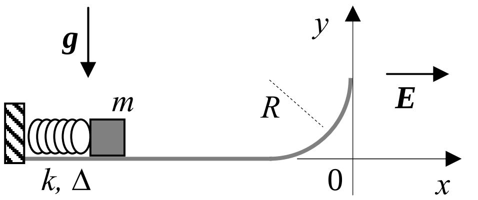
A

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 28/11/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………..   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piccolo proiettile di massa m = 20 g, che porta una carica elettrica q = 4.0x10^{-2} C, viene sparato da un "cannoncino a molla" (tipo flipper, per intenderci) che si trova su un piano orizzontale al livello del suolo ed è fissato ad un suo estremo su una parete rigida. Il cannoncino è realizzato con una molla di costante elastica k = 20 N/m, che inizialmente si trova compressa per un tratto Δ = 9.8 cm. Dopo aver lasciato la bocca di uscita del cannoncino, il proiettile si muove **senza attrito** lungo un percorso che, come indicato in figura, termina con un tratto curvilineo costituito da un quarto di circonferenza di raggio R = 4.9 cm; dopo tale tratto, il proiettile è libero di muoversi **senza attrito** nel piano XY. Nel **solo** semispazio $x \geq 0$ (rispetto al riferimento indicato in figura) è presente un campo elettrico **uniforme e costante** diretto lungo il verso positivo dell'asse X e di modulo E = 2.5x10^2 N/C.



Nota: per errore tipografico il simbolo era ">" nei testi distribuiti. Se ne tiene conto nella correzione

a) Facendo partire un cronometro nell'istante in cui il proiettile lascia l'arco di circonferenza, a quale istante t_{MAX} il proiettile raggiunge la sua quota massima? [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

t_{MAX} = …………………………………… = ……….. m $v_{0Y}/g = (k\Delta^2/m - 2gR)^{1/2}/g = (k\Delta^2/(mg^2) - 2R/g)^{1/2}$ = 3.0x10^{-1} s [la quota massima si raggiunge quando la velocità verticale è nulla, cioè quando $gt_{MAX} = v_{0Y}$; la velocità iniziale (che è tutta lungo Y) del proiettile si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA} + \Delta U_G = (m/2)v_{0Y}^2 - (k/2)\Delta^2 + mgR$; il risultato si ottiene rimaneggiando le espressioni]

b) Quanto vale l'istante t_C in cui il proiettile tocca il suolo? [Esprimete questo istante considerando sempre come t_0 = 0 l'attimo in cui il proiettile lascia l'arco di circonferenza]

t_C = …………………………………… ~ ……….. s $t_{MAX} + t_2 = t_{MAX} + (2h_{MAX}/g)^{1/2} = t_{MAX} + (2(R+gt_{MAX}^2/2)/g)^{1/2} = t_{MAX} + (2R/g + t_{MAX}^2)^{1/2}$ ~ 6.2x10^{-1} s [occorre sommare il tempo t_{MAX} al tempo t_2 necessario affinché il proiettile raggiunga il suolo, che vale $t_2 = (2h_{MAX}/g)^{1/2}$. La quota massima vale $h_{MAX} = R+v_{0Y}^2/(2g)$, da cui, riarrangiando, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale il lavoro L_E fatto dal campo elettrico sul proiettile?

L_E = …………………………………… ~ ……….. J $qEx_C = qE((qE/2m)t_C^2) = ((qE)^2/2m)t_C^2$ ~ 9.6x10^2 J [la forza elettrica che agisce sul proiettile è costante ed uniforme, vale qE ed è diretta nel verso positivo dell'asse X. Essendo l'accelerazione lungo X pari a $a_X = qE/m$, e la velocità iniziale a t_0 = 0 nulla lungo X, si ha che lo spostamento vale $x_C = (qE/m)t_C^2/2$, da cui la soluzione]

2. Un'automobile (che approssimerete come un punto materiale di massa m = 1.0x10^3 kg) parte da ferma all'istante t_0 = 0 e compie il seguente percorso: dopo un tratto **orizzontale** di lunghezza d = 25 m, eseguito con accelerazione costante a = 0.50 m/s^2, **scende a folle** (il motore viene spento!) lungo un piano inclinato (di angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, ed altezza h = 10 m) al termine del quale incontra di nuovo un tratto orizzontale su cui è presente una curva a gomito, rappresentata da una semicirconferenza di raggio R = 20 m. Il coefficiente di attrito **statico** tra auto ed asfalto è μ = 0.50. [Usate inoltre il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e supponete trascurabile l'attrito dell'aria]

a) In quale istante t_1 l'automobile arriva all'inizio del piano inclinato?

t_1 = …………………………….. = ... s $(2d/a)^{1/2}$ = 10 s [dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato]

b) Sapendo che nel **solo tratto in discesa** l'automobile viene frenata (vengono azionati i freni mentre il motore è spento), quanto deve valere, **al minimo**, il lavoro L_F delle "forze di frenatura" affinché l'auto possa percorrere per intero la curva seguente senza sbandare?

