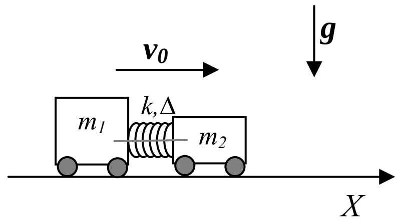
# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 13/4/2007

**Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………**

*Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un "trenino", composto da due carrelli di massa $m_1 = 2m_2 = 2m$, con $m = 0.20$ kg, si muove con **attrito trascurabile** lungo un binario piano e rettilineo disposto in direzione dell'asse $X$ di un sistema di riferimento; la velocità iniziale del "trenino" è $v_0 = 0.10$ m/s. Una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 1.2$ N/m è frapposta tra i due carrelli in modo che il suo asse sia parallelo all'asse $X$. Inizialmente la molla è mantenuta compressa per un tratto $\Delta = 5.0$ cm da una corda di massa trascurabile che lega i due carrelli, come rappresentato schematicamente in figura




a) All'istante $t_0 = 0$ la corda viene tagliata e la molla diventa libera di estendersi. Quanto valgono le velocità $v_1$ e $v_2$ dei due carrelli quando essi si sono separati completamente? [Per la soluzione può farvi comodo sapere che la velocità $v_2$ risulta aumentata rispetto a $v_0$, e la velocità $v_1$ risulta diminuita; inoltre trascurate ogni effetto dissipativo eventualmente presente]

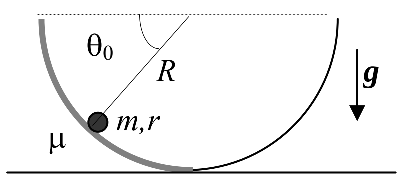
$v_1$ = …………………………………… = ………… m/s $v_0 - (k/(6m))^{1/2}\Delta = 5.0\text{x}10^{-2}$ m/s [il sistema è isolato lungo $X$ e si conserva la q.di moto totale, cioè: $(m_1+m_2)v_0 = 3mv_0 = m_1v_1 + m_2v_2 = 2mv_1 + mv_2$. Si ha quindi subito: $v_2 = 3v_0 - 2v_1$. Inoltre il bilancio energetico, notando che la variazione di energia elastica vale $\Delta U_{ela} = -(k/2)\Delta^2$ , permette di scrivere: $0 = \Delta U_{ela} + \Delta E_k = -(k/2)\Delta^2 + (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2 - ((m_1+m_2)/2)v_0^2 = -(k/2)\Delta^2 + (m/2)(2v_1^2 + v_2^2 - 3v_0^2)$. Si ha quindi un sistema di due equazioni e due incognite che può essere risolto **facilmente**. Si ottengono due soluzioni poiché fisicamente la conservazione dell'energia "non distingue" fra molla compressa o estesa; l'oseervazione sulle velocità consente di selezionare la soluzione corretta]

$v_2$ =…………………………………… = ………… m/s $3v_0 - 2v_1 = v_0 + 2(k/(6m))^{1/2}\Delta = 2.0\text{x}10^{-1}$m/s [vedi sopra]

b) Sapendo che all'istante $t_0 = 0$ il centro di massa del "trenino" si trova a passare per l'origine del sistema di riferimento, cioè che $x_{CM,0} = 0$, e che all'istante $t'$ il carrello 1 si trova nella posizione $x_1$, come si esprime la coordinata $x_2$ occupata dal carrello 2 nello stesso istante $t'$? [Considerate i carrelli come puntiformi e **non date una risposta numerica a questo quesito**]

$x_2$ = …………………………………… $3v_0t' - 2x_1$ [dato che il sistema è isolato il suo centro di massa si muove come un punto che non è soggetto ad alcuna forza esterna, cioè di moto rettilineo uniforme con velocità $v_0$. Dunque la posizione che esso ha all'istante $t'$ è: $x_{CM} = x_{CM,0} + v_0t' = v_0t'$. Per definizione deve essere: $x_{CM} = (m_1x_1+m_2x_2)/(m_1+m_2) = (2x_1+x_2)/3$, da cui la soluzione]

2. Un piccolo cilindro omogeneo di massa $m = 0.50$ kg e raggio $r = 4.0$ cm si trova su una guida semicircolare di raggio $R = 30$ cm disposta su un piano verticale come rappresentato in figura: inizialmente il cilindro si trova **fermo** nella posizione $\theta_0 = \pi/4$, con $\theta$ angolo rispetto alla direzione **orizzontale**. Il materiale di cui è fatta la superficie della guida è disomogeneo; in particolare, esso presenta un certo coefficiente di attrito $\mu$ nel tratto $0 < \theta < \pi/2$, mentre l'attrito è trascurabile per $\pi/2 \leq \theta < \pi$ (in pratica la guida è scabra per "metà" e liscia per l'altra "metà"). Ad un dato istante si lascia andare **liberamente** il cilindro a partire dalla posizione iniziale $\theta_0$: nella prima "metà" della guida si osserva che esso si muove di **rotolamento puro**. [Per la soluzione usate il valore $g = 9.8$ m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) \sim 0.71$]




Disegno non in scala!

a) Qual è il valore **minimo** $\mu_{min}$ del coefficiente di attrito nella prima "metà" della guida che permette di ottenere la situazione descritta, cioè la condizione di rotolamento puro?

$\mu_{min}$ = …………………………….. = ……….. $1/(3tg\theta_0) = 0.33$ [in condizione di rotolamento puro le equazioni del moto traslazionale e rotazionale del cilindro si scrivono, per un valore generico di $\theta$: $ma_{CM} = mgcos\theta$

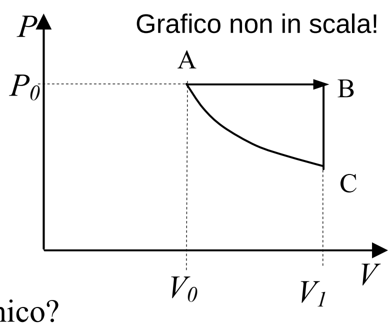
- $F_A$ ; $I\alpha = F_A r$ , con $I = (m/2)r^2$ momento di inerzia di un cilindro omogeneo e $a_{CM} = \alpha r$ per la condizione “geometrica” di rotolamento puro, ed avendo scelto come positivo il movimento tangenziale “verso il basso”. Combinando le due equazioni in modo da ricavare $\alpha$ si ottiene: $\alpha = (2/3)(g/r)\cos\theta$ , da cui $F_A = I\alpha/r = mg\cos\theta/3$ . D’altra parte deve essere anche $F_A \le mg\sin\theta\ \mu$ , da cui $\mu \ge 1/(3tg\theta)$. Poichè la tangente è una funzione monotona crescente di $\theta$, ed essendo $\theta$ compreso tra $\theta_0$ e $\pi/2$, la condizione di rotolamento puro è sempre soddisfatta se è soddisfatta in $\theta_0$]

Soluzione corretta grazie ad Ambra 26/6/07

b) Nella situazione descritta, cioè in condizioni di rotolamento puro, quanto vale la velocità angolare $\omega$ del cilindro quando questo si trova a passare per la posizione $\theta' = \pi/2$ (il “fondo” della guida)?
$\omega$ = …………………………….. ~ .......... rad/s $((4/3)(gR/r^2)(1-\sin\theta_0))^{1/2}$ ~ 27 rad/s [poichè l’attrito coinvolto nel rotolamento puro è di tipo statico, l’energia meccanica si conserva e quindi: $0 = \Delta U_g + \Delta E_k = mg\Delta z + (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2$. Essendo la differenza di quota del centro di massa del cilindro pari a $\Delta z = -R(1-\sin\theta_0)$ ed avendo $I = (mr^2/2)$ per un cilindro omogeneo e $v_{CM} = \omega r$ per la condizione di rotolamento puro, si ottiene la soluzione]

c) Quanto vale la quota massima $h_{MAX}$ che il cilindro raggiunge viaggiando nella “metà” liscia della guida? [Considerate questa quota come la differenza di altezza tra centro del cilindro e “fondo” della guida e fate **attenzione** a cosa si conserva nella transizione fra zona scabra e zona liscia!]
$h_{MAX}$ = …………………………….. ~ .......... m $(\omega r)^2/(2g) = (2/3)R(1-\sin\theta_0)$ ~ $5.8\text{x}10^{-2}$ m [si applica ancora la conservazione dell’energia meccanica, notando che né alla transizione tra zona scabra e zona liscia né nel prosieguo del percorso ci sono momenti delle forze sul cilindro che ne possano arrestare la rotazione; dunque per il cilindro si conserva il momento angolare e quindi esso **continua a ruotare** attorno al suo asse con velocità angolare $\omega$. La conservazione dell’energia si scrive allora: $0 = \Delta U_g + \Delta E_k = mgh_{MAX} + (I/2)\omega^2 - (m/2)v_{CM}^2 - (I/2)\omega^2$ con $v_{CM} = \omega r$ , essendo $\omega$ il valore determinato nella risposta precedente]

3. Una quantità $n$ = 1.00 moli di gas perfetto **monoatomico** compie il ciclo termico rappresentato in figura, costituito dalla successione delle seguenti trasformazioni **reversibili**: espansione isobara A→B, isocora B→C, compressione isoterma C→A. I dati noti del ciclo sono: $P_A = P_0$ = 2.73x10$^5$ Pa, $V_A = V_0$ = 8.31 litri, $V_B = V_C = V_1 = 2V_0$. [Nella soluzione usate il valore $R$ = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti e ricordate che per un gas perfetto monoat. è $c_V = (3/2)R$; può farvi comodo sapere che $ln(1/2)$ ~ -0.693]




a) Quanto vale l’efficienza $\eta$ di una macchina che usa questo ciclo termico?
$\eta$ = ...................................... ~ ............. $(V_1/V_0-1+\ln(V_0/V_1))/((5/2)(V_1/V_0-1)) = (2/5)(1+\ln(1/2))$ ~ 0.123 [l’efficienza del ciclo è $\eta = L/Q_{ass}$ ; il lavoro nel ciclo vale $L = P_0(V_1-V_0) + nRT_0\ln(V_0/V_1) = nRT_B - nRT_0 + nRT_0\ln(V_0/V_1)$, dove abbiamo sfruttato la legge dei gas perfetti per cui $P_0V_1 = nRT_B$ e $P_0V_0 = nRT_0$; la temperatura del punto B (connesso ad A da una isobara) si può esprimere come $T_B = T_0V_1/V_0$, per cui si ha: $L = nRT_0(V_1/V_0 - 1 + \ln(V_0/V_1))$. Il calore viene assorbito nella sola trasformazione isobara A→B, e vale $Q_{ass}=nc_P(T_B-T_0) = (5/2)nRT_0(V_1/V_0-1)$, dove abbiamo usato la relazione $c_P = c_V+R = (5/2)R$, da cui la soluzione]

b) Sapendo che la sorgente termica a **temperatura minore** nel ciclo è costituita da una massa $M$ = 10 kg di ghiaccio fondente, che si trova alla temperatura $T_G$ = 273 K ed ha un calore latente di fusione $\lambda$ = 3.35x10$^5$ J/kg, quanto lavoro meccanico $L$ potrà essere ottenuto dalla macchina fino alla **completa fusione** del ghiaccio?
$L$= ...................................... ~ ............. J $Q_{ASS}\eta = (Q_{CED}/(\eta-1))\eta = -M\lambda\eta/(\eta-1)$ ~ 3.61x10$^5$ J [la temperatura minore del ciclo è proprio $T_0 = P_0V_0/(nR)$ = 273 K; quindi il ghiaccio fondente è una buona sorgente termica a bassa temperatura per il ciclo, cioè può ricevere il calore $Q_{CED}$ che essa cede complessivamente nel suo funzionamento. Al completo scioglimento della massa di ghiaccio si deve avere $Q_{CED} = -M\lambda$, dove il segno negativo dipende dal fatto che il calore ceduto dalla macchina è assorbito dal ghiaccio. D’altra parte per definizione si ha $\eta = L/Q_{ASS}$ ed anche $\eta = (Q_{ASS}+Q_{CED})/Q_{ASS}$ , ovvero $Q_{ASS} = Q_{CED}/((\eta-1))$ , dove $\eta$ è stato determinato nella risposta precedente, da cui la soluzione]

c) Quanto vale la variazione di entropia $\Delta S$ per la **successione** di trasformazioni A→B→C?
$\Delta S$= ...................................... ~ ............. J/K $-\Delta S_{C\to A} = -nR\ln(V_0/V_1)$ ~ 5.75 J/K [la variazione di entropia è una funzione di stato che dipende solo dai punti iniziale e finale della trasformazione; nel caso considerato tali punti sono connessi da una isoterma reversibile (compiuta in senso inverso, cioè con un segno negativo davanti); per una isoterma $T$ è costante e $\Delta S = Q/T = L/T$ , da cui il risultato]

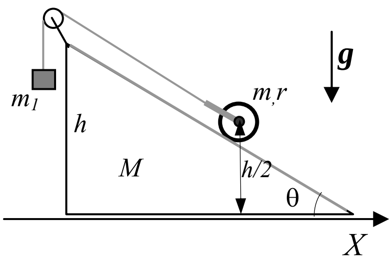
**Nota**: acconsento che l’esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 13/4/2007 Firma:

# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 13/4/2007

**Nome e cognome: …………………………………………………………… Matricola: ……………**

*Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una ruota di bicicletta (cioè un cerchione omogeneo di massa $m$ = 0.10 kg e raggio $r$ = 10 cm, munito di "razzi" di massa trascurabile) si trova a "metà strada" su un piano inclinato di altezza $h$ = 3.5 m ed angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il piano è realizzato con un blocco di materiale di massa $M = 50m$ = 5.0 kg che può scivolare con **attrito trascurabile** su un piano orizzontale liscio lungo la direzione $X$ di un sistema di riferimento. Inoltre la ruota può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse, che è montato su un giogo a cui si trova agganciata una fune inestensibile; giogo e fune hanno massa trascurabile. Dopo essere passata per la gola di una puleggia di **massa e raggio trascurabili**, la fune termina con un corpo di massa $m_1 = 5m$ = 0.50 kg. La figura rappresenta uno schema del sistema nella sua configurazione iniziale, in cui, come detto, la ruota si trova **ferma** alla quota $h/2$ per una qualche causa esterna.




Disegno non in scala!

a) Ad un dato istante la causa esterna che blocca la ruota viene rimossa e la ruota comincia a risalire lungo il piano inclinato con un moto di **rotolamento puro** mentre il corpo di massa $m_1$ scende verso il basso (supponete che il suo movimento avvenga **solo** in **direzione verticale**). Quanto vale, in modulo, la velocità $V$ del blocco che costituisce il **piano inclinato** quando la ruota raggiunge la sommità del piano stesso? [Usate il valore $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; notate che, ovviamente, la velocità del blocco può essere solo orizzontale; può servirvi ricordare che $\cos(\pi/6) \sim 0.87$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]

$V$ = …………………………………… ~ ………… m/s $(gh(m_1/\sin\theta - m)/(M+2M^2/(m\cos^2\theta)))^{1/2} = (9gh/(50(1+100/\cos^2\theta)))^{1/2} \sim 3\cos\theta\, (gh/5\text{x}10^3)^{1/2} \sim 2.2\text{x}10^{-1}$ m/s [il sistema (piano inclinato + "accessori") è isolato in direzione orizzontale e in questa direzione si conserva la q.di moto totale che è nulla all'inizio, cioè si ha sempre $0 = m\, v_X + MV$ , dove $v_X$ rappresenta la **componente orizzontale** della velocità del centro di massa della ruota: $v_X = v\cos\theta$; notate che l'altro elemento che è animato di moto traslazionale, il corpo $m_1$, non compare nell'equazione dato che la sua velocità va considerata **solo** verticale (circostanza vera in prima approssimazione): di conseguenza si trascura ovunque nella soluzione la presenza della massa $m_1$.. Inoltre per la conservazione dell'energia meccanica, dovuta all'assenza di cause dissipative, si ha: $0 = \Delta U_g + \Delta E_k = mg(h/2) - m_1 g(h/(2\sin\theta)) + (m/2)v^2 + (m_1/2)v^2 + (I/2)\omega^2 + (M/2)V^2$ dove si intende che, quando la ruota ha raggiunto la sommità del piano, il suo centro di massa si è alzato di un tratto $h/2$, mentre il corpo $m_1$ è sceso di un tratto $h/(2\sin\theta)$, pari al tratto percorso dalla ruota sul piano (la fune è inestensibile!); inoltre abbiamo osservato che le velocità di traslazione della ruota e del corpo sono uguali, essendo la fune inestensibile. Il momento di inerzia della ruota vale $I = mr^2$, e la condizione di rotolamento puro impone $\omega = v/r$. Notate che la puleggia, avendo massa e raggio trascurabili, non contribuisce alla dinamica. Risolvendo il sistema delle due equazioni si ottiene la soluzione. Per ottenere il risultato numerico occorre sfruttare le relazioni fra i valori numerici delle masse riportate nel testo. Si può anche fare qualche ragionevole approssimazione allo scopo di avere un'espressione più "maneggevole", tra cui quella di considerare trascurabile l'energia cinetica del piano, motivata dalla bassa velocità che esso raggiunge (ma questa approssimazione sarebbe comunque da verificare!)]

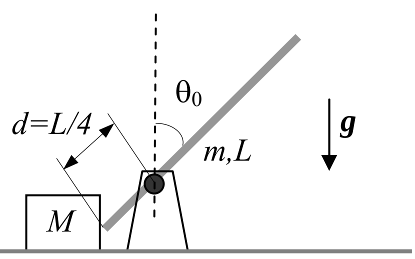
Osservazioni e commenti aggiunti grazie ad Ambra 26/6/07

b) Quanto vale lo spostamento orizzontale $\Delta X$ del blocco in seguito alla risalita della ruota fino alla sommità del piano?

$\Delta X$ = …………………………………… ~ ............ m $(m/(m+M))h/(2tg\theta) \sim 6.0\text{x}10^{-2}$ m

[dato che il sistema è isolato in direzione orizzontale ed è inizialmente fermo, il suo centro di massa rimane sempre nella stessa posizione orizzontale, cioè $\Delta x_{CM} = 0$. D'altra parte $0 = \Delta x_{CM} = (m\Delta x + M\Delta X)/M_{TOT}$ , da cui $\Delta X = -(m/M)\Delta x$ . Per ragioni geometrichem lo spostamento orizzontale della ruota rispetto al piano vale $\Delta x' = -h/(2tg\theta)$ (il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse di figura). In un sistema di riferimento fisso al suolo si ha allora $\Delta x = \Delta x' + \Delta X = -h/(2tg\theta) + \Delta X$, da cui la soluzione]

2. Una sottile asta **omogenea** di massa $m$ = 10 kg e lunghezza $L$ = 4.9 m è imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale attorno ad un asse passante per un punto che si trova a distanza $d = L/4$ da un suo estremo. Volete fare in modo che l'asta stia



in equilibrio formando un angolo $\theta_0 = \pi/4$ rispetto alla verticale, come indicato in figura. A questo scopo mettete un suo estremo a contatto con una cassa rigida di massa $M = 2m = 20$ kg poggiata su un pavimento **scabro**. La configurazione è tale che la cassa non si "ribalta" e rimane poggiata sul pavimento. [Per la soluzione usate il valore $g = 9.8$ m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) \sim 0.71$]

a) Qual è il valore minimo $\mu_{min}$ del coefficiente di attrito statico tra cassa e pavimento che garantisce l'equilibrio nelle condizioni di figura?

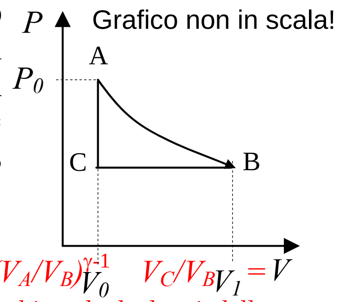
$\mu_{min}$ = …………………………….. = ……….. $(m/M)tg\theta_0 = 0.50$ [se la cassa è ferma la forza di attrito statico $\boldsymbol{F_A}$ deve essere uguale alla forza che la cassa esercita sull'estremità dell'asta; l'equilibrio rotazionale dell'asta è garantito da questa forza (applicata al punto di contatto tra asta e cassa), il cui momento rispetto al perno deve bilanciare il momento della forza peso, applicata al centro di massa dell'asta (che si trova al punto di mezzo). Tenendo conto della geometria del problema si ha $0 = mg(L/4)sin\theta_0 - F_A(L/4)cos\theta_0$ , avendo scelto come positivo il verso di rotazione orario dell'asta attorno al perno. Si ha quindi: $F_A = mgtg\theta_0$. D'altra parte è anche $F_A \le Mg\mu$, da cui la soluzione]

b) Arriva il Mago Silvan e improvvisamente la cassa sparisce (in modo istantaneo): l'asta comincia quindi a ruotare attorno al perno. Quanto vale la sua accelerazione angolare $\alpha$ **subito dopo** la sparizione della cassa?

$\alpha$ = …………………………….. ~ ……….. rad/s$^2$ $mg(L/4)sin\theta_0/I' = (g/L)\ (12/7)\ sin\theta_0 \sim 2.4$ rad/s$^2$ [l'equazione del moto rotazionale recita, per i moduli, $\alpha = \tau/I'$, dove $I'$ è il momento di inerzia per rotazioni attorno al perno e l'unica forza che produce momento è la forza peso agente sul centro di massa. Pertanto, considerando che **subito dopo** la sparizione della cassa l'asta si trova ancora nella posizione $\theta_0$, si ha $\tau = mg(L/4)sin\theta_0$. Il calcolo di $I'$ si può fare partendo dalla definizione, cioè calcolando l'integrale $\int r^2\, dm$ tra gli estremi $-L/4$ e $3L/4$, oppure, in modo più diretto, usando il teorema degli assi paralleli: $I' = I_{CM}+mD^2$ con $I_{CM}=(m/12)L^2$ e $D = L/4$ per la geometria del sistema. Si ottiene $I' = (7m/48)L^2$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale la velocità angolare $\omega$ di rotazione dell'asta nell'istante in cui essa si trova in posizione orizzontale (cioè quando l'angolo indicato in figura vale $\theta = \pi/2$)?

$\omega$ = …………………………….. ~……….. rad/s $((2mg(L/4)cos\theta_0)/I')^{1/2} = ((24/7)(g/L)cos\theta_0)^{1/2} \sim 2.2$ rad/s [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U_g = (I'/2)\omega^2 - mg(L/4)cos\theta_0$ , dove si è presa come variazione dell'energia potenziale gravitazionale quella dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta, che vale $\Delta z = -(L/4)cos\theta_0$]




3. Una quantità $n = 1.0\text{x}10^{-1}$ moli di gas perfetto **monoatomico** compie il ciclo termico rappresentato in figura, costituito dalla successione delle seguenti trasformazioni **reversibili**: espansione adiabatica A→B, compressione isobara B→C, isocora C→A. I dati noti del ciclo sono: $P_A = P_0 = 8.3\text{x}10^5$ Pa, $V_A = V_C = V_0 = 1.0$ litri, $V_B = V_1 = 8V_0 = 8.0$ litri. [Nella soluzione usate il valore $R = 8.3$ J/(K mole) e ricordate che per un gas perfetto monoat. è $c_V = (3/2)R$ ]

a) Quanto vale la minima temperatura $T_{min}$ raggiunta dal gas nel ciclo?

$T_{min}$ = …………………………….. = ……… K $T_C = T_BV_C/V_B = T_A(V_A/V_B)^{\gamma-1}\ V_C/V_B = (P_0V_0/(nR))\ (V_0/V_1)^{2/3}\ V_0/V_1 = (P_0V_0/(nR))\ (V_0/V_1)^{5/3} = 31$ K [si ottiene combinando le leggi delle varie trasformazioni, notando che, essendo il gas perfetto e monoatomico, si ha $\gamma = c_P/c_V = (1+c_V)/c_V = 5/3;$ ricordate inoltre che temperatura e volume in un'adiabatica reversibile sono legate fra loro dalla relazione $TV^{\gamma-1} = cost$. Quindi $T_B = T_A(V_0/V_1)^{\gamma-1}$ ; dato che la B→C è una isobara, si ha poi $T_C = T_BV_0/V_1$ ]

b) Quanto vale l'efficienza $\eta$ di una macchina che usa questo ciclo termico?

$\eta$ = ……………………………………. = …………. $1+\gamma(T_{min}-T_B)/(T_0-T_{min})=1+\gamma\ ((V_0/V_1)^{\gamma} - (V_0/V_1)^{\gamma-1})/(1-(V_0/V_1)^{\gamma}) = 1+(5/3)(1/32-1/4)/(1-1/32) = 1-35/93 = 0.62$ [l'efficienza del ciclo è $\eta = L/Q_{ass} = 1 + Q_{ced}/Q_{ass}$. Il calore viene assorbito nella trasformazione C→A e ceduto in quella B→C (la A→B non scambia calore!) e si ha $Q_{ced} = nc_P(T_C-T_B)$ e $Q_{ass} = nc_V(T_A-T_C)$. Quindi $\eta = 1 + (c_P/c_V)\ (T_C-T_B)/(T_A-T_C) = 1+\gamma\ (T_{min}-T_B)/\ (T_0-T_{min})$. Il risultato viene esprimendo le temperature in funzione dei dati del problema e facendo un po' di algebra sui numeri]

c) Quanto vale la variazione di entropia $\Delta S$ per la **successione** di trasformazioni B→C→A?

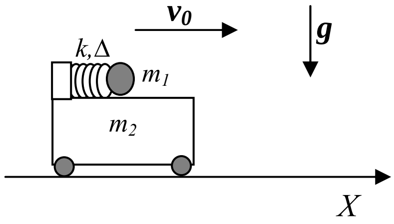
$\Delta S$= ……………………………………. = …………. J/K 0 [la variazione di entropia è una funzione di stato che dipende solo dai punti iniziale e finale della trasformazione; nel caso considerato tali punti sono connessi da una adiabatica reversibile (compiuta in senso inverso), e per una adiabatica reversibile si ha $\Delta S = 0$]

# Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 13/4/2007

**Nome e cognome: ……………………………………………………** **Matricola: ……………**

*Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.* ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un "cannoncino a molla" (tipo flipper, per intenderci) è montato sopra un piccolo carrello in modo da avere il suo asse (e quindi la direzione di sparo) in direzione orizzontale; il cannoncino è costituito da una molla di massa trascurabile e costante elastica $k$ = 6.0 N/m che inizialmente è mantenuta compressa per un tratto $\Delta$ = 20 cm da un fermo. Il proiettile che il cannoncino spara ha massa $m_1 = m$ = 1.0 kg; il carrello ha massa $m_2 = 2m$ = 2.0 kg e si muove con **attrito trascurabile** lungo un binario piano e rettilineo disposto in direzione dell'asse $X$ di un sistema di riferimento, con una velocità **iniziale** $v_0$ = 0.50 m/s. Il sistema nelle sue condizioni iniziali (cioè quando la sua massa complessiva è $m_1+m_2=3m$) è rappresentato schematicamente in figura.



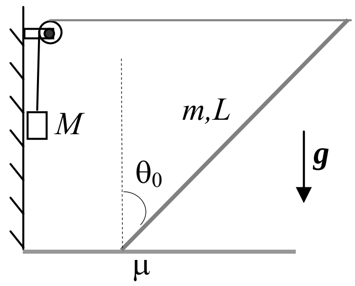

a) Ad un certo istante il fermo che tiene compressa la molla viene rimosso ed il proiettile viene sparato in direzione orizzontale. Quanto vale la velocità $V$ del carrello subito dopo il lancio del proiettile? [Può farvi comodo notare che il proiettile viene lanciato nello stesso verso di $\mathbf{v_0}$]

$V$ = …………………………………… = ……….. m/s $v_0 - (k/(6m))^{1/2}\Delta = 3.0\text{x}10^{-1}$ m/s [il sistema è isolato lungo $X$ e si conserva la q.di moto totale, cioè: $(m_1+m_2)v_0 = 3mv_0 = m_1v_1 + m_2v_2 = mv + 2mV$, con $v$ velocità del proiettile. Si ha quindi subito: $v = 3v_0 - 2V$. Inoltre il bilancio energetico, notando che la variazione di energia elastica vale $\Delta U_{ela} = -(k/2)\Delta^2$ , permette di scrivere: $0 = \Delta U_{ela} + \Delta E_k = -(k/2)\Delta^2 + (m_1/2)v^2 + (m_2/2)V^2 - ((m_1+m_2)/2)v_0^2 = -(k/2)\Delta^2 + (m/2)(2V^2 + v^2 - 3v_0^2)$. Si ha quindi un sistema di due equazioni e due incognite che dà luogo a due soluzioni, come ci si aspetta perché, fisicamente, la differenza di energia elastica non distingue tra molla compressa ed estesa. La scelta tra le due soluzioni deve essere fatta notando che in questo problema la velocità del carrello dopo lo sparo del proiettile deve diminuire rispetto al valore iniziale]

b) Sapendo che lo sparo del proiettile viene effettuato in un intervallo di tempo $\Delta t$ = 1.0x10$^{-2}$ s, quanto vale, in modulo, la forza **media** $F$ che il cannoncino esercita sul carrello?

$F$ = …………………………………… = ............... N $|\Delta p_2| / \Delta t = m_2|V-v_0|/\Delta t = m_2(k/(6m))^{1/2}\Delta / \Delta t$ = 40 N [dal teorema dell'impulso, essendo $\Delta p_2$ la variazione della quantità di moto del solo carrello]

2. Una sottile asta omogenea di massa $m$ = 5.0 kg e lunghezza $L$ = 4.9 m è poggiata su un pavimento **scabro** e mantenuta in una posizione tale che il suo asse forma un angolo $\theta_0 = \pi/4$ rispetto alla verticale. A tale scopo provvede il sistema rappresentato in figura, che risulta composto da: una fune (inestensibile e di massa trascurabile, agganciata alla sommità dell'asta), una puleggia (ancorata ad una parete verticale ed in grado di ruotare con attrito trascurabile attorno al proprio asse), un corpo di massa $M$ (incognita) appeso alla fune. Nel tratto di collegamento tra puleggia e sommità dell'asta la fune è orizzontale. [Per la soluzione usate il valore $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/4) = cos(\pi/4) \sim 0.71$]




a) Qual è il valore minimo $\mu_{min}$ del coefficiente di attrito statico tra base dell'asta e pavimento scabro affinché il sistema sia in equilibrio?

$\mu_{min}$ = …………………………….. = .......... $tg\theta_0/2 = 0.50$ [deve esserci equilibrio traslazionale e rotazionale rispetto ad un polo a vostra scelta. Detta $T$ la tensione della fune, per l'equilibrio traslazionale deve essere, per i moduli, $F_A = T$. Usando come polo il "punto" di contatto tra asta e pavimento, l'equilibrio rotazionale impone $TLcos\theta_0 = mg(L/2)sin\theta_0$, dove si è applicata la forza peso al centro di massa che, essendo l'asta omogenea, cade a distanza $L/2$

dall'estremità dell'asta. D'altra parte per l'equilibrio del corpo di massa $M$ deve essere $T$ = Mg, mentre $F_A \leq \mu\ mg$. Combinando le varie equazioni si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che ad un dato istante la fune venga tagliata, quanto vale l'accelerazione angolare $\alpha$ con cui l'asta **comincia** a ruotare attorno ad un asse passante per il "punto" di contatto con il pavimento (ed ortogonale al foglio)?

$\alpha$ = …………………………….. ~ ........... rad/s$^2$ $(mg(L/2)sin\theta_0)/I = (3/2)(g/L)sin\theta_0 \sim 2.1$ rad/s$^2$

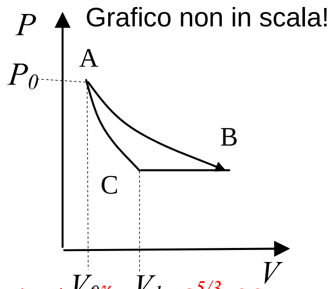
[la seconda equazione cardinale recita $\alpha = \tau/I$ , con $I = (m/3)L^2$ (asta sottile che ruota attorno ad un suo estremo). Quando l'asta inizia a ruotare essa è sottoposta al momento della forza peso $\tau = mg(L/2)sin\theta_0$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale la velocità angolare $\omega$ con cui l'asta sta ruotando quando essa raggiunge il suolo, cioè quando l'angolo $\theta$ di figura "tende" a $\pi/2$?

$\omega$ = …………………………….. ~ ........... rad/s $(mgcos\theta_0/I)^{1/2} = (3gcos\theta_0/L)^{1/2} \sim 2.1$ rad/s

[nel processo si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta U_g + \Delta E_k = -mg(L/2)cos\theta_0 + (I/2)\omega^2 = -mg(L/2)cos\theta_0 + (mL^2/6)\omega^2$ , da cui la soluzione]

3. Una quantità $n = 1.0\text{x}10^{-1}$ moli di gas perfetto **monoatomico** compie il ciclo termico rappresentato in figura, costituito dalla successione delle seguenti trasformazioni **reversibili**: espansione isoterma A→B, compressione isobara B→C, compressione adiabatica C→A. I dati noti del ciclo sono: $P_A = P_0 = 8.3\text{x}10^5$ Pa, $V_A = V_0 = 1.0$ litri, $V_C = V_1 = 8V_0 = 8.0$ litri. [Nella soluzione usate il valore $R$ = 8.3 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti e ricordate che per un gas perfetto monoatomico è $c_V = (3/2)R$]




a) Quanto vale il volume $V_B$ del gas al punto B del ciclo?

$V_B$ = …………………………….. = .......... litri $P_0V_0/(P_0(V_0/V_1)^\gamma) = V_0(V_1/V_0)^\gamma = V_0 8^{5/3}$ $32V_0$ = 32 litri [per la legge dei gas perfetti deve essere $V_B = nRT_B/P_B = nRT_0/P_B$, con $T_0 = P_0V_0/(nR)$; per l'adiabatica C→A si può scrivere $P_C = P_B = P_0(V_0/V_1)^\gamma$, con $\gamma = c_P/c_V = (c_V+1)/c_V = 5/3$; combinando le due equazioni si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale l'efficienza $\eta$ di una macchina che usa questo ciclo termico? [Per la soluzione può farvi comodo sapere che $ln(8) \sim 2.1$]

$\eta$ = ....................................... ~ ............. $1+c_P((V_0/V_1)^{\gamma-1}-1)/(R(c_P/c_V)ln(V_1/V_0)) = 1 + (3/2)(1/8^{2/3}-1)/ln(8) = 1 - (3/2)(3/4)/ln(8) \sim 0.46$ [l'efficienza del ciclo è $\eta = L/Q_{ass} = 1 + Q_{ced}/Q_{ass}$. Il calore viene assorbito nella trasformazione A→B e ceduto in quella B→C (la C→A non scambia calore!) e si ha $Q_{ass} = L_{A\rightarrow B} = nRT_0ln(V_B/V_0)$ e $Q_{ced} = nc_P(T_C-T_B) = nc_P(T_C-T_0)$. Per determinare la temperatura $T_C$ basta usare la legge delle isobare: $T_C = T_BV_C/V_B = T_0V_1/V_B = T_0V_1/(V_0(V_1/V_0)^\gamma) = T_0(V_0/V_1)^{\gamma-1}$. Usando l'espressione $c_P = R+c_V = (5/2)R$ e sfruttando le note proprietà della funzione logaritmo, si ottiene il risultato]

c) Quanto vale la variazione di entropia $\Delta S$ per la **successione** di trasformazioni A→B→C?

$\Delta S$= ....................................... = ............. J/K 0 [la variazione di entropia è una funzione di stato che dipende solo dai punti iniziale e finale della trasformazione; nel caso considerato tali punti sono connessi da una adiabatica reversibile compiuta in senso inverso, e per una adiabatica reversibile si ha $\Delta S = 0$]

---

**Nota**: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 13/4/2007 Firma: