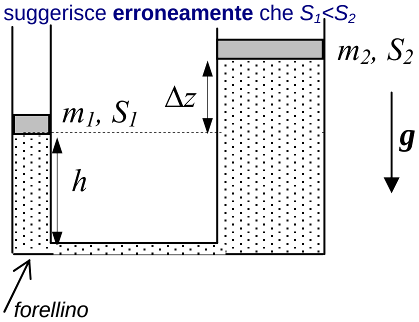
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 19/5/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

Attenzione: come comunicato durante lo svolgimento della prova, la figura suggerisce **erroneamente** che $S_1<S_2$



3. Un liquido incomprimibile, di densità di massa ρ_M = 2.0x10^3 Kg/m^3 e viscosità trascurabile, è contenuto in un recipiente cilindrico di sezione S_1 = 1.0x10^2 cm^2; il recipiente è dotato di un tappo scorrevole (senza attrito) di massa m_1 = 20 Kg, posto a contatto con la pressione atmosferica P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa. Il tappo si trova ad un'altezza h = 20 cm rispetto alla base del recipiente, che è collegato, tramite un sottile tubicino, ad un altro recipiente cilindrico, di sezione S_2 = 50 cm^2, dotato di un tappo scorrevole (senza attrito) di massa m_2 = 5.0 Kg. La figura rappresenta una visione schematica del sistema.

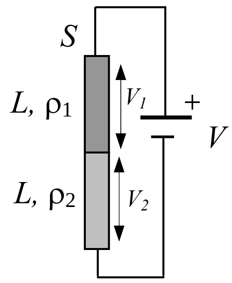
a) In condizioni di equilibrio, quanto vale la differenza Δz tra le quote dei due tappi?

Δz = ………………………………….= ……… m $(m_1/S_1 - m_2/S_2)/\rho_M$ = 0.50 m [si ottiene uguagliando le pressioni a quota costante, per esempio alla base dei due recipienti : si ha allora $P_{ATM} + m_1g/S_1 + \rho_M gh = P_{ATM} + m_2g/S_2 + \rho_M g(h+\Delta z)$, da cui il risultato]

b) Ad un dato istante si pratica un foro alla base di uno dei due recipienti, ad esempio nel punto indicato con una freccia in figura; il liquido comincia allora ad uscire, con una certa velocità v. Supponendo che il foro sia **piccolo** (cioè che il livello del liquido scenda **lentamente**), quanto vale v? [Nella soluzione, potete benissimo trascurare la presenza dell'altro recipiente, che non fa effetto; inoltre usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità, diretta ovviamente "verso il basso", come in figura]

v = …………………………………… ~ ………. m/s $(2gh+2m_1g/(\rho_M S_1))^{1/2}$ ~ 4.8 m/s

[viene dal teorema di Bernoulli, notamdo che fuori dal foro il liquido « trova » una pressione P_{ATM} e che la velocità del liquido che si trova nel recipiente è trascurabile, dato che il foro è piccolo]



2. Avete due bacchette cilindriche, entrambe di sezione S = 1.0 cm^2 e lunghezza L = 10 cm. Le due bacchette sono conduttrici: la prima è fatta di un materiale con resistività elettrica ρ_1 = 10x10^{-5} ohm m, e l'altra di un materiale con ρ_2 = 50x10^{-5} ohm m. Le due bacchette sono unite "faccia a faccia" e collegate ad un generatore (ideale) di differenza di potenziale V = 6.0 V come indicato in figura, il quale fa scorrere della corrente "nel sistema" delle due bacchette. [Rispondete a tutte le domande del problema supponendo di aver raggiunto condizioni di **equilibrio**]

a) Quanto valgono i moduli delle **densità di corrente** j_1 e j_2 nelle due bacchette? [Ricordatevi della definizione di queste grandezze e supponete, ragionevolmente, che la corrente fluisca **uniformemente** all'interno di ciascuna bacchetta, con direzione lungo l'asse delle bacchette stesse]

j_1 = ……………………………………....= .... A/m^2 $(V/R_{TOT})/S$ = 1.0x10^5 A/m^2 [dalla definzizione $j = I/S$, essendo I la corrente che fluisce **nella serie di resistenze,** $I = V/R_{TOT}$; notate che, in queste condizioni, è $R_{TOT} = R_1 + R_2$, con $R_1 = \rho_1 L/S$ e $R_2 = \rho_2 L/S$]

j_2 = ……………………………………....= .... A/m^2 j_1 = 1.0x10^5 A/m^2 [essendo la corrente a stessa – la carica si conserva ! – e la sezione la stessa nelle due bacchette]

b) Quanto valgono le differenze di potenziale V_1 e V_2 ai capi delle due bacchette (vedi figura)?

V_1 = ………………………………………......= .... V *R_1I = $(\rho_1\ L/S)\ V/((\rho_1+\rho_2)\ L/S)$ = $V\ \rho_1/(\rho_1+\rho_2)$ = 1.0 V* [dalla legge di Ohm]

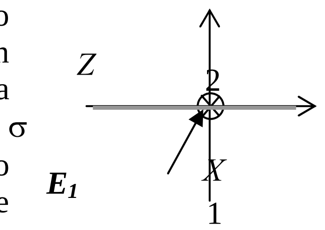
V_2 = ………………………………………......= .... V *R_2I = $(\rho_2\ L/S)\ V/((\rho_1+\rho_2)\ L/S)$ = $V\ \rho_2/(\rho_1+\rho_2)$ = 5.0 V* [ovvero da $V_2 = V-V_1$!]

c) Quanto vale, se c'è, la densità di carica superficiale σ all'interfaccia tra le due bacchette (cioè sulla superficie di contatto)? [Supponete che i materiali delle bacchette abbiano entrambi la costante dielettrica del vuoto, $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m, e fate attenzione a determinare i campi rilevanti]
σ= ………………………………………......= .... C/m^2 $(E_2 - E_1)/\varepsilon_0 = ((V_2 - V_1)/L)/\varepsilon_0 = 4.5\text{x}10^{12}$ C [si applica Gauss ad un cilindretto che attraversa l'interfaccia ; i campi, ovviamente uniformi e diretti lungo gli assi delle bacchette, valgono $E_1 = V_1/L$ e $E_2 = V_2/L$, da cui la soluzione a cui si poteva anche giungere ricordando che $E_1 = j_1/\rho_1$ ed $E_2 = j_2/\rho_2$]

3. Una sfera dielettrica di raggio a = 10 cm è stata caricata in modo **non omogeneo** e risulta dotata di una densità di carica volumica $\rho(r) = \rho_0\ a/r$, con ρ_0 costante (da determinare). [Supponete ovviamente di poter trascurare la divergenza di questa funzione per $r \rightarrow 0$]
   a) Sapendo che la **superficie della sfera** (cioè i punti che si trovano a distanza a dal centro) sono ad un potenziale ϕ = 10 V, quanto vale ρ_0? [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto; se non riuscite a rispondere a questa domanda, provate ad andare avanti lasciando indicato il valore ρ_0]
   ρ_0 = ……………………………………= ……… C/m^3 $\phi a 4\pi\varepsilon_0 / (\int_0^a (a/r) 4\pi r^2 dr) = \phi\varepsilon_0\ /\ (\int_0^a r dr) = 2\ \phi\ \varepsilon_0\ /\ a^2 = 1.8\text{x}10^{-8}$ C/m^3 [il potenziale di una sfera di raggio a che porta una carica Q vale $\phi = Q/(4\pi\varepsilon_0 a)$; d'altra parte deve essere $Q = \int \rho\ dV = \int \rho\ 4\pi r^2\ dr$, avendo scelto l'elemento di volume appropriato per problemi a simmetria sferica]

   b) Come si esprime il modulo del campo elettrico $E(r)$ all'interno della sfera, cioè per $0<r<a$? [Supponete che anche all'interno della sfera la costante dielettrica valga ε_0]
   $E(r)$ = …………………………………… $(\int_0^r \rho_0\ (a/R) 4\pi R^2 dr)\ /\ (\varepsilon_0\ 4\pi r^2) = \rho_0 a/(2\varepsilon_0) = \phi\ /\ a$
   [per Gauss, cnsiderando una superficie sferica di raggio r generico ; notate che, per la particolare scelta della funzione densità di carica, questo campo è **uniforme** anche se ci si trova in un problema a simmetria sferica]

4. Sul piano XY avete una carica distribuita superficialmente con una densità costante σ. Nel semispazio z < 0 misurate un campo elettrico che ha componenti E_{1X}, E_{1Z} come in figura. [Attenzione: in questo problema non sono presenti dati numerici! Esprimete la costante dielettrica del vuoto con ε_0]



   a) Come si scrivono le componenti E_{2X} ed E_{2Z} del campo elettrico che si trova nel semispazio z > 0? [Suggerimento: usate opportunamente le condizioni sul campo elettrostatico stabilite da Gauss e circuitazione…]
   E_{2X} = …………………………………… E_{1X} [la circuitazione del campo su un circuito rettangolare a cavallo del piano, con i lati ortogonali a questo di lunghezza infinitesima, deve essere nulla, da cui il risultato]
   E_{2Z} = …………………………………… $E_{1Z}+\sigma/\varepsilon_0$ [il flusso del campo su un cilindretto di altezza infinitesima a cavallo del piano deve essere pari a σ/ε_0, da cui il risultato]

   b) Come si scrive la differenza di potenziale $V = \phi(a) - \phi(-a)$ tra due punti collocati sull'asse Z nei punti rispettivamente a e $-a$?
   V = …………………………………… $-a(E_{1Z}+E_{2Z})$ [dalla definizione, notando che i campi sono uniformi e che "conviene" scegliere di muoversi lungo l'asse Z; fate attenzione ai segni!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 19/5/2006 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 19/5/2006

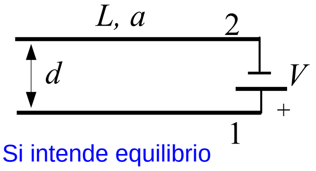
Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: *riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un fluido ideale (incomprimibile e non viscoso), di densità di massa $\rho_M = 4.0 \times 10^3$ Kg/m^3, scorre in condizioni stazionarie all'interno di un condotto di sezione non uniforme. Sapete che il fluido riempie una vasca di volume $V = 1.0$ m^3 in un tempo $\Delta t = 200$ s.
   a) Quanto vale la velocità v_1 del fluido in un punto in cui il condotto ha sezione $S_1 = 5.0$ cm^2?
   v_1 = …………………………………… = ……… m/s $V/(\Delta t S_1) = 10$ m/s   [dalla definizione di portata in volume]

   b) Sapendo che, nel punto del condotto di cui all'esercizio precedente, la pressione del fluido vale $P_1 = 2.0 \times 10^5$ Pa, quanto vale la pressione P_2 in un altro punto del condotto in cui la sezione è $S_2 = 10$ cm^2? [Considerate un condotto **orizzontale**, tale cioè che la quota del fluido rimane costante]
   P_2 = …………………………………… = ……… Pa $P_1 + \rho_M(v_1^2 - v_2^2)/2 = P_1 + \rho_M v_1^2(1-(S_1/S_2)^2)/2 = 3.5 \times 10^5$ Pa [per Bernoulli e teorema di continuità]

2. Avete due lunghi e sottili fili elettrici circolari, di raggio $a = 1.0$ mm e **resistenza trascurabile**, posti parallelamente a distanza $d = 1.0$ cm l'uno rispetto all'altro. I due fili sono collegati ad un generatore ideale di differenza di potenziale $V = 100$ V; la figura rappresenta una visione schematica del sistema. [Rispondete a tutte le domande del problema supponendo di aver raggiunto condizioni di **equilibrio**; inoltre tenete conto della simmetria dovuta al fatto che i fili sono lunghi e sottili; usate $\varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]



Si intende equilibrio "elettrico"!

   a) Sapendo che la lunghezza dei fili è $L = 1.0$ m, quanto vale la carica Q che si distribuisce sul filo 1 (quello in basso in figura, collegato con il polo positivo del generatore)? [Suggerimento: valutate l'espressione del campo generato da questo filo e considerate attentamente i dati del problema; può farvi comodo ricordare che $\int (1/r)dr = \ln(r)$]
   Q= …………………………………… ~ ……… C $V\, 2\pi\varepsilon_0 L/(\ln((d-a)/a)) \sim 2.5 \times 10^{-9}$ C
   [applicando Gauss ad un cilindro coassiale al filo 1, scelta dovuta alla simmetria cilindrica del problema, si ha $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 L\, r)$; d'altra parte deve essere $V = -\int_{d-a}^{a} E(r)dr$, da cui il risultato]

   b) Che direzione e verso ha e quanto vale, se c'è, la forza di natura elettrica $\boldsymbol{F}$ che si esercita fra i due fili?
   Direzione e verso: ………………………   diretta ortogonalmente ai fili ed « attrattiva »
   F = ……………………………………....~ ……. N $Q^2/(2\pi\varepsilon_0 Ld) = V^2 2\pi\varepsilon_0 L/(d \ln((d-a)/d)) \sim 1.1 \times 10^{-5}$ N   [dato che $F = qE$, ed E, calcolato sul filo 2, vale quanto stabilito nella soluzione del punto precedente]

3. Una lastra di superficie $S = 30$ cm^2 e spessore $d = 1.0$ mm, quindi molto estesa e sottile da poterla considerare come un sistema a simmetria **piana**, è disposta in modo da avere la faccia "inferiore" poggiata sul piano XY di un sistema di riferimento. La lastra, che è fatta di materiale **dielettrico,** è stata caricata in modo **non omogeneo**, così da avere una densità di carica volumica dipendente dalla quota z secondo la legge $\rho(z) = \rho_0 z^2/d^2$, con ρ_0 costante da determinare.
   a) Sapendo che la carica totale contenuta nella lastra vale $Q = 1.0 \times 10^{-12}$ C, quanto vale la costante ρ_0? [Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$; se non riuscite a determinare ρ_0, provate ad andare avanti lasciando indicato il parametro]

B

$\rho_0 =$ .... = ... C/m^3 $Q/\int_0^d (z^2/d^2)S\,dz = 3Q/(dS) = 1.0\times10^{-6}$ C/m^3 [deve essere $Q = \int \rho_0\,(z^2/d^2)\,S\,dz$. essendo $dV=Sdz$ per la geometria piana del sistema; da qui esce la soluzione]

b) Quanto vale la differenza di potenziale $V = \phi(d)-\phi(0)$ tra la faccia "superiore" $(z=d)$ e quella "inferiore" $(z=0)$ della lastra? [Supponete che nel semispazio $z \le 0$ il campo sia nullo e che la costante dielettrica all'interno della lastra sia quella del vuoto, $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m]

$V =$ .... ~ .... V $-\int_0^d E(z)dz = -\int_0^d ((\int_0^z \rho_0 (Z^2/d^2)SdZ)/(S\varepsilon_0))\,dz = -(\rho_0/(d^2\varepsilon_0))\int_0^d (\int_0^z Z^2dZ)\,dz = -(\rho_0/(d^2\varepsilon_0))\int_0^d (z^3/3)\,dz = -\rho_0 d^2/(12\varepsilon_0) = -Qd/(4\varepsilon_0 S) \sim -9.5\times10^{-3}$ V

c) Avete ora una particella positiva di **dimensioni trascurabili** che si avvicina alla lastra provenendo dal "di sopra" e muovendosi lungo l'asse Z (nel suo verso negativo). Sapendo che la massa della particella è $m = 1.0\times10^{-24}$ Kg e che il valore della sua carica è $q = 1.0\times10^{-13}$ C, quanto deve valere il modulo della velocità con cui essa incide sulla faccia "superiore" della lastra affinché possa uscire dalla faccia "inferiore" con velocità nulla? [**Trascurate gli effetti della gravità** e, a causa delle piccole dimensioni della particella, tutti i fenomeni di urto "meccanico" tra essa e il materiale di cui è costituita la lastra; considerate cioè solo l'interazione con il campo elettrico nella lastra!]

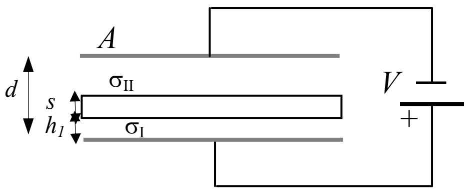
$v =$ .... ~ .... m/s $(-2qV/m)^{1/2} \sim 4.4\times10^4$ m/s [per il bilancio energetico: deve essere $E_K = (m/2)v^2 = q(\phi(0)-\phi(d)) = -qV$]

4. Due sottili lamine conduttrici di spessore **trascurabile** ed area $A = 1.0$ m^2 sono poste parallelamente l'un l'altra ad una distanza pari a $d = 10$ cm. Ad un dato istante, le due lamine, che inizialmente erano **scariche**, vengono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 100$ V. [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto e supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter trascurare gli effetti ai bordi**]

a) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore per portare il sistema all'equilibrio (cioè perché le cariche elettriche si distribuiscano in modo opportuno sulle lamine)?

$L =$ .... = ... J $CV_0^2/2 = (\varepsilon_0 A/d)\,V_0^2/2 = 4.4\times10^{-7}$ J [il lavoro è pari alla energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, che vale, all'equilibrio, $CV_0^2/2$; la capacità C si esprime come $\varepsilon_0 A/d$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che nello spazio (vuoto) tra le lamine venga posta una lastra conduttrice **scarica**, di area A identica a quella delle lamine e spessore $s = 2.0$ cm. La configurazione è descritta schematicamente in figura, da cui si vede che la lastra si trova ad una distanza $h_1 = 1.0$ cm dalla lamina "inferiore". Quanto valgono, all'equilibrio, le densità di carica superficiale σ_I e σ_{II} sulle due facce della lastra indicate in figura (rispettivamente quella inferiore e superiore, nel disegno)?



$\sigma_I =$ .... = ... C/m^2 $-\varepsilon_0 V/(d-s) = -1.1\times10^{-8}$ C/m^2

$\sigma_{II} =$ .... = ... C/m^2 $-\sigma_I = 1.1\times10^{-8}$ C/m^2 [detti E_1 ed E_2 i campi nella regioni compresa tra lamina inferiore e lastra e tra lastra e lamina superiore, per Gauss deve essere $\sigma_I = -E_1\varepsilon_0$ (il segno negativo viene dal fatto che il versore rilevante è antiparallelo al campo!); per la neutralità della lastra deve essere $\sigma_{II} = -\sigma_I$; d'altra parte per Gauss deve anche essere $E_2 = \sigma_B/\varepsilon_0 = E_1$. Sfruttando la definizione di differenza di potenziale, detta $h_2 = d - s - h_1$ la distanza tra faccia superiore della lastra e lamina superiore, deve allora essere $V = E_1h_1+E_2h_2 = E_1(d-s)$, da cui la soluzione]

Pasticci con e_0 nel commento alla soluzione corretti grazie a Silvia, 6/6/07
Ulteriori minor changes 26/05/2015 - thanks to Simona

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 19/5/2006 Firma: