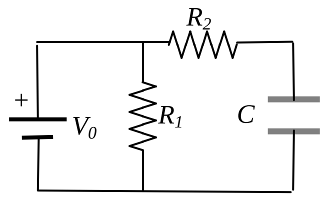
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 4 - 23/5/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… **Matricola: ……………**

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



1. Un circuito elettrico è costituito da due resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm) ed un condensatore (C_1 = 200 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale continua V_0 = 10.0 V.
   a) Quanto vale la corrente I erogata dal generatore in condizioni stazionarie?
   I = …………………………………… = ………… mA V_0/R_1 = 100 mA [in condizioni stazionarie la corrente passa attraverso la sola resistenza R_1]

   b) Quanto vale l'energia elettrostatica U_E accumulata nel condensatore in condizioni stazionarie?
   U_E = …………………………………… = ... J $(C/2)V_0^2$ = 1.00×10^{-2} J [in condizioni stazionarie le armature del condensatore si trovano a differenza di potenziale pari a V_0, da cui la soluzione]

   c) Supponete ora che il generatore sia sostituito con un generatore di differenza di potenziale alternata $V = V_0 cos(\omega t)$, con V_0 = 10.0 V e ω = 500 rad/s. Come si scrive l'equazione per la corrente **totale** $I(t)$ fornita dal generatore? Come si scrive la differenza di potenziale $V_2(t)$ che si misura in queste condizioni ai capi del resistore R_2? Commentate sul suo andamento temporale rispetto alla differenza di potenziale $V(t)$ fornita dal generatore e sulla sua ampiezza massima.
   $I(t)$ = …………………………………… $V(t)/R_1 + dQ(t)/dt = V(t)/R_1 + CdV(t)/dt = (V_0/R_1)(cos(\omega t) - \omega R_1 C sin(\omega t))$ [la corrente fluisce nel resistore R_1 (nella misura stabilita dalla legge di Ohm, cioè $V(t)/R_1$) e "verso l'armatura" del condensatore (nella misura $dQ(t)/dt$, avendo indicato con $Q(t)$ la carica che si trova sulle armature del condensatore stesso]
   $V_2(t)$ = …………………………………… $R_2 dQ(t)/dt = R_2 C dV(t)/dt = -\omega R_2 C V_0 \sin(\omega t)$ [la differenza di potenziale è proporzionale alla corrente che fluisce nel resistore R_2, che è proprio quella che va "verso l'armatura" del condensatore]
   Commento: …………………………………… la $V_2(t)$ rappresenta la derivata temporale della $V(t)$ moltiplicata per il fattore R_2C. Essendo il prodotto $\omega R_2 C \sim 40$, questa tensione ha un'ampiezza molto elevata, dato che nelle condizioni considerate ("alta frequenza") la maggior parte della corrente passa proprio attraverso R_2 ed è utilizzata per caricare (e scaricare!) il condensatore. Nella discussione si trascura ogni fenomeno legato alla presenza di campi fortemente non stazionari (fenomeni induttivi, etc.), come permesso dal fatto che la pulsazione, pur essendo alta, non appartiene al regime delle onde elttromagnetiche

2. Un "condensatore sferico" è costituito da una sfera di materiale buon conduttore di raggio a = 10 mm concentrica ad un guscio sferico spesso, sempre realizzato di materiale buon conduttore, con raggio interno b = 20 mm e raggio esterno c = 25 mm. Si consideri inizialmente vuoto lo spazio tra le due armature. [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]
   a) Quanto vale la capacità C del condensatore? [Non basta citare il risultato, occorre sviluppare il procedimento in maniera corretta e completa!]
   C = …………………………….. = ... F $4\pi\varepsilon_0/(1/a-1/b) = 2.2\times10^{-12}$ F = 2.2 pF [supponiamo di collegare il condensatore ad un generatore ΔV: tra le armature si crea un campo elettrico la cui dipendenza funzionale dal raggio r (generico!) può essere determinata attraverso il teorema di Gauss come $E(r)=Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, dove Q è la carica (per il momento incognita) che si trova sull'armatura in condizioni di equilibrio. Sapendo che la simmetria del problema impone che il campo sia radiale, deve essere $\Delta V = -\int_a^b E(r)dr = (Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/a - 1/b)$. D'altra parte per definizione è $C = |Q|/\Delta V$, da cui la risposta]

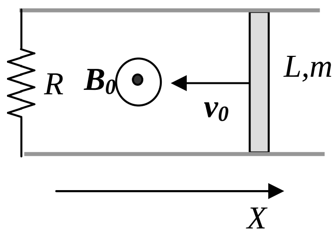
   b) Supponete ora che le armature vengano collegate ad un generatore di differenza di potenziale V_0 = 30 V (il polo positivo è sull'armatura interna). In condizioni stazionarie, a quale **potenziale** V si trovano i punti collocati a distanza R = 15 mm dal centro del condensatore? [Per centro si intende il centro del sistema sfera e guscio sferico; notate che si chiede il **potenziale** e non la **differenza di potenziale**! Fate l'ovvia assunzione di porre pari a zero il potenziale "all'infinito"]
   V = …………………………….. = ... V $\int_\infty^R E(r)dr = \int_b^R E(r)dr = \int_b^R (CV_0/(4\pi\varepsilon_0 r^2))\, dr = (V_0 ab/(b-a)) \int_b^R (1/r^2)\, dr = (V_0 ab/(b-a)) \int_b^R (1/r^2)\, dr = V_0(a/R)(b-R)/(b-a)$ = 10 V [per definizione, la

differenza di potenziale $\Delta V_{\infty R}$ tra l'"infinito" e il punto a distanza R deve essere $\Delta V_{\infty R} = 0 - V = -\int_\infty^R E(r)dr$, dove si è sfruttato il carattere radiale del campo. D'altra parte per $r>b$ il campo è nullo, come si può facilmente dimostrare applicando il teorema di Gauss e notando che, in condizioni stazionarie (di equilibrio), il campo tra $r=b$ e $r=c$ è nullo. Quindi l'estremo di integrazione "passa" dall''infinito a b , da cui la soluzione]

c) Supponete ora che lo spazio tra le armature sia riempito di un materiale **debolmente conduttore** dotato di conducibilità elettrica $\sigma_C = 1.0$ (ohm m)$^{-1}$. Quanto vale la resistenza $\Re$ che si misura tra le armature?

$\Re$ = …………………………….. = ... ohm $V/I = V/(\sigma_C Q/\varepsilon_0) = \varepsilon_0/(\sigma_C C) = \varepsilon_0/(\sigma_C 4\pi\varepsilon_0/(1/a-1/b)) = (1/a-1/b)/(4\pi\sigma_C) = Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/c) = 4.0$ ohm [tra le armature si instaura una corrente elettrica, la cui densità è $\boldsymbol{j} = \sigma_c \boldsymbol{E}$. Dunque, la corrente è radiale e per trovarne l'intensità occorre calcolare il flusso di $\boldsymbol{j}$ su una opportuna superficie. Scegliendo una superficie sferica concentrica con il sistema e di raggio $a<r<b$ si ha che il flusso è determinato dal prodotto tra superficie e modulo della densità di corrente, cioè $I = 4\pi r^2 j = 4\pi r^2 \sigma_C E = 4\pi r^2 \sigma_C Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = \sigma_C Q/\varepsilon_0$; notate che il valore dell'intensità di corrente non dipende dalla scelta della superficie di integrazione (purché sferica e concentrica), come deve essere per la "conservazione della carica", cioè della corrente tra le armature. Usando la legge di Ohm $\Re = V/I$ (con V generico) e ricordando che $Q = CV$ (con V generico) si ottiene la soluzione]

3. Una sottile barretta di materiale buon conduttore lunga L e di massa m costituisce il "lato mobile" di una spira; essa, infatti, può scorrere senza attrito in direzione **orizzontale** mantenendosi in contatto con due guide (rigide e fisse) di materiale buon conduttore collegate fra loro da una resistenza R secondo lo schema rappresentato in figura. Nella regione di spazio di interesse è presente un campo magnetico esterno **uniforme e costante** $\boldsymbol{B_0}$ uscente dal foglio. All'istante $t_0 = 0$ si osserva che la barretta si muove nel verso negativo dell'asse X (cioè verso sinistra, rispetto alla figura) con velocità di modulo v_0.



a) Che verso ha, rispetto alla figura, la corrente "indotta" che circola nella spira all'istante t_0? Perché? [Spiegate bene!]

□ Orario X □ Antiorario Spiegazione: .... avete due possibilità (equivalenti) di spiegazione. Per la legge di Lenz viene indotta una corrente che produce un campo magnetico (indotto) i cui effetti tendono ad annullare quelli della variazione del flusso del campo esterno; pertanto tale campo magnetico deve essere parallelo e concorde con il campo esterno. Ricordando la regola della mano destra (versione "ciao ciao") si ottiene la risposta. In alternativa è sufficiente considerare il verso della forza di Lorentz sulle cariche libere (positive) della barretta; per la regola della mano destra si vede che esse sono spinte verso l'alto, in figura, e quindi danno luogo ad una corrente antioraria

b) Come si esprime l'intensità di corrente I_0 che all'istante t_0 circola nella resistenza R?

I_0 = ... $v_0 B_0 L/R$ [anche qui coesistono le due possibilità. Per Faraday la fem indotta è $fem = -d\Phi_{SPIRA}(\boldsymbol{B_0})/dt = -v_0 B_0 L$ e per Ohm $I_0 = |fem|/R$, da cui la soluzione. Per Lorentz il campo impresso nella barretta vale, in modulo, $v_0 B_0$ e, essendo uniforme, produce una differenza di potenziale che, in modulo, vale $v_0 B_0 L$. Usando anche in questo caso Ohm si riottiene la stessa soluzione]

c) Considerate ora che per $t > t_0 = 0$ sulla barretta non agisca alcuna "causa" (forza) esterna (un operatore esterno, evidentemente, ha fatto il suo lavoro a $t < 0$ per portare la barretta a velocità $\boldsymbol{v_0}$). Come si scrive l'equazione del moto $a(t)$ della barretta per $t > t_0 = 0$? Commentate sul tipo di moto che vi aspettate. [Riferitivi all'asse X di figura e notate che la barretta continua naturalmente ad essere soggetta agli "effetti meccanici" legati alla presenza del campo magnetico e del movimento...]

$a(t)$ = ... $F_M/m = B_0 L I(t)/m = v(t) B_0^2 L^2/(Rm)$.

Commento: .... la corrente che circola nella barretta, interagendo con il campo magnetico, dà luogo ad una forza che, integrata sulla lunghezza dell'intera barretta, vale $B_0 I(t) L$ ed ha il verso positivo dell'asse X. D'altra parte la corrente diventa funzione del tempo ma mantiene l'espressione trovata al punto b), dove al posto di v_0 va considerata una velocità variabile $v(t)$. L'equazione del moto scritta, tenendo conto del verso (negativo) della velocità iniziale, produce la stessa legge del moto viscoso, cioè la velocità tende esponenzialmente a zero al passare del tempo]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 23/5/2008 Firma: