R_2 = I\,\alpha$; $m_3a_3 = m_3g - T_2$. La relazione tra le accelerazioni dovuta a fune inestensibile che non slitta è $a = a_1 = \alpha R_2 = a_3$]

d) Quanto tempo τ occorre affinché la massa m_3 , partendo da ferma, raggiunga la velocità v di cui al punto b)?
τ = ……………………………………… ~ ………… s $v/a = (2d\ (m_1+m_3+I/R_2^2)/(gm_3))^{1/2}$ ~ 0.62 s [l'accelerazione è costante, il moto è uniformemente accelerato!]

3. Un campione di $n = 2.0\text{x}10^{-1}$ moli di gas perfetto monoatomico si trova alla temperatura iniziale T_0 = 300 K all'interno di un recipiente cilindrico di sezione di area S = 10 cm^2 ed altezza molto grande. Inizialmente, il tappo del recipiente, che ha **massa trascurabile**, è **fisso** rispetto alla parete laterale del cilindro, e l'altezza dell volume occupato dal gas è h_0 = 8.3 cm.

a) Il recipiente viene messo a contatto con una sorgente di calore (un fornellino!) che si trova a temperatura T_1 = 600 K ed il gas viene portato a questa temperatura. Quanto vale la variazione ΔP della pressione del gas al termine del processo di riscaldamento, che potete supporre **reversibile**? [Ricordate che la costante dei gas perfetti vale R = 8.3 J/(K mole)]
ΔP = ………………………………………= ……… Pa $(nR/(Sh_0))(T_1-T_0)$ = 6.0x10^6 Pa

b) Successivamente, mentre il recipiente **resta a contatto con la sorgente di calore alla temperatura T_1,** il sistema che fissa il tappo alla parete viene scollegato, così che esso diventa **libero di muoversi** in direzione verticale in una trasformazione molto lenta, che passa per stati di equilibrio (cioè è approssimativamente **reversibile**). Sapendo che la pressione esterna vale P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa, quanto vale l'altezza h del volume occupato dal gas al termine del processo? [Individuate il tipo di trasformazione che il gas subisce, e ragionate di conseguenza]
h = ………………………………………= ……… m $h_0\, nRT_1/(Sh_0P_{ATM})$ = 10 m [si considera come un 'espansione isoterma reversibile che si arresta quando il gas raggiunge P_{ATM}]

c) Quanto vale il calore Q scambiato dal gas con la sorgente durante quest'ultimo processo ? [Può esservi utile ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, i calori specifici molari a volume e pressione costante valgono rispettivamente $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$]
Q = ………………………………………= ……… J $L = nRT_1 ln(h/h_0)$ = 4.8x10^3 J [dal primo principio per un'isoterma, n cui $\Delta U = 0$]

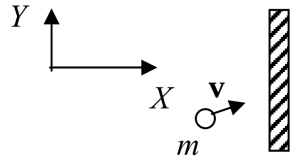
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 6/4/2006 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 6/4/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni:** riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. **Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

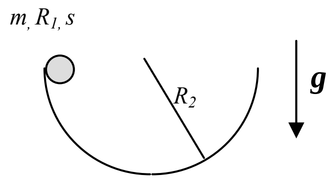
1. Un pallone (un po' sgonfio) di massa m = 0.50 Kg arriva contro una parete rigida verticale, con velocità di componenti v_X = 8.0 m/s, v_Y = 6.0 m/s (vedi figura). L'urto **non è completamente elastico** e una quantità di energia pari ad η=0.15 dell'energia iniziale del pallone viene **persa** nel processo (per riscaldamento del pallone).



   a) Quanto vale la componente v'_X della velocità del pallone subito dopo l'urto? [Occhio a cosa si conserva e cosa non si conserva! Trascurate gli effetti della gravità]
   v'_X = …………………………………….....= .... m/s $((1-\eta)(v_X^2+v_Y^2)-v_Y^2)^{1/2}$ = 7.0 m/s [il sistema è isolato lungo Y, poiché la parete può esercitare forze solo lungo X; quindi la componente Y della velocità dopo l'urto è $v'_Y = v_Y$; d'altra parte, dopo l'urto l'energia cinetica deve essere $(m/2)(v'^2_X+v'^2_Y)=(m/2)(v'^2_X+v_Y^2)=(1-\eta)(m/2)(v_X^2+v_Y^2)$, da cui la soluzione]

   b) Supponendo che ci sia Ronaldinho a tirare questo pallone, e che, dopo averlo tirato una volta, sia in grado di tirarlo di nuovo al volo contro la parete, in modo che la velocità dell'urto sia sempre la stessa, e che lo faccia in successione e sia così rapido da riuscire a farlo con una frequenza altissima, f = 10 s^{-1} (cioè gli urti si susseguono mediamente ogni $\Delta t = 1/f$), e sapendo che la parete ha superficie S = 1.0 m^2, quanto vale la pressione **media** P esercitata dalle pallonate sulla parete stessa? [È qualcosa di simile al modello cinetico di gas usato per interpretare l'origine della pressione, e supponete di poter ragionare in modo simile a quanto fatto in quel problema!]
   P = …………………………………….....~ .... Pa $|\Delta p_X| / (\Delta t S) = m(v_X - v'_X)f/S$ = 5.0 Pa
   [per ogni urto si ha una variazione della quantità di moto lungo X pari a $\Delta p_X = m(v'_X - v_X)$; per il teorema dell'impulso, deve essere $\Delta p_X = F\Delta t$, dove la forza F è proprio quella che, mediamente, dà origine alla pressione; si è usato il modulo per evitare di dover discutere sui segni, tenendo conto che sicuramente la pressione esercitata dalle pallonate sulla parete è uguale, in modulo, a quella che la parete esercita "sulle pallonate"]

2. Un cilindro **disomogeneo** di massa m = 9.0 Kg, lunghezza s = 10 cm e raggio R_1 = 20 cm si trova sulla sommità di una guida semicircolare di raggio R_2 = 1.0 m disposta su un piano verticale come in figura. Il cilindro presenta una densità di massa che dipende dalla distanza dall'asse r secondo la legge $\rho_m(r) = \rho_0\, r^2/R_1^2$, con ρ_0 costante (non è un dato del problema!). Supponete che le condizioni siano tali da garantire moto di **rotolamento puro** (senza strisciamento) del cilindro sulla guida.



   a) Quanto vale il momento di inerzia I del cilindro per rotazioni attorno al suo asse? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; **nota:** se non sapete calcolarvi I, provate ugualmente a svolgere il resto del problema lasciando indicato con I il mom. di inerzia]
   I = …………………………………… = ……….. Kg m^2 $\int_0^{R1} \rho_m\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr = \rho_0 \int_0^{R1}(r^2/R_1^2)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr = (m/(\int_0^{R1} (r^2/R_1^2) 2\pi\, s\, r\, dr))(\int_0^{R1}(r^2/R_1^2)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr) = (m/(\int_0^{R1} r^3\, dr))\, (\int_0^{R1} r^5\, dr) = (m/(R_1^4/4))\, (R_1^6/6) = (2/3)m\, R_1^2$ = 24x10^{-2} Kg m^2 [poiché ρ_0 non è un dato del problema, occorre ricavarselo dalla massa, ricordando che $m = \int_{VOL} \rho_m\, dV$; come elemento di volume, vista la simmetria cilindrica, si è usato $dV = 2\pi rs dr$, cioè si è suddiviso il cilindro in tanti gusci concentrici]

   b) Ad un dato istante il cilindro, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi (con un moto di **rotolamento puro**). Quanto vale, in modulo, la velocità v del centro di massa del cilindro quando questo si trova a passare per il punto più basso della guida? [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

v = …………………………………… ~ ……….. m/s $(2mg(R_2-R_1)/(m + I/R_1^2))^{1/2}=(6g(R_2-R_1)/5)^{1/2}$ ~ 3.1 m/s [la forza di attrito fra cilindro è guida non compie lavoro e quindi si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta U + E_K = - mg(R_2-R_1) + (m/2)v^2 + (I/2)\omega^2$; notate che $|R_2-R_1|$ è la variazione di quota del centro di massa del cilindro; inoltre, dato che il rotolamento è puro, la relazione tra le velocità è $v = \omega R_1$]

c) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione a del centro di massa del cilindro quando questo si trova "a metà strada" nel suo percorso verso il basso, cioè quando il segmento che congiunge il centro del cilindro con il centro di curvatura della guida forma un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto alla verticale? [Attenti a considerare tutte le forze che agiscono sul cilindro, che sta facendo un rotolamento puro; ricordate che $sin(\pi/4) = 0.71$]

a = …………………………………… = ……….. m/s^2 $mgsin\theta / (m+I/R_1^2) = gsin\theta/(5/3)$ ~ 4.2 m/s^2 [detta F_A la forza di attrito statico che provoca il rotolamento, le equazioni del moto traslazionale del centro di massa e rotazionale del cilindro sono: $ma = mgsin\theta - F_A$; $F_AR_1 = I\alpha$. Il rotolamento puro implica $\alpha = a/R_1$]

d) Quanto deve valere, al minimo, il coefficiente di attrito (statico) μ tra guida e cilindro che permette il rotolamento puro **nella posizione del punto c)**, cioè per $\theta = \pi/4$?

$\mu \geq$ …………………………………… ≥ ……….. $Ia/(R_1^2 N) = Ia/(R_1^2 mgcos\theta) = ((2/3)mR_1^2)((3/5) gsin\theta)/(R_1^2 mgcos\theta) = (2/5) tg\theta = 0.40$ [chiamando $N = mgcos\theta$ la reazione vincolare della guida sul cilindro, deve essere $N\mu \geq F_A = I\alpha/R_1 = Ia/R_1^2$, da cui il risultato]

2. Un campione di n moli di gas perfetto monoatomico compie un ciclo reversibile costituito da una successione di un'espansione isoterma da P_0 , V_0 a $V_1 = 2V_0$, seguita da una compressione isobara (a pressione costante) fino a V_0, seguita da una isocora (a volume costante) fino a P_0. Tutte le trasformazioni del ciclo possono essere considerate **reversibili**. [In questo problema non ci sono dati numerici: dovete scrivere le risposte in funzione dei dati del problema, che sono quelli qui sopra elencati; esprimete inoltre la costante dei gas perfetti con il simbolo R; *può* farvi comodo ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, i calori specifici molari a volume e pressione costante sono rispettivamente $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$]

a) Come si scrivono le espressioni delle variabili di stato incognite nei vari punti del ciclo? [Qui di seguito c'è l'elenco delle variabili richieste, con ovvio significato dei simboli; tenete bene presente il tipo di trasformazioni]

T_0 = …………………………………… $P_0V_0/(nR)$
P_1 = …………………………………… $P_0V_0/V_1 = P_0/2$
T_1 = …………………………………… T_0 [è un'isoterma!]
T_2 = …………………………………… $T_1V_2/V_1 = T_0V_0/V_1 = T_0/2$
P_2 = …………………………………… $P_1=P_0/2$ [è un'isobara!]

b) Come si esprime il lavoro L_{TOT} prodotto (o subito) dal gas in un ciclo?

L_{TOT} = …………………………………… $L_1+L_2+L_3 = nRT_0ln(V_1/V_0) + P_1(V_2-V_1) + 0 = nRT_0ln(2) - (P_0/2)V_0 = nRT_0(ln(2)-(1/2))$ [è la somma dei lavori compiuti o subiti nelle varie trasformazioni]

c) Quanto vale l'efficienza η del ciclo? [Ricordate che l'efficienza è definita come rapporto tra lavoro fatto e calore **assorbito; nota** : se siete bravi, qui dovreste poter ottenere il **risultato numerico!**]

η = …………………………………… ~ ………. $L_{TOT} / Q_{ASS} = L_{TOT}/ (Q_1 + Q_3) = L_{TOT}/ (L_1+\Delta U_3) = L_{TOT}/(nRT_0ln(V_1/V_0) + nc_V(T_0 - T_2)) = nRT_0(ln(2)-(1/2))/(nRT_0(ln(2)+(3/2)(1/2)) = (ln(2)-(1/2))/(ln(2)+(3/4))$ ~ 0.13 [il calore è negativo nella trasformazione isobara, che quindi non conta; per le altre due si applica rispettivamente il primo principio e la definizione di calore specifico a pressione costante. Sostituendo si riesce a ottenere la risposta numerica]

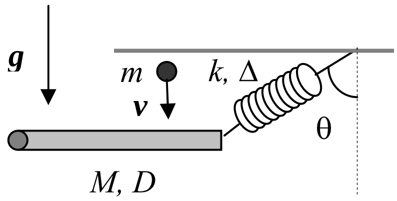
C

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 6/4/2006

Nome e cognome: …………………………………………………….   Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

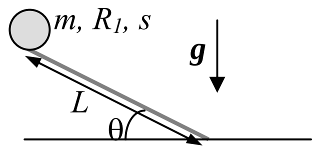
1. Una sottile asta omogenea di massa $M = 3.0$ Kg e lunghezza $D = 1.0$ m è vincolata a ruotare **senza attrito** in un piamo verticale, attorno ad un perno collocato ad un suo estremo (vedi figura). L'altro estremo dell'asta è collegato ad una molla di costante elastica $k = 98$ N/m, il cui altro capo è fissato ad un solaio indeformabile. Il sistema è in equilibrio quando l'asta è orizzontale, come rappresentato in figura, e l'asse della molla forma un angolo $\theta = 60$ gradi rispetto alla verticale.



   a) Quanto vale, in queste condizioni, l'elongazione Δ della molla? [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   Δ = ………………………………….= ……… m $Mg(D/2)/(kD\cos\theta) = Mg/k = 0.30$ m [dall'equilibrio dei momenti delle forze, tenendo conto che il centro di massa si trova al punto di mezzo dell'asta]

   b) Ad un certo istante, una massa $m = 1.0$ Kg cade sull'asta arrivando **verticalmente**, con velocità di modulo $v = 1.0$ m/s, sul punto collocato a distanza $3D/4$ dal perno (vedi figura). In seguito all'urto, la massa rimane attaccata all'asta (in pratica, è come un proiettile che vi si conficca); si osserva che l'asta comincia a ruotare. Quanto vale, in modulo, la velocità angolare di rotazione ω dell'asta **subito dopo** l'urto? [Fate attenzione ad individuare la grandezza che si conserva!]
   ω = ………………………………….~ ……… rad/s $(3mvD/4)/(m(3D/4)^2+MD^2/3)=$ 0.48 rad/s [l'urto (anelastico) tra massa ed asta coinvolge forze interne ; pertanto il momento angolare del sistema rispetto al perno si conserva negli istanti subito prima e subito dopo l'urto. Prima dell'urto è: $L_m = mv(3D/4)$; dopo l'urto il momento angolare è dovuto alla rotazione del sistema asta+massa : $L_s = I\omega$, con $I = I_{ASTA} + I_{massa} = MD^2/3 + mD^2$. Il momento di inerzia dell'asta si calcola secondo le regole « ordinarie » (vedi altrove in questo compito)]

2. Un cilindro **disomogeneo** di massa $m = 9.0$ Kg, lunghezza $s = 10$ cm e raggio $R_1 = 20$ cm si trova sulla sommità di un piano inclinato di lunghezza $L = 4.0$ m ed angolo $\theta = 30$ gradi rispetto all'orizzontale, come descritto in figura. Il cilindro presenta una densità di massa che dipende dalla distanza dall'asse r secondo la legge $\rho_m(r) = \rho_0 R_1/r$, con ρ_0 costante (non è un dato del problema!). Supponete che le condizioni siano tali da garantire moto di **rotolamento puro** (senza strisciamento) del cilindro sulla superficie del piano inclinato.



   a) Quanto vale il momento di inerzia I del cilindro per rotazioni attorno al suo asse? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; **nota:** se non sapete calcolarvi I, provate ugualmente a svolgere il resto del problema lasciando indicato con I il mom. di inerzia]
   I = ………………………………….. = ……….. Kg m^2 $\int_0^{R1} \rho_m \, 2\pi \, s \, r \, r^2 \, dr = \rho_0 \int_0^{R1} (R_1/r) \, 2\pi \, s \, r \, r^2 \, dr = (m/(\int_0^{R1} (R_1/r) 2\pi \, s \, r \, dr))(\int_0^{R1} (R_1/r) \, 2\pi \, s \, r \, r^2 \, dr) = (m/(\int_0^{R1} dr)) (\int_0^{R1} r^2 \, dr) = (m/R_1) (R_1^3/3) = m R_1^2/3 =$ 12x10^{-2} Kg m^2 [poiché ρ_0 non è un dato del problema, occorre ricavarselo dalla massa, ricordando che $m = \int_{VOL} \rho_m \, dV$; come elemento di volume, vista la simmetria cilindrica, si è usato $dV = 2\pi r s dr$, cioè si è suddiviso il cilindro in tanti gusci concentrici]

b) Quanto vale la velocità ω del cilindro quando questo, partendo da fermo, raggiunge la base del piano inclinato? [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che il moto è di **rotolamento puro**]

ω = ... ~ .... rad/s $(2mgL\sin\theta)/(mR_1^2 + I))^{1/2} = (3gL\sin\theta/(2R_1^2))^{1/2}$ ~ 27 rad/s [la forza di attrito fra cilindro e piano non compie lavoro e quindi si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta U + \Delta E_K = - mgL\sin\theta + (m/2)v^2 + (I/2)\omega^2$; notate che $L\sin\theta$ è la variazione di quota del centro di massa del cilindro; inoltre, dato che il rotolamento è puro, la relazione tra le velocità è $v = \omega R_1$]

c) Quanto vale il tempo τ necessario affinché il cilindro raggiunga, muovendosi di rotolamento puro, la base del piano? [Suggerimento: guardate di capire che tipo di moto fa il centro di massa del cilindro e tenete in debito conto tutte le forze che agiscono sul cilindro!]

τ .... ~ .... s $(2L/(mg\sin\theta/(m+I/R_1^2)))^{1/2} = (2L/(g\sin\theta/(4/3))^{1/2}$ ~ 1.5 s [detta F_A la forza di attrito statico che permette il rotolamento, il moto del cm del cilindro segue la legge $ma = mg\sin\theta - F_A$; d'altra parte per il rotolamento deve essere $I\alpha = R_1 F_A$, con $\alpha = a/R_1$ per la condizione di rotolamento. Il sistema di equazioni si può risolvere per trovare a , che risulta costante. Il moto allora è uniformemente accelerato e si ha $\tau = (2L/a)^{1/2}$]

d) Quanto deve valere, al minimo, il coefficiente di attrito (statico) μ tra piano inclinato e cilindro che permette il rotolamento puro?

$\mu \geq$ .... ≥ .... $Ia/(R_1^2 N) = Ia/(R_1^2\, mg\cos\theta) = (1/4) tg\theta = 0.14$ [chiamando $N = mg\cos\theta$ la reazione vincolare della guida sul cilindro, deve essere $N\mu \geq F_A = I\alpha/R_1 = Ia/R_1^2$, da cui il risultato]

3. Un campione di n = 20.0 moli di gas perfetto monoatomico si trova alla temperatura iniziale T_0 = 300 K all'interno di un grande recipiente cilindrico di sezione di area S = 0.500 m^2 ed altezza molto grande. Inizialmente, il tappo del recipiente, che ha **massa trascurabile**, è **fisso** rispetto alla parete laterale del cilindro, e l'altezza del volume occupato dal gas è h_0 = 83.1 cm.

a) Ad un dato istante "magicamente" un blocchettino di metallo di massa m_A = 0.100 Kg e temperatura iniziale T_A = 1000 K viene inserito nel recipiente. Il calore specifico del metallo vale c_A = 1.00x10^3 J/(Kg K). Supponendo **trascurabile il volume del blocchettino** rispetto a quello del gas e supponendo che le pareti del recipiente siano **isolate termicamente,** quanto vale la temperatura di equilibrio T_1 che raggiunge il sistema? [*Può* farvi comodo ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, i calori specifici molari a volume e pressione costante sono rispettivamente $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$, con R = 8.31 J/(K mole), costante dei gas perfetti]

T_1 = ... = ... K $(nc_VT_0 + m_Ac_AT_A)/(nc_V+m_Ac_A)$ = 500 K
[dal bilancio dei flussi di calore, $Q_{GAS} + Q_{BLOCCH} = 0 = nc_V(T_1 - T_0) + m_Ac_A(T-T_A)$]

b) A questo punto il sistema che fissa il tappo alla parete del cilindro viene scollegato, rimanendo libero di muoversi in direzione verticale. Supponendo che la trasformazione subita dal gas in questa fase sia descrivibile come un'espansione **adiabatica reversibile** e sapendo che la pressione esterna vale P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa, quanto vale l'altezza h_1 raggiunta dal tappo alla fine del processo? [In questa fase, trascurate la presenza del blocchettino!]

h_1 = ... = ... m $h_0\ (nRT_1/(Sh_0P_{ATM}))^{1/\gamma}$ = 1.26 m
[dalla legge delle adiabatiche, PV^γ = cost., esprimendo la pressione iniziale in funzione dei dati del problema, tenendo conto che quella finale deve essere P_{ATM} e ricordando che $\gamma = c_P/c_V$ = 5/3 per un gas perfetto monoatomico]

c) Quanto vale il lavoro L fatto o subito dal gas in questa trasformazione? [Anche qui, trascurate la presenza del blocchettino]

L = ... = ... J $-\Delta U = -\ n\ c_V\ (T_{fin}-T_1) = -nc_VT_1((h_0/h_1)^{\gamma-1}-1)$ = 3.00x10^5 J [dal primo principio per le adiabatiche e usando la legge $TV^{\gamma-1}$ = costante]

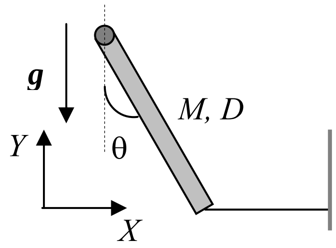
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 6/4/2006 Firma:

D

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 6/4/2006

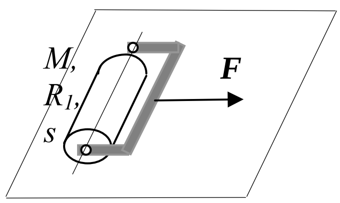
Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



1. Una sottile asta omogenea di massa $M = 3.0$ Kg e lunghezza $D = 1.0$ m è vincolata a ruotare **senza attrito** in un piamo verticale, attorno ad un perno collocato ad un suo estremo (vedi figura). L'altro estremo dell'asta è attaccato ad una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro capo è inchiodato ad una parete indeformabile. Il sistema è in equilibrio quando l'asta forma un angolo $\theta = 60$ gradi rispetto alla verticale e la fune è orizzontale.
   a) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della tensione T della fune? [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   T = ……………………………………~ ……… N $Mg(D/2)\sin\theta/(D\cos\theta) = Mg\,\mathrm{tg}\theta/2 \sim 25$ N [dall'equilibrio dei momenti delle forze, tenendo conto che il centro di massa si trova al punto di mezzo dell'asta ; occhio ad esprimere bene i bracci delle forze !]

   b) Quanto valgono le componenti F_X ed F_Y della reazione vincolare esercitata dal perno sull'asta? [Considerate il sistema di riferimento indicato in figura]
   F_X = ……………………………………~ ……… N $-T \sim -25$ N
   F_Y = ……………………………………= ……… N $Mg = 29$ N [per l'equilibrio delle forze]



2. Un "rullo schiaccia-sabbia" è costituito da un cilindro **disomogeneo** di massa $M = 200$ Kg, raggio $R_1 = 20$ cm e lunghezza $s = 1.0$ m, fatto di un materiale la cui densità di massa dipende dalla distanza r dall'asse secondo la legge $\rho_m(r) = \rho_0\, r/R_1$. L'asse del cilindro è imperniato su un giogo di **massa trascurabile** che consente di applicare all'asse stesso una forza orizzontale di modulo F costante, come rappresentato in figura. Il cilindro è poggiato su una superficie **orizzontale** sulla quale può compiere un moto di **rotolamento puro** (cioè senza strisciamento).
   a) Quanto vale il momento di inerzia I del cilindro per rotazioni attorno al suo asse? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; **nota:** se non sapete calcolarvi I, provate ugualmente a svolgere il resto del problema lasciando indicato con I il mom. di inerzia]
   I = …………………………………… = ……… Kg m^2 $\int_0^{R1} \rho_m\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr = \rho_0 \int_0^{R1} (r/R_1)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr = (M/(\int_0^{R1} (r/R_1) 2\pi\, s\, r\, dr))(\int_0^{R1} (r/R_1)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr) = (M/(\int_0^{R1} r^2\, dr))\, (\int_0^{R1} r^4\, dr = (M/(R_1^3/3))\, (R_1^5/5) = (3/5)\, MR_1^2 = 4.8$ Kg m^2 [poiché ρ_0 non è un dato del problema, occorre ricavarselo dalla massa, ricordando che $m = \int_{VOL} \rho_m\, dV$; come elemento di volume, vista la simmetria cilindrica, si è usato $dV = 2\pi r s dr$, cioè si è suddiviso il cilindro in tanti gusci concentrici]

   b) Supponete che ad un certo istante il rullo si trovi in rotazione con una velocità angolare $\omega = 5.0$ rad/s. Quanto vale il lavoro L che la forza F deve aver compiuto per portarlo a tale velocità facendolo partire da fermo? [Supponete che in ogni istante del suo movimento il moto del rullo sia sempre stato di rotolamento puro, e trascurate gli attriti nella rotazione del cilindro attorno al perno passante per il suo asse; notate che per questa risposta non è necessario conoscere il valore di F!]

L = ……………………………………….... = ... J $(I/2)\ \omega^2 + (M/2)\ \omega^2 R_1^2 = (4/5)MR_1^2\omega^2$ = 160 J [dal bilancio energetico: $L = \Delta E_K = (I/2)\omega^2 + (M/2)v^2$; a causa del rotolamento puro, la velocità del centro di massa vale $v = \omega R_1$]

c) Come si scrive l'accelerazione a del centro di massa del cilindro quando esso si muove di rotolamento puro sotto l'azione della forza F? [Non conoscendo il valore di F, non potete dare una risposta numerica, ma potete solo esprimere il risultato in funzione di F; ricordate che il cilindro sta rotolando senza strisciare!]
a = …………………………………….. $F/(M+I/R_1^2) = F/((8/5)M)$ [detta F_A la forza di attrito statico che permette il rotolamento, il moto del cm del cilindro segue la legge $ma = F - F_A$; d'altra parte per il rotolamento deve essere $I\alpha = R_1 F_A$, con $\alpha = a/R_1$ per la condizione di rotolamento. Il sistema di equazioni si può risolvere per trovare a , che risulta costante e lineamente dipendente da F]

d) Supponendo ora F = 10 N, quanto tempo τ occorre perché il cilindro raggiunga la velocità angolare ω = 5.0 rad/s partendo da fermo?
τ = …………………………………….. = ... s $R_1\omega/a = 8R_1\omega M/(5F)$ = 32 s [il moto è uniformemente accelerato, per cui la velocità del centro di massa vale $v = \omega R_1 = a\tau$]

3. Un campione di $n = 2.0\text{x}10^{-1}$ moli di gas perfetto monoatomico si trova alla temperatura iniziale T_0 = 300 K all'interno di un recipiente cilindrico di sezione di area S = 10 cm^2 ed altezza molto grande. Inizialmente, il tappo del recipiente, che ha **massa trascurabile**, è **fisso** rispetto alla parete laterale del cilindro, e l'altezza dell volume occupato dal gas è h_0 = 8.3 cm.
a) Il recipiente viene messo a contatto con una sorgente di calore (un fornellino!) che si trova a temperatura T_1 = 600 K ed il gas viene portato a questa temperatura. Quanto vale la variazione ΔP della pressione del gas al termine del processo di riscaldamento, che potete supporre **reversibile**? [Ricordate che la costante dei gas perfetti vale R = 8.3 J/(K mole)]
ΔP = …………………………………= ……… Pa $(nR/(Sh_0))(T_1-T_0)$ = 6.0x10^6 Pa

b) Successivamente, mentre il recipiente **resta a contatto con la sorgente di calore alla temperatura T_1,** il sistema che fissa il tappo alla parete viene scollegato, così che esso diventa **libero di muoversi** in direzione verticale in una trasformazione molto lenta, che passa per stati di equilibrio (cioè è approssimativamente **reversibile**). Sapendo che la pressione esterna vale P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa, quanto vale l'altezza h del volume occupato dal gas al termine del processo? [Individuate il tipo di trasformazione che il gas subisce, e ragionate di conseguenza]
h = …………………………………= ……… m $h_0\ nRT_1/(Sh_0P_{ATM})$ = 10 m [si considera come un 'espansione isoterma reversibile che si arresta quando il gas raggiunge P_{ATM}]

c) Quanto vale il calore Q scambiato dal gas con la sorgente durante quest'ultimo processo ? [Può esservi utile ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, i calori specifici molari a volume e pressione costante valgono rispettivamente $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$]
Q = …………………………………= ……… J $L = nRT_1 ln(h/h_0)$ = 4.8x10^3 J [dal primo principio per un'isoterma, n cui ΔU = 0]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 6/4/2006 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 6/4/2006

Nome e cognome: …………………………………………………….. **Matricola: ……………**

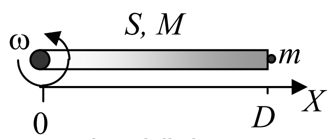
Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un omino, di massa m = 50 Kg, se ne sta fermo all'estremo di sinistra di un carrello, lungo L = 5.0 m e di massa M = 200 Kg. All'inizio, anche il carrello è fermo. Ad un dato istante l'omino comincia a camminare (sul carrello) verso l'estremo destro del carrello stesso, che raggiunge quando ha una velocità v = +10 m/s (misurata rispetto al suolo, cioè rispetto ad un riferimento "fisso").

   a) Supponendo trascurabili gli attriti tra carrello e suolo (che è un piano orizzontale), quanto vale la velocità V del carrello nell'istante in cui l'omino raggiunge la sua estremità? [Considerate il problema unidimensionale e occhio a cosa si conserva!]
   V = ……………………………….= ……… m/s $-mv/M$ = - 2.5 m/s [si conserva la quantità di moto del sistema ; il segno negativo indica che il carrello si muove in direzione opposta rispetto all'omino]

   b) Quanto vale lo spostamento ΔX del carrello quando l'omino raggiunge il suo estremo? [Approssimate il carrello con un segmento **omogeneo** di lunghezza L]
   ΔX = …………………………………....= .... m $- mL/((M+m))$ = - 1.0 m [essendo il sistema isolato lungo X (la direzione del moto in questo problema), la coordinata X del centro di massa non si deve spostare, cioè $x_{CM} = x'_{CM}$.. Centrando il riferimento sull'estremo sinistro della posizione iniziale del carrello, si ha, essendo il carrello omogeneo, $x_{CM} = (L/2)(M/(M+m))$; quando l'omino arriva all'altro estremo, si è spostato di una lunghezza L **rispetto al carrello,** cioè di una lunghezza $L+\Delta X$ rispetto al riferimento fisso ; venendosi a trovare nel punto $L+\Delta X$ (espresso nel riferimento « fisso ») ; d'altra parte la posizione del centro di massa del carrello è $L/2+ \Delta X$. La posizione finale del centro di massa è allora $x'_{CM} =(M(\Delta X+L/2)+m(L+\Delta X))/(M+m)$; risolvendo, si ottiene la soluzione]

2. Una sottile sbarretta **disomogenea**, di sezione di area S = 10 cm^2, lunghezza D = 20 cm, e massa M = 1.0 Kg, è realizzata con un materiale la cui densità di massa dipende dalla distanza x (misurata a partire da un estremo della sbarretta) secondo la legge $\rho_m(x) = \rho_0\, x / D$, con ρ_0 costante (non è un dato del problema!). All'estremità $x = D$ la sbarretta reca inoltre una massa puntiforme (di dimensioni trascurabili!) m = 0.10 Kg. Il sistema può ruotare attorno all'estremità x = 0 della sbarretta, mantenendosi su un piano orizzontale. All'istante t_0 = 0 un motore di potenza **costante** W = 4.8x10^{-3} W, collegato al perno, mette il sistema, inizialmente fermo, in rotazione.



Vista dall'alto

ERRORE DI STAMPA NELL'ORIGINALE CORRETTO!

   a) Quanto vale il momento di inerzia I **complessivo** del sistema per rotazioni attorno al suo perno? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; occhio al fatto che la sbarretta è un sistema **lineare! Nota:** se non sapete calcolarvi I, provate ugualmente a svolgere il resto del problema lasciando indicato con I il mom. di inerzia]
   I = …………………………….. = ... Kg m^2 $\int_0^D \rho_m\, S\, x^2\, dx + mD^2 = \rho_0 \int_0^D (x/D)\, S\, x^2\, dx + mD^2 = (M/(\int_0^D (x/D) S\, dx))(\int_0^D (x/D)\, S\, x^2\, dx) + mD^2 = (M/(\int_0^D x\, dx))\, (\int_0^D x^3\, dx\,) + mD^2 = (M/(D^2/2))(D^4/4) + mD^2 = MD^2/2+mD^2$ = 2.4x10^{-2} Kg m^2 [poiché ρ_0 non è un dato del problema, occorre ricavarselo dalla massa, ricordando che $M = \int_{VOL} \rho_m\, dV$; come elemento di volume, vista la simmetria lineare, si è usato $dV = S dx$, cioè si è suddiviso il cilindro in tante fettine; inoltre, poiché viene chiesto il momento di inerzia **complessivo**, va aggiunto il contributo della massa puntiforme, che vale mD^2]

   b) Supponendo che il motore agisca, cioè fornisca una potenza costante al moto di rotazione del sistema, per un intervallo di tempo Δt = 10 s, quanto vale la velocità angolare ω di rotazione del sistema? [Trascurate ogni possibile attrito]
   ω = ………………………………… = ... rad/s $(2W\Delta t/I)^{1/2}$ = 2.0 rad/s [dal bilancio energetico: deve essere $L = W\Delta t = \Delta E_K = (I/2)\, \omega^2$, da cui la soluzione]

c) Immaginate ora che, dopo questo intervallo di tempo, il motore venga scollegato, e il sistema continui a ruotare **senza attrito** attorno al suo perno. Dopo un po' di tempo, per effetto di **forze interne**, la massa puntiforme m viene "espulsa" dalla sbarretta. Quanto vale la velocità angolare ω' della sbarretta subito dopo l'espulsione del frammento? [Attenti a cosa si conserva!]
ω' = …………………………………… = ... rad/s $\omega I/(I-mD^2)$ = 2.4 rad/s [le forze che provocano l'espulsione sono interne e si conserva il momento angolare. Pertanto $I\omega = I'\omega'$, con I' momento di inerzia della **sola** sbarretta, che vale $I - mD^2$; si suppone, ovviamente, che il frammento espulso abbia momento angolare nullo]

d) Quanto vale il lavoro L compiuto dalle forze esterne per espellere il frammento?
L = …………………………………… = ... J $((I-mD^2)/2)\ \omega'^2 - (I/2)\omega^2 = 9.6\text{x}10^{-3}$ J
[dal bilancio energetico prima e dopo la frammentazione:l'"urto" è ovviamente anelastico]

Ehm, dalla risposta si capiva che intendevo il lavoro delle forze "INTERNE"…!

2. Un campione di n moli di gas perfetto monoatomico compie un ciclo reversibile costituito da una successione di un'espansione isoterma da P_0 , V_0 a $V_1 = 2V_0$, seguita da una compressione isobara (a pressione costante) fino a V_0, seguita da una isocora (a volume costante) fino a P_0. Tutte le trasformazioni del ciclo possono essere considerate **reversibili**. [In questo problema non ci sono dati numerici: dovete scrivere le risposte in funzione dei dati del problema, che sono quelli qui sopra elencati; esprimete inoltre la costante dei gas perfetti con il simbolo R; *può* farvi comodo ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, i calori specifici molari a volume e pressione costante sono rispettivamente $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$]

a) Come si scrivono le espressioni delle variabili di stato incognite nei vari punti del ciclo? [Qui di seguito c'è l'elenco delle variabili richieste, con ovvio significato dei simboli; tenete bene presente il tipo di trasformazioni]
T_0 = …………………………………… $P_0V_0/(nR)$
P_1 = …………………………………… $P_0V_0/V_1 = P_0/2$
T_1 = …………………………………… T_0 [è un'isoterma!]
T_2 = …………………………………… $T_1V_2/V_1 = T_0V_0/V_1 = T_0/2$
P_2 = …………………………………… $P_1=P_0/2$ [è un'isobara!]

b) Come si esprime il lavoro L_{TOT} prodotto (o subito) dal gas in un ciclo?
L_{TOT} = …………………………………… $L_1+L_2+L_3 = nRT_0\ln(V_1/V_0) + P_1(V_2-V_1) + 0 = nRT_0\ln(2) - (P_0/2)V_0 = nRT_0(\ln(2)-(1/2))$ [è la somma dei lavori compiuti o subiti nelle varie trasformazioni]

c) Quanto vale l'efficienza η del ciclo? [Ricordate che l'efficienza è definita come rapporto tra lavoro fatto e calore **assorbito; nota** : se siete bravi, qui dovreste poter ottenere il **risultato numerico!**]
η = …………………………………… ~ .... $L_{TOT} / Q_{ASS} = L_{TOT}/ (Q_1 + Q_3) = L_{TOT}/ (L_1+\Delta U_3) = L_{TOT}/(nRT_0\ln(V_1/V_0) + nc_V(T_0 - T_2)) = nRT_0(\ln(2)-(1/2))/(nRT_0(\ln(2)+(3/2)(1/2)) = (\ln(2)-(1/2))/(\ln(2)+(3/4)) \sim 0.13$ [il calore è negativo nella trasformazione isobara, che quindi non conta; per le altre due si applica rispettivamente il primo principio e la definizione di calore specifico a pressione costante. Sostituendo si riesce a ottenere la risposta numerica]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 6/4/2006 Firma:

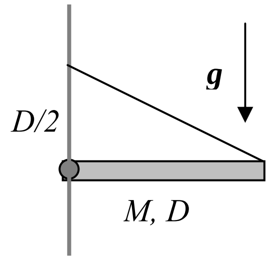
F

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 6/4/2006

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una sottile asta omogenea di massa $M = 3.0$ Kg e lunghezza $D = 1.0$ m è vincolata a ruotare **senza attrito** in un piano verticale, attorno ad un perno collocato ad un suo estremo (vedi figura). L'altro estremo dell'asta è attaccato ad una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro capo è inchiodato alla stessa parete verticale che sostiene il perno di rotazione, ad una distanza *D/2* rispetto a questo. Il sistema è in equilibrio nelle condizioni di figura, con l'asta orizzontale.



   a) Quanto vale, in queste condizioni, il modulo della tensione T della fune? [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

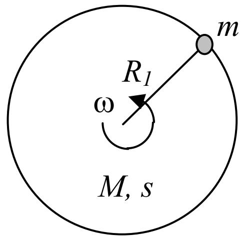
   Risultato numerico corretto 10/4/06

   T = …………………………………~ ……… N $Mg(D/2)/(D\sin\theta) = Mg(D^2+(D/2)^2)^{1/2}/(2D) = Mg(5/4)^{1/2} \sim 33$ N   [dall'equilibrio dei momenti delle forze, tenendo conto che il centro di massa si trova al punto di mezzo dell'asta ed avendo espresso il coseno dell'angolo θ necessario per determinare il momento della tensione attraverso le lunghezze dei cateti *D* e *D/2*]

   b) Ad un dato istante, la fune viene tagliata in modo istantaneo. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione angolare α con cui l'asta **comincia** a ruotare?

   α = …………………………………~ ……… rad/s^2 $MgD/(2I) = 3MgD/(2MD^2) = (3/2)g/D \sim 15$ rad/s^2 [dall'equazione del moto angolare, $I\alpha = MgD/2$; I è il momento di inerzia dell'asta (omogenea) rispetto al perno, e si può calcolare con le tecniche « ordinarie » usate altrove in questo compito]

2. In un luna park c'è una piattaforma orizzontale che ha la forma di un disco di massa $M = 500$ Kg, raggio $R_1 = 10$ m e spessore $s = 1.0$ m, che può ruotare **senza attrito** attorno al suo asse. Il materiale che costituisce il disco è **disomogeneo** e la sua densità di massa dipende dalla distanza dall'asse r secondo la legge $\rho_m(r) = \rho_0\, r/R_1$, con ρ_0 costante (non è un dato del problema!). Sulla piattaforma si trova un bambino, che approssimerete con un punto materiale di massa $m = 20$ Kg. Inizialmente il bambino si trova alla periferia (sul bordo) del disco, come in figura, ed il sistema è in rotazione attorno all'asse del disco con velocità angolare costante $\omega = 2.0$ rad/s.



Vista dall'alto

ERRORI DI STAMPA DELLA VERSIONE ORIGINALE CORRETTI!

   a) Quanto vale il momento di inerzia I **complessivo** del sistema costituito da piattaforma + bambino? [Calcolatelo per rotazioni attorno all'asse del disco; può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; **nota:** se non sapete calcolarvi I, provate ugualmente a svolgere il resto del problema lasciando indicato con I il mom. di inerzia]

   I = …………………………………= ……… Kg m^2 $\int_0^{R1} \rho_m\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr + mR_1^2 = \rho_0 \int_0^{R1}(r/R_1)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr + mR_1^2 = (M/(\int_0^{R1}(r/R_1)2\pi\, s\, r\, dr))(\int_0^{R1}(r/R_1)\, 2\pi\, s\, r\, r^2\, dr) + mR_1^2 = (M/(\int_0^{R1} r^2\, dr))\,(\int_0^{R1} r^4\, dr) + mR_1^2 = (M/(R_1^3/3))\,(R_1^5/5) + mR_1^2 = (3/5)\,MR_1^2 + mR_1^2 = 3.2\text{x}10^4$ Kg m^2 [poiché ρ_0 non è un dato del problema, occorre ricavarselo dalla massa, ricordando che $m = \int_{VOL} \rho_m\, dV$; come elemento di volume, vista la simmetria cilindrica, si è usato $dV = 2\pi r s\, dr$, cioè si è suddiviso il cilindro in tanti gusci concentrici; inoltre, dato che viene richiesto il momento di inerzia **complessivo**, si è sommato quello del bambino, che vale mR_1^2]

   b) Quanto vale l'energia cinetica E_K del sistema?

   E_K = ………………………………… = ... J $(I/2)\,\omega^2 = 6.4\text{x}10^4$ J

c) Immaginate ora che il bambino cammini verso il centro del disco. Quanto vale la velocità angolare ω' del disco quando il bambino raggiunge il centro? [Ricordate che non c'è nessuna forza che mantiene in rotazione il disco, e che gli attriti sono **trascurabili**]
ω' = ………………………………… ~ .... rad/s $\omega\, I/(I-mR_1^2) \sim 2.1$ rad/s [le forze che fanno muovere il bambino sono interne e si conserva il momento angolare. Pertanto $I\omega = I'\omega'$, con I' momento di inerzia del **solo** disco, che vale $I - mR_1^2$]

d) Quanto vale il lavoro L che il bambino deve compiere per muoversi dalla periferia al centro del disco?
L = ………………………………… = ... J $((I-mR_1^2)/2)\, \omega'^2 - (I/2)\omega^2 = 4.3\text{x}10^3$ J
[dal bilancio energetico prima e dopo il movimento del bambino]

3. Un campione di n = 20.0 moli di gas perfetto monoatomico si trova alla temperatura iniziale T_0 = 300 K all'interno di un grande recipiente cilindrico di sezione di area S = 0.500 m^2 ed altezza molto grande. Inizialmente, il tappo del recipiente, che ha **massa trascurabile**, è **fisso** rispetto alla parete laterale del cilindro, e l'altezza del volume occupato dal gas è h_0 = 83.1 cm.
   a) Ad un dato istante "magicamente" un blocchettino di metallo di massa m_A = 0.100 Kg e temperatura iniziale T_A = 1000 K viene inserito nel recipiente. Il calore specifico del metallo vale c_A = 1.00x10^3 J/(Kg K). Supponendo **trascurabile il volume del blocchettino** rispetto a quello del gas e supponendo che le pareti del recipiente siano **isolate termicamente,** quanto vale la temperatura di equilibrio T_1 che raggiunge il sistema? [*Può* farvi comodo ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, i calori specifici molari a volume e pressione costante sono rispettivamente $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$, con R = 8.31 J/(K mole), costante dei gas perfetti]
   T_1 = ………………………………… = ... K $(nc_VT_0 + m_Ac_AT_A)/(nc_V+m_Ac_A)$ = 500 K
   [dal bilancio dei flussi di calore, $Q_{GAS} + Q_{BLOCCH} = 0 = nc_V(T_1 - T_0) + m_Ac_A(T-T_A)$]

   b) A questo punto il sistema che fissa il tappo alla parete del cilindro viene scollegato, rimanendo libero di muoversi in direzione verticale. Supponendo che la trasformazione subita dal gas in questa fase sia descrivibile come un'espansione **adiabatica reversibile** e sapendo che la pressione esterna vale P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa, quanto vale l'altezza h_1 raggiunta dal tappo alla fine del processo? [In questa fase, trascurate la presenza del blocchettino!]
   h_1 = ………………………………… = ... m $h_0\ (nRT_1/(Sh_0P_{ATM}))^{1/\gamma}$ = 1.26 m
   [dalla legge delle adiabatiche, PV^γ = cost., esprimendo la pressione iniziale in funzione dei dati del problema, tenendo conto che quella finale deve essere P_{ATM} e ricordando che $\gamma = c_P/c_V = 5/3$ per un gas perfetto monoatomico]

   c) Quanto vale il lavoro L fatto o subito dal gas in questa trasformazione? [Anche qui, trascurate la presenza del blocchettino]
   L = ………………………………… = ... J $-\Delta U = -\ n\ c_V\ (T_{fin}-T_1) = -nc_VT_1((h_0/h_1)^{\gamma-1}-1)$ = 3.00x10^5 J [dal primo principio per le adiabatiche e usando la legge $TV^{\gamma-1}$ = costante]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 6/4/2006 Firma: