Corso di Laurea XX – PROVA DI PROVA DI VERIFICA n. 0 – a.a. 2009/10

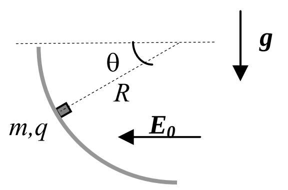
Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. VERSIONE ORIGINALE CONSEGNATA AGLI STUDENTI: Due oggetti puntiformi (A e B) si muovono in un sistema di riferimento cartesiano bidimensionale XY sotto l'effetto di un'accelerazione costante e uniforme $\boldsymbol{a}$ = (0, a), con a = -2.0 m/s^2. All'istante t_0 = 0 i due oggetti si trovano rispettivamente nelle posizioni $\boldsymbol{r_{0A}}$ = 0 (cioè nell'origine del riferimento) e $\boldsymbol{r_{0B}} = (x_{0B}, y_{0B})$, con $x_{0B} = y_{0B}$ = 10 m. In questo istante, l'oggetto B si trova fermo ("parte da fermo") mentre l'oggetto A ha una velocità iniziale di modulo V (incognita) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'asse X. [Ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$].
   a) Quanto deve valere il modulo della velocità **iniziale** V di A affinché i due oggetti si incontrino?
   V = …………………………….. = ... m/s
   <u>ATTENZIONE</u>: IN QUESTA VERSIONE, ESSENDO LE ACCELERAZIONI DEI DUE OGGETTI UGUALI FRA LORO ED ESSENDO ASSEGNATO L'ANGOLO θ, IL PROBLEMA NON AMMETTE SOLUZIONE (risposta corretta: "Non ammette soluzione"!)

2. VERSIONE MODIFICATA IL 17/11/09 PER ULTERIORE ESERCIZIO: Due oggetti puntiformi (A e B) si muovono in un sistema di riferimento cartesiano bidimensionale XY sotto l'effetto di un'accelerazione costante e uniforme **diversa per i due oggetti:** $\boldsymbol{a_A}$ = (0, a), $\boldsymbol{a_B}$ = (0, $2a$),con a = -2.0 m/s^2. All'istante t_0 = 0 i due oggetti si trovano rispettivamente nelle posizioni $\boldsymbol{r_{0A}}$ = 0 (cioè nell'origine del riferimento) e $\boldsymbol{r_{0B}} = (x_{0B}, y_{0B})$, con $x_{0B} = y_{0B}$ = 10 m. In questo istante, l'oggetto B si trova fermo ("parte da fermo") mentre l'oggetto A ha una velocità iniziale di modulo V (incognita) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'asse X. [Ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$].
   a) Quanto deve valere il modulo della velocità **iniziale** V di A affinché i due oggetti si incontrino?
   V = …………………………….. ~ .... m/s $(ax_{0B}^2/(2cos^2\theta(x_{0B}tg\theta-y_{0B})))^{1/2} \sim 5.6$ m/s [le leggi orarie del moto per i due oggetti, scritte per componenti, recitano: $x_A(t) = Vcos\theta t$; $y_A(t) = Vsin\theta t + (a/2)t^2$; $x_B(t) = x_{oB}$; $y_B(t) = y_{0B} + at^2$. Occorre determinare l'istante t', se esiste, tale che i due oggetti occupano la stessa posizione. Lavorando sul moto lungo X si ottiene $t' = x_{0B}/(Vcos\theta)$. Sostituendo nelle leggi orarie del moto lungo Y si ottiene: $x_{0B}tg\theta + (a/2)x_{0B}^2/(V^2cos^2\theta) = y_{0B} + ax_{oB}^2/(V^2cos^2\theta)$. Questa è un'equazione algebrica del primo ordine per V^2 che, risolta, fornisce la risposta]
   b) Quanto vale la coordinata y' in cui avviene l'incontro tra i due oggetti, supponendo che la velocità iniziale V di A sia quella determinata al quesito precedente?
   y'= .... ~ ……… m $x_{0B}tg\theta + (a/2)x_{0B}^2/V^2cos^2\theta \sim 1.5$ m [si ottiene come passaggio intermedio della soluzione al quesito precedente]
   c) Quanto vale, **in modulo**, la velocità v_A' dell'oggetto A che si misura "un attimo prima" della collisione con B? [Supponete anche qui che la velocità iniziale di A sia la V determinata al quesito precedente]
   v_A'= .... ~ ……… m/s $(V^2cos^2\theta + (Vsin\theta+ax_{0B}/(Vcos\theta))^2)^{1/2} = (V^2 + a^2x_{0B}^2/(V^2cos^2\theta) + 2ax_{0B}tg\theta)^{1/2} \sim 5.0$ m/s [le componenti della velocità di A all'istante t' sono $v_{AX}' = Vcos\theta$ e $v_{AY}' = Vsin\theta + at' = Vsin\theta + ax_{0B}/(Vcos\theta)$. Poiché $v_A' = (v_{AX}'^2+v_{AY}'^2)^{1/2}$ si ottiene la soluzione, in cui si fa uso del valore di V determinato al quesito precedente]

3. Un oggetto puntiforme di massa m = 200 g può scivolare **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e indeformabile che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 20 cm e si trova, fissa, su un piano verticale, come rappresentato in figura. Questo oggetto reca una carica elettrica q = 5.0x10^{-10} C e si sa che, nella regione di spazio di interesse per il problema, insiste un campo elettrico **uniforme e costante** di modulo E_0 (incognito) diretto orizzontalmente nel verso di figura. La configurazione rappresentata, dove l'angolo vale $\theta = \pi/6$ (misurato rispetto all'orizzontale) è di **equilibrio**. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$]



   a) Quanto vale, nelle condizioni specificate, il modulo della forza di reazione vincolare N che la guida esercita sull'oggetto?
   N = …………………………….. =........... N $mgsin\theta+qE_0cos\theta = mg(sin\theta + cos\theta/tg\theta) = (mg/sin\theta)(sin^2\theta + cos^2\theta) = mg/sin\theta = 3.9$ N [all'equilibrio l'accelerazione dell'oggetto deve essere nulla, cioè tutte le forze che vi agiscono devono bilanciarsi tra loro. Tali forze sono la forza peso, $\boldsymbol{mg}$, la forza elettrica (elettrostatica) $\boldsymbol{qE_0}$, e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$. Scrivendo la condizione di equilibrio in direzione radiale, si ha (attenti alle proiezioni e ai segni!): $N = mgsin\theta + qE_0cos\theta$. Inoltre deve esserci equilibrio anche in direzione tangenziale, dove solo la forza peso e quella elettrica hanno componenti, per cui $mgcos\theta = qE_0sin\theta$. Da quest'ultima si ricava $qE_0 = mg/tg\theta$ che, inserito nella prima equazione, fornisce la soluzione]

b) Supponete ora che all'istante t_0=0 il campo elettrico esterno $\boldsymbol{E_0}$ venga improvvisamente spento. Quanto valgono, in modulo, le componenti tangenziale a_T e radiale a_R dell'accelerazione con cui l'oggetto **comincia** a muoversi? [Queste componenti vanno calcolate immediatamente dopo aver spento il campo elettrico, quando l'oggetto è praticamente **ancora fermo**!]

a_T = …………………………….. ~......... m/s^2 $g\cos\theta$ ~ 8.3 m/s^2 [l'oggetto è sottoposto alla componente tangenziale della forza peso, $mg\cos\theta$, da cui la soluzione]

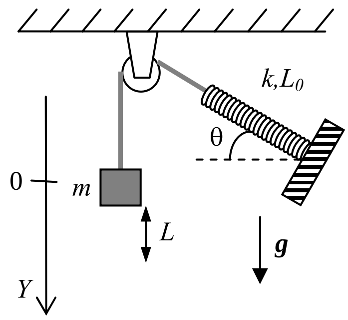
a_R = …………………………….. =......... m/s^2 0 [l'oggetto inizia a percorrere un tratto di orbita circolare. Dunque esso deve essere soggetto ad accelerazione centripeta $a_C = \omega^2 R$, in modulo. Poiché l'oggetto è ancora praticamente fermo nell'istante considerato, l'accelerazione centripeta, e quindi quella radiale, sono nulle. In sostanza, in queste condizioni la reazione vincolare bilancia completamente la componente radiale della forza peso]

c) Quanto valgono le componenti tangenziale e radiale, a_R' e a_T', misurate nell'istante in cui l'oggetto raggiunge la "fine" della guida, cioè il punto A di figura? [Attenzione: per rispondere compiutamente alla domanda sull'accelerazione radiale occorre conoscere la definizione di lavoro o il principio di bilancio energetico. Se non è tra gli argomenti del primo compitino, come probabilmente sarà per gli studenti di Ing. E-A, provate a dare una risposta, ma lasciate perdere, se non ci riuscite – a patto di capire perché non ci riuscite!]

a'_T = …………………………….. =......... m/s^2 0 [nell'istante considerato la direzione tangenziale coincide con l'orizzontale, e non c'è alcuna forza che abbia componenti orizzontali!]

a'_R = …………………………….. =......... m/s^2 $v'^2/R = 2g(1-\sin\theta) = g$ = 9.8 m/s^2 [nell'istante considerato l'accelerazione radiale deve essere pari all'accelerazione centripeta v'^2/R dovuta la fatto che l'oggetto si sta muovendo in un'orbita circolare con una certa velocità (tangenziale) v'. L'espressione di v' richiede di applicare i concetti di lavoro e energia cinetica. Infatti, non essendoci forze dissipative, si ha $L = \Delta E_K$, dove $\Delta E_K = (m/2)v'^2$ (l'oggetto è inizialmente fermo) mentre il lavoro è fatto solo dalla forza peso (la reazione vincolare è sempre ortogonale allo spostamento!) e vale $L = mg\Delta h$, essendo Δh la variazione di quota dalla posizoone di partenza a quella orizzontale. La trigonometria suggerisce $\Delta h = R - R\sin\theta$, da cui $v'^2 = 2gR(1-\sin\theta)$, che dà la soluzione. Notate che in questo istante, dovendo essere $a_R' = g$, la reazione vincolare esercitata dalla guida deve valere, in modulo, $N' = 2mg$, come si può facilmente verificare]

4. Una piccola cassa di massa m = 5.0 kg è vincolata a una fune inestensibile e di massa trascurabile. La fune, dopo essere passata per la gola di una puleggia **di massa trascurabile** che può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al suo asse ed è vincolata a un solaio rigido attraverso un opportuno giogo, è annodata all'estremo di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 20 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, il cui altro estremo è vincolato a una parete fissa e rigida. La configurazione geometrica del sistema è quella rappresentata in figura: asse della molla e fune (nel tratto di collegamento tra puleggia e molla) formano un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Inoltre la cassa, nel suo eventuale movimento, si trova a spostarsi lungo la direzione verticale. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\sin(\pi/6)$ = ½; trascurate ogni forma di attrito]



a) Quanto vale, in **condizioni di equilibrio**, l'allungamento Δ della molla **rispetto alla propria lunghezza di riposo**?

Δ = …………………………………… = ………. m mg/k = 2.45 m [in condizioni di equilibrio, la forza peso della cassa deve essere bilanciata dalla tensione della fune. La fune "trasferisce" in pratica la forza peso della cassa all'estremità libera della molla che, con la forza elastica prodotta, bilancia la tensione della fune, ovvero la forza peso. Pertanto, lavorando con i moduli, deve essere $k\Delta = mg$ da cui la soluzione. Notate che diversi dati del problema non vengono utilizzati per questa soluzione!]

b) Fate ora riferimento all'asse Y di figura, che supporrete centrato con la sua origine **in corrispondenza della posizione di equilibrio** della cassa (puntiforme!) e orientato verso il basso. Come si scrive l'equazione del moto della cassa, $a(y)$, rispetto a questo asse? [In questa risposta non dovete usare valori numerici, limitandovi a esprimere i dati noti del problema in forma "letterale"; fate del vostro meglio per scrivere una funzione della coordinata y che sia coerente con i dati del problema, in particolare con la scelta dell'origine del riferimento. Giustificate per benino, in brutta, tutte le ragioni che stanno dietro alla vostra risposta!]

$a(y)$ = …………………………………… $-(k/m)y$ [l'equazione del moto della cassa è dovuta alla forza peso mg e alla tensione della fune $-T$ (il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse e si intende che T rappresenta il modulo dela tensione). Dato che la puleggia è priva di massa, e dunque non partecipa alla dinamica del problema, tale tensione si ritrova, in modulo, anche all'estremità libera della molla, di cui provoca allungamento o compressione. Quindi, in modulo, $T = k\Delta$. Dato che la domanda richiede di esprimere l'equazione del moto in funzione della coordinata y, occorre legare Δ al valore di y. Essendo la fune inestensibile, a uno spostamento Δy generico rispetto alla posizione di equilibrio, cioè a una coordinata y generica (per come è stata scelta l'origine dell'asse è $\Delta y = y$), si ha una corrispondente variazione della lunghezza della molla, cioè $\Delta = y$ + costante. Il valore della costante deve essere tale da garantire che, per y = 0, si abbia equilibrio, cioè sia $a(y=0)$ = 0. Risulta di conseguenza costante = -g/k, da cui, ricordando il principio di Newton, la risposta]

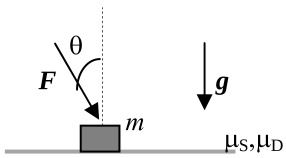
c) Immaginate ora che una forza esterna agisca sulla cassa spostandola verso il basso di una quantità L = 0.50 m rispetto alla posizione di equilibrio. All'istante t_0 = 0 la forza esterna viene rimossa improvvisamente e la cassa si trova libera di muoversi avendo velocità iniziale nulla. Quanto vale, in modulo, la tensione T_0 della fune misurata nell'istante **immediatamente successivo** al rilascio della cassa? [Notate che, all'istante considerato, la cassa si trova ancora, praticamente, nella posizione $y = L$!]

T_0 = …………………………………… = ……….. N $mg+kL$ = 59 N [sulla casssa agiscono la tensione della fune $-T_0$, diretta verso l'alto (da cui il segno negativo), e la forza peso mg , diretta verso il basso. All'istante considerato la cassa non si è ancora praticamente spostata dalla posizione $y = L$, per cui l'accelerazione vale $a(y=L) = -(k/m)L$, dove si è usata l'equazione del moto di cui sopra. Per il principio di Newton deve essere $ma = mg-T_0$, da cui la soluzione]

d) Dopo aver lasciato andare la cassa, si osserva che essa risale e, a un dato istante t', passa (per la prima volta) per la posizione di equilibrio determinata sopra. Quanto vale l'istante t'?

t' = …………………………………… = ……….. s $T/4 = \pi/(2\omega) = (\pi/2)(m/k)^{1/2}$ = 0.79 s [l'equazione del moto scritta sopra stabilisce che il movimento della cassa è armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. Poiché la cassa parte dalla posizione di massima distanza dall'equilibrio (cioè da un estremo dell'oscillazione), si può affermare immediatamente che essa passerà per la prima volta attraverso la posizione di equilibrio all'istante $t' = T/4$, con $T = 2\pi/\omega$ periodo dell'oscillazione]

5. Una piccola cassa di massa m = 5.0 kg si trova su una superficie **orizzontale** scabra, che presenta coefficiente di attrito statico μ_S = 0.40 e coefficiente di attrito dinamico μ_D = 0.20. Sulla cassa agisce una forza esterna di modulo F , orientata come in figura (l'angolo θ misurato rispetto alla verticale vale $\theta = \pi/6$). [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6)$ = ½]



a) Qual è il valore massimo che può assumere il modulo della forza F se si vuole che la cassa resti in equilibrio? [Vi si chiede il valore F_{MAX} tale che, se $F > F_{MAX}$, allora la cassa si mette in movimento]

F_{MAX} = …………………………………… ~ ………. N $\mu_S mg/(sin\theta-\mu_S cos\theta) \sim 1.3\times10^2$ N [all'equilibrio occorre che la componente orizzontale della forza $\mathbf{F}$, che in modulo è $Fsin\theta$, sia bilanciata dalla forza di attrito statico $F_{AS} \le \mu_S N$, con $N = mg+Fcos\theta$ (stiamo "schiacciando" la cassa sul piano orizzontale). Poiché viene richiesto il valore massimo della forza applicata, deve essere $F_{MAX} sin\theta = F_{AS,MAX}$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che il modulo della forza esterna diventi, a partire dall'istante t_0 = 0, $F = 2F_{MAX}$ (con F_{MAX} determinato nella risposta precedente). Si osserva che in queste condizioni la cassa si mette in movimento lungo la superficie scabra. Come si scrive l'equazione del moto a? [Non dovete usare valori numerici per questa risposta, ma dovete invece usare le espressioni "letterali" dei dati noti del problema]

a = …………………………………… $Fsin\theta - \mu_D(mg+Fcos\theta)$ [dato che la componente orizzontale della forza $\mathbf{F}$ non può più essere bilanciata dall'attrito statico, la cassa si mette effettivamente in movimento. Su di essa agisce la componente orizzontale della forza F , cioè $Fsin\theta$, e la forza di frenamento dovuta all'attrito **dinamico,** $F_{A,D} =- \mu_D N = -\mu_D(mg+Fcos\theta)$, dove il segno negativo indica che essa è orientata in verso opposto rispetto alla froza "motrice". Da qui, ricordando il principio di Newton, esce la soluzione]

c) Supponendo che il modulo della forza esterna resti sempre pari a $F=2F_{MAX}$, quanto vale la velocità v della cassa dopo che essa ha percorso un tratto D = 2.0 m sulla superficie scabra? E quanto vale la velocità **media** $<v>$ assunta dalla cassa nell'intervallo di tempo necessario a realizzare lo spostamento D?

v = …………………………………… ~ ……. m/s $((2D/m)(Fsin\theta - \mu_D(mg+Fcos\theta)))^{1/2} \sim 8.6$ s [ci sono due modi per dare la risposta: il primo si basa sulla soluzione dell'equazione del moto, $D = (a/2)t^2$ e $v = at' = (2Da)^{1/2}$, con a dato nella risposta al quesito precedente. Infatti si può facilmente notare che il moto è uniformemente accelerato (l'accelerazione è costante e uniforme). Il secondo modo sfrutta il teorema dell'energia cinetica, e stabilisce $\Delta E_K = (m/2)v^2 = L_{TOT}$, dove L_{TOT} è la somma algebrica dei lavori esercitati sulla cassa. Questi lavori sono dovuti alla forza F alla forza di attrito dinamico $F_{A,D}$. Tali forze sono costanti e uniformi: la direzione della forza $\mathbf{F}$ è sempre quella di figura, per cui $L_F = Fsin\theta D$; la forza $\mathbf{F_{A,D}}$ è sempre antiparallela (opposta e con la stessa direzione) rispetto allo spostamento, per cui $L_{A,D} = -F_{A,D}D$, con $F_{A,D} = \mu_D(mg+Fcos\theta)$, secondo quanto già stabilito. Entrambi gli approcci conducono alla stessa soluzione]

$<v>$ = …………………………………… ~ ……. m/s $v/2 \sim 4.3$ m/s [per definizione, la velocità media è il rapporto tra spostamento (pari a D, in questo caso) e tempo necessario a percorrerlo (pari a $t' = (2D/a)^{1/2}$ in un moto uniformemente accelerato – vedi anche la risposta al quesito precedente). Si ottiene quindi $<v> = D/(2D/a)^{1/2} = (aD/2)^{1/2}$ che, come si può facilmente verificare, è pari alla metà della velocità v misurata al tempo t' e data nella risposta precedente]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, ………………… Firma: MISTER X