L_F = …………………………….. = ... J $-(m/2)v_1^2-mgh+(m/2)g\mu R = -(m/2)(at_1)^2+mgh+(m/2)g\mu R$ = -6.15x10^4 J [occorre che la velocità (costate) con cui il punto percorre la curva sia sufficientemente bassa da permettere alla forza di attrito, che vale, al massimo, $F_A = \mu\, mg$, sia tale da fornire l'accelerazione centripeta $a_C = v^2/R$, cioè deve essere, almeno, $v_2^2/R = \mu g$; d'altra parte la velocità v_2 con cui viene percorsa la curva si ottiene con considerazioni di bilancio energetico (nel tratto in discesa) dalla: $L_F = \Delta E_K + \Delta U_g = (m/2)v_2^2-(m/2)v_1^2-mgh$; la velocità v_1 è quella con cui il punto arriva all'inizio del tratto in discesa, e vale $v_1 = at_1$. Rmaneggiando si ottiene la soluzione; notate che il segno negativo indica che la forza di frenatura "si oppone" allo spostamento]

c) A quale istante t_F l'automobile arriva al termine della curva? [Esprimete questo istante sempre rispetto al t_0 definito inizialmente, e supponete valide le condizioni "di non sbandata" determinate alla risposta al punto precedente]

t_F = …………………………….. ~ .... s $t_1 + (-at_1 + (a^2t_1^2+2h(g+L_F/(hm)))^{1/2})/(\sin\theta(g+L_F/(hm))) + \pi R/(\mu g R)^{1/2}$ ~ 19 s [dalla somma dei tre tempi, t_1, t_2, t_3, necessari a percorrere i tre tratti di percorso. t_1 è già stato determinato, t_2 si calcola tenendo conto del moto, uniformemente accelerato, lungo il tratto in discesa. Supponendo, come è ragionevole, una "forza di frenatura" costante ed uniforme F_F, si ha che il moto lungo questo tratto avviene con accelerazione costante $a = g\sin\theta + F_F/m$, dove , tenendo conto della risposta precedente ed esprimendo come $d = h/\sin\theta$ la lunghezza percorsa, si ha $F_F = L_F/d = L_F/(h/\sin\theta)$. La legge oraria del moto, tenendo conto della velocità iniziale $v_1=at_1$, stabilisce allora: $d = h/\sin\theta = v_1t_2 + (g\sin\theta + L_F\sin\theta/(hm))t_2^2/2$. Risolvendo si ottiene t_2. Infine t_3 si trova notando che, se l'automobile non sbanda, occorre un tempo pari a $\pi R/v_2 = \pi R/(\mu g R)^{1/2}$, dove si è sfruttato il risultato riportato alla risposta precedente]

3. Una massa m = 20 g è soggetta ad un moto unidimensionale lungo l'asse X sotto l'azione di una forza **conservativa** $F(x)$ la cui energia potenziale ha espressione $U(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, con α = 1.0 J/m^2, β = 2.0 J/m e γ = 5.0 J.

a) Come si scrive l'espressione della forza $F(x)$? [Non è necessario usare i valori numerici per questa risposta!]

$F(x)$ = …………………………….. $-dU(x)/dx = -2\alpha x-\beta$ [dalla relazione tra energia e forza per un campo conservativo!]

b) Quanto vale la coordinata di equilibrio x_{EQ} (ammesso che esista una posizione di equilibrio)?

x_{EQ} = ... = ... m $-\beta/(2\alpha)$ = - 1.0 m [deve essere $F(x_{EQ})=0$]

c) Supponendo che, ad un dato istante, la massa si trovi nell'origine dell'asse X con velocità v_0 = 0, quanto vale la sua velocità v quando essa passa per la posizione di equilibrio x_{EQ} determinata alla risposta precedente?

v = ... = ... m/s $(2/m)^{1/2}(\gamma-(\alpha x_{EQ}+\beta x_{EQ}+\gamma))^{1/2} = (2/m)^{1/2}(-\alpha(-\beta/(2\alpha))^2 - \beta(-\beta/(2\alpha))^{1/2} = (2/m)^{1/2}(\beta^2/(4\alpha))^{1/2}$ = 10 m/s [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0=\Delta E_K+\Delta U = (m/2)v^2+U(x_{EQ})-U(x=0)$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 28/11/2006 Firma:

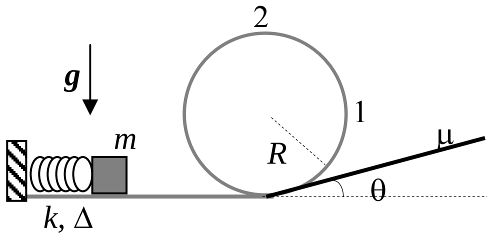
B

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 28/11/2006

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piccolo oggetto di massa m = 20 g viene sparato da un "cannoncino a molla" (tipo flipper, per intenderci) che si trova su un piano orizzontale al livello del suolo ed è fissato ad un suo estremo su una parete rigida. Il cannoncino è realizzato con una molla di costante elastica k, che inizialmente si trova compressa per un tratto Δ = 9.8 cm. Dopo aver lasciato la bocca di uscita del cannoncino, il proiettile si muove **senza attrito** sul piano, per poi affrontare un percorso costituito da una guida rigida circolare di raggio R = 49 cm che si trova su un piano verticale.



a) Quanto deve valere, **al minimo**, la costante elastica k della molla del cannoncino se si vuole che l'oggetto percorra interamente la guida circolare senza distaccarsene (compia, cioè, un "giro della morte")? [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

k = …………………………………… = ……….. N/m $5mgR/\Delta^2$ = 5.0 N/m [al punto più alto della circonferenza, marcato con 2 in figura, deve essere, al minimo, $mg = ma_C = mv_2^2/R$, dove a_C indica l'accelerazione centripeta. D'altra parte per la conservazione dell'energia meccanica si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U_g + \Delta U_{ela} = (m/2)v_2^2 + mg(2R) - (k/2)\Delta^2$, da cui, riarrangiando, si ottiene il risultato]

b) Quanto valgono, nelle condizioni della domanda precedente (molla con costante elastica k sopra determinata), i moduli N_1 ed N_2 della reazione vincolare esercitata dalla guida sull'oggetto nelle due posizioni indicate in figura come 1 e 2 (corrispondenti, rispettivamente, alla "metà altezza" e alla sommità della circonferenza)?

N_1 = …………………………………… = ……….. N $mv_1^2/R = (k\Delta^2 - 2mgR)/R = 3mg$ = $5.9\text{x}10^{-1}$ N [la reazione vincolare è la causa fisica che determina il moto di rotazione; pertanto essa deve fornire l'accelerazione centripeta che, in ogni punto della circonferenza, vale v^2/R; d'altra parte la conservazione dell'energia meccanica (vedi sopra) permette di trovare v_1, da cui la soluzione]

N_2 = …………………………………… = ……….. N 0 [in questa posizione, come già implicitamente affermato nella risposta alla domanda precedente, la reazione vincolare si annulla dato che all'accelerazione centripeta provvede completamente la forza peso]

c) Supponendo che, all'uscita del percorso circolare (cioè dopo aver compiuto il giro della morte), l'oggetto incontri un tratto di piano inclinato **scabro**, con angolo $\theta = \pi/6$, in cui è presente attrito dinamico con coefficiente μ = 0.50, quanto vale la distanza d che l'oggetto percorre su questo tratto prima di arrestarsi? [Considerate sempre valide le condizioni appena stabilite, cioè che k abbia il valore determinato nella risposta alla domanda a); può farvi comodo ricordare che $\sin(\pi/6)$ = 0.50, $\cos(\pi/6) \sim 0.87$]

d = ………………………………… ~ ……….…. m $(k/2)\,\Delta^2/(mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)) = (5/2)\,R/(\sin\theta + \mu\cos\theta) \sim 1.3$ m [dal bilancio energetico: $\Delta U_{ela} + \Delta U_g = -(k/2)\Delta^2 + mgd\sin\theta = L_A = -mg\cos\theta\,\mu\,d$; il risultato si ottiene sostituendo l'espressione di k determinata in precedenza]

2. Un semplice modello "classico" per l'atomo di idrogeno prevede che esso sia composto da un elettrone, di carica $q = -e = -1.6\text{x}10^{-19}$ C e massa $m = 9.0\text{x}10^{-31}$ kg, che ruota con velocità uniforme e costante attorno ad un protone, fisso nello spazio e dotato di carica $Q = e = 1.6\text{x}10^{-19}$ C.

a) Sapendo che il raggio dell'orbita vale $R = a_0 = 5.0\text{x}10^{-11}$ m, quanto vale l'**energia cinetica** E_{K0} dell'elettrone? [Trascurate ogni effetto dovuto alla gravità, ed usate il valore $\kappa = 9.0\text{x}10^9$ Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica]

E_{K0} = …………………………….. = ... J $(m/2)v^2 = (m/2)\kappa e^2/(mR) = \kappa e^2/(2a_0) = 2.3\text{x}10^{-18}$ J [la forza elettrica, di modulo $\kappa e^2/R^2$, è la causa fisica che fornisce l'accelerazione centripeta, $a_C = v^2/R$, all'elettrone in rotazione uniforme. Sostituendo si ottiene il risultato]

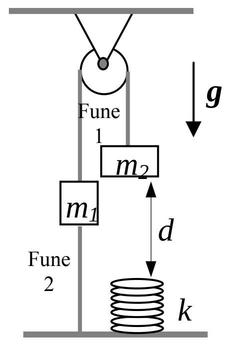
b) A causa di una perturbazione esterna (che non specifichiamo!), il raggio dell'orbita diventa $R' = 2a_0 = 1.0\text{x}10^{-10}$ m. Quanto vale il lavoro L_E compiuto dalle forze di natura elettrica nel corso del processo? [Può farvi comodo ricordare la seguente regolina di integrazione indefinita per una variabile ξ generica ($n \neq -1$): $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]

L_E = …………………………… = ... J $\int_R^{R'} \kappa(-e^2)/r^2 \, dr = \kappa \, e^2[1/r]_R^{R'} = \kappa \, (e^2/a_0) \, (1/2-1) = -\kappa e^2/(2a_0) = -E_{K0} = -2.3\text{x}10^{-18}$ J [dalla definizione di lavoro per una forza (conservativa) non uniforme!]

c) Quanto vale la variazione di **energia totale** ΔE nel processo di cui alla domanda precedente?

ΔE = …………………………… = ... J $-L_E + \Delta E_K = E_{K0} + E_K' - E_{K0} = E_K' = \kappa (e^2/4a_0) = E_{K0}/2 = 1.1\text{x}10^{-18}$ J [si ottiene sommando le variazioni di energia cinetica ed elettrica: $\Delta E = \Delta E_K + \Delta U_E = \Delta E_K - L_E$; il valore dell'energia cinetica E_K' per l'orbita con raggio R' si calcola facilmente in analogia con quanto visto alla risposta alla domanda a)]

3. Due masse, $m_1 = 1.0$ kg e $m_2 = 2.0$ kg, sono collegate da una fune inestensibile di massa trascurabile, che indicheremo come fune 1. Questa fune passa per la gola di una puleggia di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito attono al suo asse, imperniato con un giogo ad un solaio rigido; la massa m_1 è unita ad un pavimento rigido attraverso una fune inestensibile di massa trascurabile, che indicheremo come fune 2. Sulla verticale della massa m_2 , ad una distanza $d = 3.0$ m, si trova una molla di massa trascurabile e constante elastica $k = 4.9$ N/m. La figura rappresenta uno schema del sistema.



a) Quanto vale, in modulo, la tensione T_2 della fune 2? [Le condizioni iniziali sono ovviamente di equilibrio! Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

T_2 = …………………………….. = ... N $T - m_1g = (m_2-m_1)g = 9.8$ N [all'equilibrio, deve essere, avendo indicato con T il modulo della tensione della fune 1, $m_2g = T$ e $T = m_1g+T_2$, da cui la soluzione]

b) All'istante $t_0 = 0$ la fune 2 viene tagliata; di conseguenza la massa m_2 si muove verso il basso, raggiungendo e comprimendo la molla. Quanto vale la massima compressione Δ_M della molla? [Trascurate ogni forma di attrito nel moto del sistema ed immaginate che la fune 1 resti "tesa" fino a quando le masse non si arrestano]

Δ_M = …………………………………… = ... m $(g(m_2-m_1) \pm (g^2(m_1-m_2)^2 + 2k(m_2-m_1)gd)^{1/2})/k = 6.0$ m [dalla conservazione dell'energia meccanica, $0 = \Delta E_K + \Delta U_g + \Delta U_{ela} = 0 + (m_1-m_2)g(d+\Delta_M) + k\Delta_M^2/2$, notando che il sistema si ferma quando la massa m_1 si è innalzata di un tratto $d+\Delta_M$, e la massa m_2 si è abbassata dello stesso tratto]

c) A quale istante t la massa m_2 raggiunge il "bordo superiore" della molla (cioè, quanto tempo ci vuole perché si muova del tratto d)?

t = …………………………………… ~ .... s $(2d/a)^{1/2} = (2d/((m_2-m_1)g/(m_1+m_2)))^{1/2} = (2d(m_1+m_2)/(g(m_2-m_1)))^{1/2} \sim 1.4$ s [è una macchina di Atwood, ed è facile trovare che le masse si muovono di moto uniformemente accelerato con accelerazione, diretta verso il basso, pari ad $a = g(m_2-m_1)/(m_1+m_2)$; la soluzione segue dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato ponendo la velocità iniziale nulla, come è]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 28/11/2006 Firma:

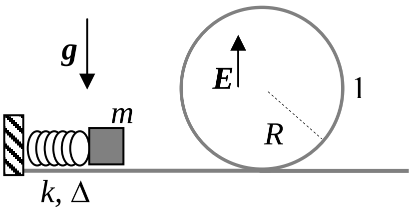
C

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 28/11/2006

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piccolo oggetto di massa m = 20 g e carica elettrica q = 4.0x10^{-2} C viene sparato da un "cannoncino a molla" (tipo flipper, per intenderci) che si trova su un piano orizzontale al livello del suolo ed è fissato ad un suo estremo su una parete rigida. Il cannoncino è realizzato con una molla di costante elastica k = 200 N/m, che inizialmente si trova compressa per un tratto Δ = 9.8 cm. Dopo aver lasciato la bocca di uscita del cannoncino, il proiettile si muove **senza attrito** sul piano, per poi affrontare un percorso costituito da una guida rigida circolare di raggio R = 49 cm che si trova su un piano verticale. Inoltre, **a partire dall'istante in cui l'oggetto raggiunge l'inizio del percorso circolare**, viene acceso un campo elettrico **uniforme e costante**, diretto **verticalmente verso l'alto**, di modulo E = 25 N/C. Si osserva che, in tali condizioni, l'oggetto percorre l'intero percorso circolare senza staccarsi dalla guida (cioè compie un "giro della morte").



   a) Quanto vale il lavoro L_E che le forze elettriche hanno compiuto quando l'oggetto ha percorso **interamente** il giro della morte?
   L_E = …………………………………… = ……….. J 0 [il campo elettrico è conservativo e, per la geometria del sistema (il campo è verticale e non c'è variazione di quota tra inizio e fine del percorso circolare), il lavoro è nullo!]

   b) Quanto vale, in modulo, la velocità v' con cui l'oggetto lascia il percorso circolare al termine del "giro della morte"?
   v' = …………………………………… = ……….. m/s $(k\Delta^2/m)^{1/2}$ = 9.8 m/s [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g + \Delta U_{ela} + \Delta U_E = (m/2)v'^2 - (k/2)\Delta^2$, avendo notato che non c'è variazione né di energia potenziale gravitazionale, né di energia potenziale elettrica, mentre l'energia elastica iniziale vale $U_{ela} = (k/2)\Delta^2$]

   c) Quanto vale il modulo N_1 della reazione vincolare esercitata dalla guida sull'oggetto nella posizione indicata in figura come 1 (corrispondente alla "metà altezza" della circonferenza)? [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   N_1 = …………………………………… = ……….. N $mv_1^2/R = (k\Delta^2 - 2mgR + 2qER)/R$ = 3.5 N [la reazione vincolare è la causa fisica che determina il moto di rotazione; pertanto essa deve fornire l'accelerazione centripeta che, in ogni punto della circonferenza, vale v^2/R; d'altra parte la conservazione dell'energia meccanica (vedi sopra) permette di trovare v_1, da cui la soluzione]

2. Un'automobile (che approssimerete come un punto materiale di massa m = 1.0x10^3 kg) parte da ferma all'istante t_0 = 0 e, dopo aver percorso un tratto piano orizzontale di lunghezza d = 25 m con accelerazione uniforme a = 0.50 m/s^2, arriva alla rampa elicoidale di un parcheggio sotterraneo multipiano. La rampa è costituita da 3 curve circolari di raggio R = 20 m, e il piano più profondo del parcheggio si trova ad una quota h = 6.0 m **al di sotto** del piano stradale (quello da cui parte l'automobile). [Se non altrimenti specificato, tutte le cause di attrito vanno considerate trascurabili; usate inoltre il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Quanto vale, in modulo, la velocità v_1 con cui l'automobile arriva all'inizio della rampa?

v_1 = …………………………….. = ... m/s $at_1 = a(2d/a)^{1/2} = (2da)^{1/2} = 5.0$ m/s [dalle leggi del moto uniformemente accelerato!]

b) Quanto deve valere, **al minimo**, il coefficiente di attrito statico μ tra automobile ed asfalto se si vuole che l'auto percorra tutte le curve della rampa senza sbandare? [Approssimate come piane le sezioni stradali delle curve della rampa!]

μ = ………………………………… = ... $(v_1^2+2gh)/(Rg) = 0.73$ [affinché l'automobile non sbandi occorre che l'accelerazione centripeta necessaria per percorrere la curva, di valore v^2/R, possa essere fornita dalla forza di attrito, che vale, al massimo, $mg\mu$ (supponendo di essere su un piano orizzontale, come suggerito dal testo). D'altra parte la velocità di percorrenza v è quella che l'automobile ha dopo la discesa per una quota h, per cui, dalla conservazione di energia meccanica, deve essere: $(m/2)v^2=(m/2)v_1^2+mgh$. Da qui la soluzione]

c) Al termine della rampa si trova un "respingente" costituito da una molla (con asse orizzontale) di costante elastica k = 3.3x10^5 N/m. Supponendo che l'auto percorra tutta la rampa senza mai sbandare, quanto vale la compressione massima Δ della molla del respingente?

Δ = ………………………………… ~ .... m $(m(v_1^2+2gh)/k)^{1/2}$ ~ 6.6x10^{-1} m [per la conservazione dell'energia meccanica si ha $(k/2)\Delta^2 = (m/2)v^2=(m/2)v_1^2+mgh$ (vedi la risposta alla domanda precedente]

3. Un campo elettrico (conservativo!) **disomogeneo** agisce sul piano **orizzontale** XY ed ha espressione vettoriale $\mathbf{E} = (\alpha x^2,\beta y^3)$, con α = 10 N/(Cm^2) e β = 6.0 N/(Cm^3). Tale campo agisce su una particella di massa m =10 g e carica elettrica q = 1.0x10^{-5} C, che è vincolata a muoversi **senza attrito** lungo la **bisettrice** del piano XY (per intenderci, si tratta della retta che è bisettrice del primo e del terzo quadrante).

a) Quanto vale il lavoro L_E della forza elettrica se la particella viene spostata (per azione di un operatore esterno) dal punto x_0 = 0, y_0 = 0, al punto x_1 = 2.0 m, y_1 = 2.0 m?

L_E = …………………………….. = ... J $\int_0^1 q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q(\int_{x0}^{x1}E_X dx + \int_{y0}^{y1}E_Y dy) = q(\alpha x_1^3/3 + \beta y_1^4/4) = 5.1$x10^{-4} J [dalla definizione di lavoro meccanico: formalmente l'integrale è "a due direzioni" (spaventoso…), ma può essere espresso facilmente come semplice somma di due integrali (lungo X e lungo Y) ricordando che il campo elettrico è conservativo e quindi il risultato non cambia se si suppone di eseguire "prima" lo spostamento lungo X e "poi" quello lungo Y!]

b) Quanto vale, componente per componente, la forza elettrica $\mathbf{F_E}$ che agisce sulla particella quando essa si trova nel punto x_1 = 2.0 m, y_1 = 2.0 m?

$\mathbf{F_E}$ = (………………,………………) = (.......,.......) N $q(\alpha x_1^2,\beta y_1^3)$ = (4.0x10^{-4}, 4.8x10^{-4}) N

c) Quanto vale, componente per componente, la reazione vincolare $\mathbf{N}$ che la guida (che si trova, come affermato, lungo la bisettrice del piano) esercita sulla particella?

$\mathbf{N}$ = (………………,………………) = (.......,.......) N $((-F_{E,X}\sin\theta + -F_{E,Y}\cos\theta)\sin\theta, (-F_{E,X}\sin\theta + -F_{E,Y}\cos\theta)\cos\theta) = (q/2)(-\alpha x^2+\beta y^2)(-1,1) = 4.0$x10^{-5} (-1, 1) N [la reazione vincolare della guida è, ovviamente, diretta ortogonalmente a questa, e quindi si trova lungo la bisettrice del II-IV quadrante. Tale reazione è tale da obbligare la particella a muoversi lungo la guida stessa e quindi è uguale ed opposta alla proiezione di $\mathbf{F_E}$ lungo la bisettrice del II-IV quadrante. Osservando la geometria del sistema e chiamando θ = π/4 l'angolo della guida rispetto all'asse X, si ha $N = -F_{EX}\sin\theta+F_{EY}\cos\theta$; le componenti richieste si ottengono proiettando ancora lungo le direzioni cartesiane. Il risultato si ottiene notando che $\sin\theta = \cos\theta = 1/2^{1/2}$.]

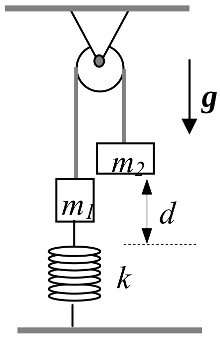
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 28/11/2006 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 28/11/2006

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Due masse, m_1 = 1.0 kg e m_2 = 2.0 kg, sono collegate da una fune inestensibile di massa trascurabile. La fune passa sulla gola di una puleggia di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito attorno al suo asse, imperniato con un giogo ad un solaio rigido; la massa m_1 è unita ad un pavimento rigido attraverso una molla di costante elastica k = 49 N/m, mentre la massa m_2 è libera di muoversi in direzione verticale. La figura rappresenta uno schema del sistema.



   a) Per quale elongazione Δ della molla il sistema si trova nella posizione di equilibrio del sistema? Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   Δ = ………………………………… = ... m $(m_2-m_1)g/k$ = 2.0x10^{-1} m
   [dall'equilibrio delle forze agenti sulle due masse: per m_1 si ha $m_1g + k\Delta = T$; per m_2 si ha: $T = m_2g$. Sostituendo si ottiene la soluzione]

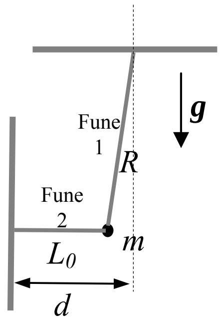
   b) Supponendo di lasciare libera di muoversi la massa m_2 facendola partire con velocità iniziale nulla **quando la molla si trova alla propria lunghezza di riposo**, quanto vale la velocità v_2 della massa m_2 quando questa si è abbassata di un tratto d = 5.0 cm?[Ricordate che a muoversi sono *due* masse e supponete che la fune rimanga sempre "in tensione" durante lo spostamento delle masse!]
   v_2 = …………………………….. ~ .... m/s $(2(m_2-m_1)gd/(m_1+m_2) - kd^2/(m_1+m_2))^{1/2}$ ~ 9.3x10^{-1} m/s   [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g + \Delta U_{ela} = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + m_1gd - m_2gd + (k/2)d^2$. Notate che si è tenuto conto che, quando la massa m_2 si è abbassata di un tratto d, la massa m_1 si è innalzata dello stesso tratto e la molla si è estesa dello stesso tratto!]

Nota: i dati numerici contenevano un errore nella versione consegnata: se ne è tenuto conto nella correzione

2. Una carica elettrica Q = 4.0x10^{-5} C è **fissa** nell'origine dell'asse X di un sistema di riferimento (l'asse X è orizzontale). All'istante t_0 = 0 una particella di massa m = 10 g dotata di una carica elettrica q = 1.0x10^{-5} C, vincolata a muoversi **senza attrito** sull'asse X, si trova nel punto di coordinata x_0 = 1.0 m con velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta nel **verso negativo** dell'asse X.
   a) In quale punto x_1 la carica q si arresta? [Usate il valore κ = 9.0x10^9 Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica; può farvi comodo ricordare la seguente regolina di integrazione indefinita per una variabile ξ generica (n ≠ -1): $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]
   x_1 = …………………………….. = ... m $x_0 2\kappa qQ/(2\kappa qQ+mv_0^2x_0)$ = 8.8x10^{-1} m
   [dalla conservazione dell'energia meccanica, ricordando che $\Delta U_{ele}=-L_{ele}$ e calcolando tale lavoro con la definizione per una forza (conservativa) non uniforme: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ele} = -(m/2)v_0^2 - L_E = -(m/2)v_0^2 - \int_{x0}^{x1} \kappa qQ/x^2 \, dx = --(m/2)v_0^2 + \kappa qQ(1/x_1 - 1/x_0)$]

   b) Quanto vale l'accelerazione a della carica q quando essa raggiunge la posizione x_1 appena determinata?
   a = ………………………………… = ... m/s^2 $\kappa qQ/(mx_1^2)$ = 4.6x10^2 m/s^2 [dalla definizione di forza elettrica tra due cariche puntiformi]

3. Una piccola palla di massa m = 1.0 kg è legata all'estremità di una fune inestensibile di massa trascurabile e lunghezza R = 4.9 m, che chiameremo fune 1; l'altro estremo è legato ad un perno piantato su una parete verticale, di modo che la palla sia libera di oscillare su un piano verticale senza risentire attriti (per intenderci, si tratta di un pendolo!). Inizialmente la palla è tenuta ferma da un'altra fune (la fune 2), inestensibile e di massa trascurabile, di lunghezza L_0 = 90 cm. Come indicato in figura, tale fune ha direzione orizzontale ed è fissata ad una parete rigida verticale, che dista d = 1.0 m dalla verticale del pendolo. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale, in modulo, la tensione T_2 della fune 2?
T_2 = …………………………….. = ... N $T_1 sin\theta = (mg/cos\theta)sin\theta = mg\ tg\theta = mg\ (d-L_0)/(R^2-(d-L_0)^2)^{1/2} \sim mg(d-L_0)/R$ = 0.20 N [la tensione T_2 deve equilibrare le forze "orizzontali" sulla palla, che, chiamando T_1 la tensione della fune 1, valgono in modulo $T_1 sin\theta$. D'altra parte in direzione verticale deve essere $mg = T_1\ cos\theta$. Le grandezze trigonometriche dell'angolo si trovano lavorando di trigonometria: in particolare si ha $tg\theta = sin\theta/cos\theta = sin\theta/(1-sin^2\theta)^{1/2}=(d-L_0)/(R^2-(d-L_0)^2)^{1/2} \sim (d-L_0)/R$, dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che $(d-L_0)<<R$]

b) Supponete ora che all'istante t_0 = 0 la fune 2 venga tagliata. Quanto vale la velocità v_1 con cui la palla passa per la posizione verticale (tale, cioè, che la fune 1 è diretta lungo la verticale)?
v_1 = ... ~ .... m/s $(2gR(1-cos\theta))^{1/2} = (2gR(1-(1-sin^2\theta)^{1/2}))^{1/2} = (2gR(1-(1-(d-L_0)^2/R^2)^{1/2}))^{1/2} \sim (2gR(1 - (1 - sin^2\theta/2))^{1/2}=(gRsin^2\theta)^{1/2} = (gR)^{1/2}(d-L_0)/R \sim$ 0.14 m/s
[per la conservazione dell'energia meccanica deve essere: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g = (m/2)v^2-mgR(1-cos\theta)$. Nella soluzione, per tenere conto del fatto che l'angolo è molto piccolo (e quindi $sin^2\theta <<1$, si è usata l'approssimazione (sviluppo in serie) $(1-sin^2\theta)^{1/2}\sim 1- sin^2\theta/2$. Questa approssimazione non è, ovviamente, indispensabile, dato che anche il calcolo fatto con una calcolatrice conduce allo stesso risultato numerico (ma richiede un po' più di "fatica"]

c) A quale istante t_1 , **approssimativamente**, la palla passa per la posizione verticale? [Ricordate che, nel testo dell'esercizio, si è parlato di "pendolo"...]
t_1 ~ .... ~ .... s $\tau/4 = 2\pi/(4\omega) = \pi/(2(g/R)^{1/2}) \sim$ 1.1 s
[dato che l'angolo è piccolo, il pendolo compie piccole oscillazioni con velocità angolare $\omega= (g/R)^{1/2}$; il tempo necessario a raggiungere la verticale è pari ad un quarto di periodo, il periodo essendo $\tau = 2\pi/\omega$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 28/11/2006 Firma: