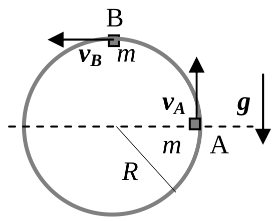
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme parte da fermo dall'origine di un piano cartesiano *XY* muovendosi di un moto bidimensionale composto da moto **uniforme** con velocità **costante** v_0 = 10 m/s lungo l'asse *X* e moto **uniformemente accelerato** con accelerazione **costante** *a* (incognita) lungo l'asse *Y*. Si sa che all'istante *t'* = 4.0 s la traiettoria dell'oggetto forma un angolo θ' = π/3 rispetto all'asse *X*.
   a) Quanto vale l'accelerazione *a*? [Può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$, e $cos(\pi/3) = ½$]
   a = …………………………………… ~ ………. m/s^2 $v_0 tg(\theta')/t' \sim$ 4.3 m/s^2 [deve essere $tg(\theta') = v_Y(t')/v_X(t') = at'/v_0$, da cui la soluzione]

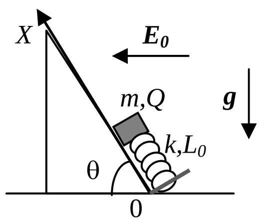
2. Un piccolo giocattolino di massa *m* = 20 g, da approssimare come puntiforme, compie **interamente** un "giro della morte", cioè striscia su un percorso circolare di raggio *R* = 50 cm disposto su un piano verticale, come schematizzato in figura. Il percorso è costituito da una guida fissa nello spazio fatta di un materiale rigido ed indeformabile; la superficie della guida su cui striscia il giocattolino è scabra, cioè presenta attrito con coefficiente statico μ_S = 0.20 e dinamico μ_D = 0.10. [Usate il valore *g* = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



   a) Sapendo che il giocattolino passa per la posizione A di figura ("a metà altezza" della traiettoria) con una velocità di modulo v_A = 3.1 m/s, come si esprime il modulo della reazione vincolare N_A esercitata dalla guida sul giocattolino in questa posizione?
   N_A = …………………………………… = …….. N mv_A^2/R = 0.38 N [affinché il giocattolino compia una traiettoria circolare occorre che su di esso agisca l'accelerazione centripeta di modulo v_A^2/R. Nella posizione A la forza peso non ha componenti radiali, e ugualmente la forza di attrito dinamico (quello statico non "conta" dato che il giocattolino si muove!) ha solo componenti tangenziali. Pertanto l'unica causa che può determinare accelerazione in direzione centripeta è la reazione vincolare della guida, che ha sicuramente direzione radiale. Da qui la soluzione]

   b) Quanto deve valere, al minimo e in modulo, la velocità v_B che il giocattolino possiede quando passa per la "sommità" del percorso (il punto B in figura)? [Spiegate bene in "brutta" la vostra risposta!]
   v_B = …………………………………… ~ .... m/s $(gR)^{1/2} \sim$ 2.2 m/s [anche in questa posizione l'attrito non può contribuire a generare l'accelerazione centripeta. Però in questa posizione la forza peso ha componenti radiali (ha solo queste componenti!). Quindi deve essere $mv_B^2/R=mg+N$. Poiché la reazione vincolare della guida sul giocattolino può, al minimo, valere zero, la velocità minima si ottiene ponendo $N=0$, da cui la soluzione]

3. Un oggetto di massa *m* può muoversi con **attrito trascurabile** su un piano inclinato che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). L'oggetto, che è dotato di una carica elettrica *Q*, è attaccato ad una molla con costante elastica *k* e lunghezza di riposo L_0 che ha il suo asse parallelo al piano inclinato ed un estremo attaccato ad un muretto che si trova alla base del piano stesso (vedi figura). Inizialmente sull'oggetto agisce un campo elettrico esterno **uniforme e costante** $\boldsymbol{E_0}$ diretto orizzontalmente come in figura. [In questo problema non si conoscono i valori numerici e le risposte vanno espresse in funzione dei dati letterali noti; usate un riferimento *X* che corre verso l'alto del piano inclinato ed ha origine alla sua base, come in figura]



   a) Come si esprime, rispetto al sistema di riferimento di figura, la posizione di equilibrio x_0 del sistema?
   x_0 = …………………………………… $L_0-(mg/k)sin\theta+(qE_0/k)cos\theta$ [sulla massa agiscono le seguenti forze con componenti lungo *X*, che rappresenta la direzione del moto possibile:: elettrica, $qE_0 cos\theta$; peso, $-mgsin\theta$; elastica, $-k(x-L_0)$. Alla posizione di equilibrio l'equazione del moto si scrive: $a = 0 = -(k/m)(x_0-L_0)-gsin\theta+(qE_0/m)cos\theta$, da cui la soluzione]

   b) Sapendo che all'istante t_0=0 il campo elettrico $\boldsymbol{E_0}$ viene improvvisamente spento, come si scrive la legge oraria del moto dell'oggetto *x(t)* per $t>t_0$=0? Come si esprime il periodo di oscillazione *T* dell'oggetto, ammesso che oscilli? [Usate correttamente le condizioni iniziali del problema sulla base della descrizione data nel testo]
   x(t) = …………………………………… $(qE_0 cos\theta/k)cos(\omega t)+L_0-mgsin\theta/k$, con $\omega=(k/m)^{1/2}$ [come discusso nella risposta al punto precedente e tenendo conto che in questo caso la forza elettrica si annulla, l'equazione del moto è $a=-(k/m)(x_0-L_0)-gsin\theta$. Questa equazione del moto ha posizione di equilibrio $x_{EQ} = L_0-(mg/k)sin\theta$ ed ammette soluzione armonica del tipo $x(t)=Acos(\omega t+\Phi)+x_{EQ}$, con $\omega=(k/m)^{1/2}$. Per determinare i valori specifici dei parametri *A* e Φ occorre prendere in considerazione le condizioni iniziali, che sono evidentemente $x(t=0)=x_0$ (determinato sopra!) e $v(t=0)=0$. Da quest'ultima si ottiene subito Φ = 0, dalla prima si ha quindi $A = x_0-x_{EQ} = (qE_0/k)cos\theta$, da cui la soluzione]
   T = …………………………………… $2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$ [vedi la soluzione al punto precedente e la relazione tra pulsazione e periodo]

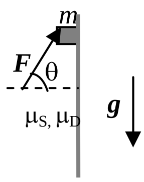
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………. **Matricola: ……………**

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

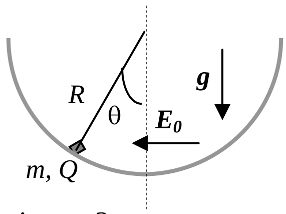
1. Un oggetto puntiforme si muove di moto **circolare uniformemente accelerato** su una circonferenza di raggio (costante) R = 50 cm centrata sull'origine di un riferimento cartesiano XY. All'istante t_0 = 0 l'oggetto si trova a passare per la posizione di coordinate cartesiane $x_0 = R$, y_0 = 0 con velocità di componenti cartesiane v_{0X} = 0 e $v_{0Y} = v_0$ = 2.0 m/s; si sa che il punto ripassa (per la "prima volta") per la posizione iniziale all'istante t' = 500 ms.
   a) Quanto vale il **modulo** dell'accelerazione ***a'*** dell'oggetto all'istante t'? [Ricordate che l'accelerazione è una grandezza vettoriale!]
   a' = …………………………………… ~ ………. m/s^2 $(\alpha^2R^2+\omega'^4R^2)^{1/2} = R(\alpha^2+\omega'^4)^{1/2} \sim 69$ m/s^2 [il moto è circolare uniformemente accelerato, per cui la legge oraria del moto (angolare) si scrive $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + (\alpha/2)t^2$ e quella della velocità (angolare) è $\omega(t)=\omega_0+\alpha t$, avendo in entrambi i casi posto t_0 = 0. Dalla descrizione del testo si trova $\omega_0=v_0/R$ (basta fare un disegnino!); inoltre deve essere $\theta(t')-\theta_0=2\pi=\omega_0t'+(\alpha/2)t'^2$ da cui $\alpha = 4\pi/t'^2-2\omega_0/t'$ e $\omega' = \omega_0+\alpha t'=4\pi/t'-\omega_0$ Una volta determinata l'accelerazione angolare α, si determina l'accelerazione tangenziale $a_t=\alpha R$. Inoltre l'oggetto risente dell'accelerazione centripeta che in modulo vale $a_C=\omega^2(t)R$. Le due accelerazioni sono ortogonali fra loro e quindi $a' = (a_t^2+a_C^2)^{1/2}$, da cui la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa m = 2.0 kg si trova a contatto con una parete verticale scabra, che presenta coefficiente di attrito statico μ_S = 0.80 e coefficiente di attrito dinamico μ_D = 0.50. Sulla cassa agisce una forza esterna ***F*** di modulo F = 40 N diretta come rappresentato in figura (l'angolo θ vale $\pi/3$). Si osserva che la condizione descritta è di equilibrio. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) Quanto vale, nelle condizioni sopra specificate (equilibrio), il modulo della forza di attrito F_A? [Verificate attentamente in "brutta" che la situazione descritta sia fisicamente possibile!]
   F_A = …………………………………… ~ ……….. N $F\,sin\theta-mg \sim 14$ N [se non ci fosse la forza di attrito la cassa si muoverebbe sotto l'effetto delle forze verticali. Scegliendo un riferimento orientato verso l'alto, le componenti verticali delle forze sono $Fsin\theta-mg$. Una verifica mostra che questa differenza ha segno positivo, per cui di fatto lo spostamento sarebbe verso l'alto, Poiché si osserva equilibrio, la forza di attrito (statico!) deve essere uguale e opposta a questa forza, da cui la risposta (che riguarda il modulo). Per accertare che questa situazione sia fisicamente possibile, occorre valutare il massimo della forza di attrito permessa, che è $F_{A,MAX} = \mu_S N$. La reazione vincolare vale in modulo $Fcos\theta$ e quindi $F_{A,MAX}$ = 16 N è sufficiente a garantire l'equilibrio e la situazione è possibile]
   b) Ad un dato istante, la forza ***F*** viene improvvisamente spenta. Come si scrive l'equazione del moto a della cassa in queste condizioni? [Fate riferimento ad un asse verticale diretto verso il basso e **non** usate valori numerici per questa risposta]
   a = …………………………………… g [se la forza ***F*** viene spenta la reazione vincolare si annulla, e quindi non c'è più alcuna forza di attrito (non c'è più contatto). Il corpo cade dunque liberamente con accelerazione di modulo pari a g]

3. Un oggetto di massa m può muoversi con attrito trascurabile su una guida fissa, rigida e indeformabile, che ha forma semicircolare di raggio R (vedi figura). L'oggetto è dotato di una carica elettrica Q ed inizialmente su di esso agisce un campo elettrico esterno **uniforme e costante *E₀*** diretto orizzontalmente come in figura. [In questo problema non si conoscono i valori numerici e le risposte vanno espresse in funzione dei dati letterali noti; usate un riferimento angolare θ come indicato in figura]



   a) Come si esprime, rispetto al sistema di riferimento di figura, la posizione di equilibrio θ_0 del sistema?
   θ_0 = …………………………………… $arctg(QE_0/(mg))$ [occorre equilibrare le forze in direzione tangenziale, che è l'unica possibile per il moto. In questa direzione, tenendo conto del riferimento di figura (l'angolo aumenta muovendosi in verso orario), le componenti tangenziali delle forze sono: forza peso, $-mgsin\theta$; forza elettrica, $QE_0cos\theta$. Uguagliando i moduli si ottiene la soluzione (notate che la soluzione vale a prescindere dal segno della carica Q)]

   b) Sapendo che all'istante t_0=0 il campo elettrico ***E₀*** viene improvvisamente spento, come si scrive l'equazione del moto angolare $\alpha(\theta)$ dell'oggetto, valida per $t > t_0 = 0$? [Dovete scrivere una funzione della variabile θ] Supponendo che i valori numerici del problema conducano ad un valore θ_0 (determinato sopra) molto piccolo, cioè tale che θ_0<<1, come si scrive la legge oraria del moto angolare $\theta(t)$? [Usate in moto opportuno le condizioni iniziali descritte nel testo]
   $\alpha(\theta)$ = …………………………………… $-(g/R)sin\theta$ [l'equazione per il moto tangenziale si scrive $a_t = -gsin\theta$. Essendo $\alpha = a_t/R$ si ottiene la soluzione]
   $\theta(t)$ = …………………………………… $\theta_0\,cos(\Omega t)$, con θ_0 determinato sopra e $\Omega = (g/R)^{1/2}$ [il testo suppone di trattare il caso delle piccole oscillazioni, dove $sin\theta \sim \theta$, per qui l'equazione del moto angolare si scrive $\alpha = d^2\theta/dt^2 = -(g/R)\theta$. Questa equazione ammette soluzioni armoniche con pulsazione $\Omega = (g/R)^{1/2}$ e posizione di equilibrio θ_{EQ} = 0. Quindi la soluzione generale è del tipo $\theta(t)=Acos(\Omega t+\Phi)$. I valori specifici di A e Φ si ottengono dalle condizioni iniziali, che sono evidentemente $\theta(t=0)=\theta_0$ e $d\theta/dt|_{t=0}=0$ (parte da fermo), da cui, con un po' di algebra, si ottiene la soluzione]

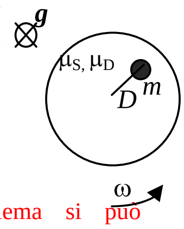
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme parte da fermo dall'origine di un piano cartesiano XY muovendosi di moto uniformemente accelerato lungo una direzione **rettilinea** che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'asse X. Si sa che all'istante t'= 10 s la coordinata Y del punto vale y' = 5.0 m.
   a) Quanto vale la **componente** X dell'accelerazione a_X? [Può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$, e $cos(\pi/3) = ½$]
   a_X = ………………………………… ~ ……… m/s² $2y'/(t'^2 tg(\theta)) \sim 5.9\times10^{-2}$ m/s² [deve essere $tg\theta = v'_Y/v'_X = a'_Y t'/a'_X t'$, da cui la soluzione tenendo conto che la legge oraria del moto lungo Y recita $y(t) = (a_Y/2)t^2$, per cui $a_Y = 2y'/t'^2$]

2. Una piccola moneta di massa m = 50 g si trova appoggiata su un disco orizzontale che può essere messo in rotazione attorno al proprio asse con una velocità angolare ω. Inizialmente il disco è fermo e la moneta si trova, ferma, a distanza D = 20 cm dal centro del disco; la superficie del disco è scabra e presenta coefficiente di attrito statico μ_S = 0.60 e dinamico μ_D = 0.50. Quindi il disco viene messo in rotazione fino a raggiungere la velocità angolare ω = 1.0 rad/s. [Usate g = 9.8 m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Quanto vale in queste condizioni il modulo della forza di attrito F_A che agisce sulla moneta?
   F_A = ………………………………… = ……….. N $m\omega^2 D = 1.0\times10^{-2}$ N [nelle condizioni del problema si può supporre che la moneta ruoti insieme al disco (cioè con la sua stessa velocità angolare) mantenendosi sempre a distanza D dal centro, cioè che la moneta non scivoli sul disco. Se così stanno le cose, allora sulla moneta agisce l'accelerazione centripeta che in modulo vale $a_C = \omega^2 D$. Questa accelerazione è fornita dalla forza di attrito statico (l'attrito dinamico non "conta" perché si suppone non ci sia scivolamento!), cioè deve essere $F_A = m\omega^2 D$, da cui la soluzione. Occorre comonque verificare se questa condizione può essere raggiunta, notando che il valore massimo della forza di attrito è, in modulo, $F_{A,MAX} = \mu_S mg$ (il disco è orizzontale). Con i valori del problema $F_{A,MAX}$ = 0.29 N, e si verifica quindi che di fatto l'attrito è sufficiente per mantenere la moneta in rotazione a distanza D dal centro del disco]
   b) La velocità angolare del disco viene poi ancora aumentata: quanto vale il suo valore massimo ω_{MAX} che garantisce che la moneta non scivoli sulla superficie del disco? [Si intende che, per $\omega > \omega_{MAX}$ la distanza della moneta dal centro del disco comincia a variare]
   ω_{MAX}= ………………………………… ~ …….. rad/s $(\mu_S g/D)^{1/2} \sim 5.4$ rad/s [al limite si deve verificare che $m\omega^2_{MAX} D = F_{A,MAX}$, da cui la soluzione]

3. Due cariche elettriche di ugual valore e segno Q sono fissate nelle posizioni $y_1 = d$ e $y_2 = -d$ dell'asse Y di un piano cartesiano orizzontale XY. [In questo problema i valori numerici dei dati non sono noti, e quindi dovete esprimere le soluzioni in funzione dei dati letterali noti. Indicate con il simbolo κ_E la costante del campo elettrico]
   a) Come si scrive l'espressione $E_X(x)$ della **componente** X del campo elettrico in funzione della posizione x (generica) sull'asse X del sistema di riferimento? [Dovete scrivere una funzione di x!]
   $E_X(x)$ = ………………………………… $-2\kappa_E^2 x/(x^2+d^2)^{3/2}$ [il campo elettrico complessivo è dato dalla sovrapposizione dei campi elettrici generati dalle due cariche puntiformi. Tenendo conto che le due cariche hanno ugual segno, è evidente che l'effetto complessivo nella componente X del campo si ottiene moltiplicando per due la componente X del campo generato da una sola delle due cariche (basta fare un disegnino per rendersene conto!). In modulo, il campo elettrico vale $\kappa_E Q/R^2 = \kappa_E Q/(x^2+d^2)$, avendo notato che la distanza tra un punto generico x dell'asse X e una delle cariche è, per il teorema di Pitagora, $R = (x^2+d^2)^{1/2}$. Per ottenere la componente X occorre proiettare il campo in direzione X , cioè moltiplicare l'espressione di cui sopra per il coseno dell'angolo compreso tra asse X e direzione della congiungente tra il punto x generico e la posizione occupata dalla carica. La trigonometria suggerisce che tale coseno è pari a $-x/R = -x/(x^2+d^2)^{1/2}$, da cui la soluzione]
   b) Supponete ora che lungo l'asse X del riferimento che state usando sia disposta un'asta rigida e liscia, e che un anellino di massa m e carica q (di segno opposto a Q) possa scorrere con attrito trascurabile su questa asta essendovi infilato. Quanto vale, in funzione della posizione generica x, il modulo della reazione vincolare $N(x)$ che l'asta esercita sull'anellino? [Si intende che questa reazione vincolare "forza" l'anellino a rimanere infilato nell'asta e che essa ha direzione Y!] Riuscite a dimostrare che tipo di moto può compiere l'anellino se viene spostato leggermente dalla sua posizione di equilibrio e quindi lasciato andare da fermo? Discutete! [Si intende che lo spostamento dall'equilibrio è piccolo, cioè $x < d$]
   $N(x)$ = ………………………………………… mg [la reazione vincolare in questione deve opporsi a tutte le forze che agiscono sull'anellino in direzione diversa da quella del moto, la direzione X. In particolare queste forze agiscono in direzione Z , e sono pari alla forza peso mg , e possono agire in direzione Y , essendo dovute alla componente Y della forza elettrica, e quindi del campo elettrico. Facendo un disegnino, però, si osserva che la forza elettrica complessiva non ha componenti lungo l'asse Y , dato che i contributi dei campi dovuti alle due cariche si annullano a vicenda. Resta dunque solo la forza peso, da cui la soluzione]
   Discussione: ………………………………… l'equazione del moto lungo l'asse X è $a = qE(x) = -q2\kappa_E Qx/(m(x^2+d^2)^{3/2}) = -(q2\kappa_E Q/(md^3))x(1/((x/d)^2+1)^{3/2})$, dove nell'ultimo passaggio si è semplicemente "messo in evidenza" d^3 nel denominatore e riscritta la relazione in una forma diversa. La posizione di equilibrio è evidentemente x_{EQ} = 0 e se si suppone di fare piccoli spostamenti rispetto a questa posizione, tali che $(x/d)^2 << 1$, allora l'ultimo termine fra parentesi nell'equazione del moto si può approssimare con 1. Allora, se la carica q ha lo stesso segno di Q, l'equazione del moto ammette una soluzione armonica, cioè (piccole) oscillazioni con pulsazione $\omega = ((q2k_E Q/(md^3))^{1/2}$

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

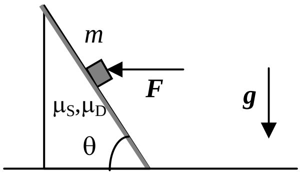
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove di moto **circolare uniformemente accelerato** su una circonferenza di raggio (costante) R = 50 cm centrata sull'origine di un riferimento cartesiano XY. All'istante t' = 500 ms l'oggetto si trova a passare per la posizione di coordinate cartesiane x' = 0, y' = R con velocità di componenti cartesiane v'_X = -2.0 m/s e v'_Y = 0; si sa che il punto ripassa (per la "prima volta") per la stessa posizione iniziale all'istante t'' = 1.0 s.

a) Quanto vale il **modulo** della velocità $\boldsymbol{v''}$ dell'oggetto all'istante t''? [Ricordate che la velocità è una grandezza vettoriale!]

v'' = …………………………………… = ……… m/s $\omega''R = 4\pi R/(t''-t')-v'_X$ = 46 m/s [la velocità è solo tangenziale (il moto è circolare!) e vale $\omega''R$, con $\omega'' = \omega'+\alpha(t''-t')$, e $\omega' = |v'_X|/R$ (il segno di valore assoluto tiene conto del fatto che il moto avviene con verso antiorario e il segno della componente cartesiana della velocità non ha significato pratico dovendo calcolare il modulo di $\boldsymbol{v''}$). Il valore dell'accelerazione angolare α si trova dalla legge del moto: $2\pi = \omega'(t''-t') + (\alpha/2)(t'-t')^{2}$, da cui $\alpha = 4\pi/(t''-t')^2-v_0/(R(t''-t'))$]

2. Una piccola cassa di massa m = 2.0 kg è appoggiata su un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). Sulla cassa agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}$ applicata in direzione orizzontale, come in figura, e di modulo F = 40 N. Il piano inclinato è scabro e presenta coefficienti di attrito **statico** μ_S = 0.50 e di attrito **dinamico** $\mu_D = \mu_S/2$. [Considerate la cassa come un oggetto puntiforme, usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $cos(\pi/3)$ = 1/2]



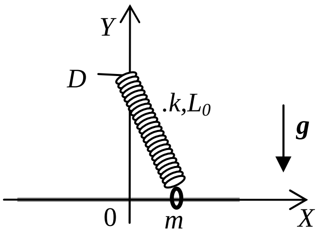
a) Sapendo che la situazione descritta è di equilibrio, quanto vale il modulo della forza di attrito F_A? [Verificate attentamente che la situazione sia fisicamente possibile!]

F_A = …………………………………… ~ .... N $-mgsin\theta + Fcos\,\theta$ ~ 3.4 N [in assenza di attrito la cassa si muoverebbe verso l'alto sotto l'effetto delle componenti delle forze in direzione parallela al piano inclinato, che sono (usando un asse orientato verso l'alto) $-mgsin\theta + Fcos\theta$. Una verifica numerica mostra che questa differenza dà un valore positivo, per cui effettivamente il moto avverrebbe verso l'alto del piano. La forza di attrito, evidentemente statico se non c'è movimento, deve opporsi a questa risultante di forze, da cui la soluzione. Per la verifica, occorre notare che al massimo la forza di attrito statico vale $F_{A,MAX}=\mu_S N$ con $N = mgcos\theta+Fsin\theta$. Mettendo i valori numerici si osserva che la forza di attrito può effettivamente garantire l'equilibrio osservato e forze che agiscono lungo la direzione del piano, usando un segno positivo per quelle orientate verso l'alto, sono $-mgcos\theta$, $Fcos\theta$, e la forza di attrito $F_A = -\mu N = -\mu(mgcos\theta+Fsin\theta)$. Finché c'è equilibrio la forza di attrito è statica, da cui la soluzione]

b) Supponendo che a un certo istante la forza $\boldsymbol{F}$ venga istantaneamente spenta, come si scrive l'equazione del moto a della cassa? [**Non** usate valori numerici per questa risposta e fate riferimento ad un asse che corre lungo il piano inclinato ed è orientato verso il basso]

a = …………………………………… $gsin\theta-\mu_D gcos\theta = g(sin\theta-\mu_D cos\theta)$ [prima di tutto occorre verificare che ci sia spostamento, cioè che la componente "attiva" della forza peso, $mgsin\theta$, sia maggiore del massimo valore della forza di attrito, $\mu_S mgcos\theta$, cosa che effettivamente si verifica. Allora il moto ha luogo sotto l'azione della componente "attiva" della forza peso, $mgsin\theta$, e della forza di attrito dinamico, $\mu_D mgcos\theta$, che compare con un segno negativo essendo opposta allo spostamento]

3. Un'asta rigida ed indeformabile è fissa lungo l'asse X (**orizzontale**) di un sistema di riferimento cartesiano. Su questa asta può scorrere un piccolo anellino (da considerare puntiforme) di massa m. All'anellino è agganciata una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. L'altro estremo della molla è vincolato nel punto di coordinate x = 0 e y = D (l'asse Y è verticale e punta verso l'alto, si veda la figura per uno schema della situazione considerata). Ogni possibile forma di attrito può essere considerata **trascurabile**. [In questo problema i valori numerici non sono noti e dovete esprimere i risultati in funzione dei dati letterali; indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si esprime la posizione di equilibrio x_{EQ} dell'anellino? Come si scrive la sua equazione del moto $a(x)$ in funzione della sua posizione (generica) x?

x_{EQ} = …………………………………… 0 [si ottiene ponendo $a(x_{EQ})$=0 nell'equazione del moto trovata qui sotto; la risposta è ovvia considerando la "simmetria" del problema]

$a(x)$ = …………………………………… $-(k/m)((x^2+D^2)^{1/2}-L_0)x/((x^2+D^2)^{1/2}) = -(k/m)x(1-L_0/(x^2+D^2)^{1/2})$ [il moto avviene sotto l'effetto della componente X della forza elastica della molla. In modulo, tale forza vale $k(L-L_0)$, con $L = (x^2+D^2)^{1/2}$ per il teorema di Pitagora. La componente X si ottiene moltiplicando per il coseno dell'angolo compreso tra asse X e asse della molla, la trigonometria suggerisce che tale coseno vale $-x/L$ per una posizione x generica. Si ottiene dunque la soluzione, dove si è fatto qualche aggiustamento di algebra e, si noti, i segni sono quelli "giusti" come si può facilmente intuire]

b) Come si scrive, in funzione della posizione x (generica) dell'anellino, la reazione vincolare $N(x)$ esercitata dall'asta sull'anellino? [Si intende che la reazione vincolare richiesta ha componenti verticali e serve per vincolare l'anellino a muoversi lungo l'asta] Riuscite a stabilire che tipo di moto può compiere l'anellino sotto specifiche e precise approssimazioni? Discutete!

$N(x)$ = ……………………………………………………. $-k((x^2+D^2)^{1/2}-L_0)D/((x^2+D^2)^{1/2})+mg = -kD(1-L_0/(x^2+D^2)^{1/2})+mg$ [la reazione vincolare è dovuta alla componete *Y* della forza elastica, che "tira" verso l'alto, e alla forza peso, sempre costante e diretta verso il basso. La componente *Y* della forza elastica si ottiene prendendo il modulo della forza elastica determinato nella risposta al quesito precedente e moltiplicando per il seno dell'angolo di cui sopra, che vale $D/(x^2+D^2)^{1/2}$. Da qui si ottiene, facendo riferimento all'asse *Y* di figura, la soluzione]

Discussione: …………………………………… l'equazione del moto scritta alla risposta del quesito precedente **non** è quella di un moto armonico. Tuttavia, nell'ipotesi che il moto avvenga sempre in prossimità della posizione di equilibrio ("piccole oscillazioni"), cioè che sia sempre $x/D << 1$ (e che $L_0<D$, altrimenti la componente della forza elastica lungo *X* può cambiare di segno), si riottiene un moto armonico con pulsazione $\omega = ((k/m)(1-L_0/D))^{1/2}$

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 1/12/2008 Firma:

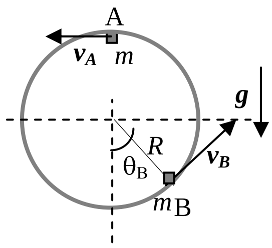
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

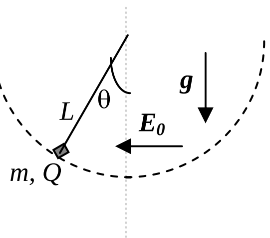
1. Un oggetto puntiforme parte da fermo dall'origine di un piano cartesiano XY con un moto bidimensionale composto da un moto **uniforme** con velocità **costante** v_0 = 8.5 m/s lungo l'asse X e con moto **uniformemente accelerato** con accelerazione **costante** a (incognita) lungo l'asse Y. Si sa che all'istante t' = 100 s la traiettoria dell'oggetto forma un angolo $\theta' = \pi/6$ rispetto all'asse X.
   a) Quanto vale il modulo della velocità **v'** all'istante t'? [Tenete conto che la velocità è una grandezza vettoriale! Per il calcolo può farvi comodo ricordare che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$, e $sin(\pi/6)$ = ½]
   v' = …………………………………… ~ ………. m/s $(v_0^2+(at')^2)^{1/2}=v_0(1+tg^2(\theta'))^{1/2} = v_0/cos\theta \sim$ 10 m/s [deve essere $tg(\theta') = v_Y(t')/v_X(t') = at'/v_0$, da cui si trova l'accelerazione a . D'altra parte la velocità è un vettore e quindi il suo modulo si trova sommando in quadratura le componenti, v_0 e at' , ed estraendo la radice quadrata]

2. Un piccolo giocattolino di massa m = 50 g, da approssimare come puntiforme, compie **interamente** un "giro della morte", cioè striscia su un percorso circolare di raggio R = 20 cm disposto su un piano verticale, come schematizzato in figura. Il percorso è costituito da una guida fissa nello spazio fatta di un materiale rigido ed indeformabile; la superficie della guida su cui striscia il giocattolino è scabra, cioè presenta attrito con coefficiente statico μ_S = 0.20 e dinamico μ_D = 0.10. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità] **



   a) Quanto deve valere, al minimo, la velocità angolare ω_A che il giocattolino possiede quando passa per la "sommità" del percorso (il punto A in figura)?
   ω_A = …………………………………. = ... rad/s $(g/R)^{1/2}$ = 7.0 rad/s [al punto più alto del percorso, nelle condizioni di velocità minima per compiere l'intero giro della morte l'accelerazione centripeta ω_A^2R deve essere fornita dalla forza peso mg (si assume nulla la reazione vincolare in queste condizioni), da cui la soluzione. Notate che la presenza dell'attrito, che produce forze di direzione tangenziale, non influenza la soluzione]
   b) Sapendo che il giocattolino passa per la posizione B di figura (l'angolo θ_B vale $\pi/4$) con una certa velocità v_B (nota, ma non se ne conosce il valore numerico), come si esprime il modulo della reazione vincolare N_B esercitata dalla guida sul giocattolino in questo posizione? [Per questa risposta **non** potete usare valori numerici; ricordate che $cos(\pi/4) = sin(\pi/4) = 1/2^{1/2}$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]
   N_B = ………………………………….. $m(v_B^2/R+gcos\theta_B)$ [in questa posizione sia la forza peso che la reazione vincolare possono contribuire a determinare l'accelerazione centripeta, mentre ancora una volta la forza di attrito (dinamico, visto che il giocattolino si muove!) non "conta" avendo solo componenti tangenziali. Deve quindi essere, tenendo conto delle debite proiezioni: $mv_B^2/R = N_B - mgcos\theta_B$, da cui la soluzione]

3. Un pendolo è costituito da una fune inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L che reca alla sua estremità un piccolo oggetto di massa m dotato di una carica elettrica Q (positiva). Un capo della fune è attaccato ad un perno rigidamente fissato su una parete verticale e dunque il moto dell'oggetto può avvenire su un piano verticale. Inizialmente, nella regione di interesse è presente un campo elettrico esterno **uniforme e costante** $\boldsymbol{E_0}$ diretto orizzontalmente come in figura. Ogni forma di attrito è trascurabile. [In questo problema non si conoscono i valori numerici e le risposte vanno espresse in funzione dei dati letterali noti; usate un riferimento angolare θ come indicato in figura; esprimete con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Come si esprime, rispetto al sistema di riferimento di figura, la posizione di equilibrio θ_0 del sistema?
   θ_0 = …………………………………… $arctg(QE_0/(mg))$ [deve esserci equilibrio in direzione tangenziale, per cui $QE_0 = mgsin\theta$, da cui la soluzione]
   b) Sapendo che il valore di θ_0 di cui alla domanda precedente risulta "piccolo" (cioè i valori numerici in gioco sono tali che $\theta_0 << 1$) e supponendo che all'istante t_0=0 il campo elettrico $\boldsymbol{E_0}$ venga improvvisamente spento, come si scrive la legge oraria del moto angolare $\theta(t)$ dell'oggetto, valida per $t > t_0 = 0$? Come si scrive il valore $T(\theta=0)$ della tensione della fune quando l'oggetto passa per la posizione θ = 0? [Usate in modo opportuno le condizioni iniziali del problema!]
   $\theta(t)$ = …………………………………… $\theta_0\ cos(\Omega t)$, con θ_0 determinato al punto precedente e $\Omega = (g/L)^{1/2}$ [l'equazione del moto angolare recita $\alpha = d^2\theta/dt^2 = -(g/L)\theta$, avendo sfruttato la presenza delle piccole oscillazioni, per cui $sin\theta \sim \theta$. Il moto è armonico attorno alla posizione di equilibrio θ_{EQ} = 0, con pulsazione $\Omega=(g/L)^{1/2}$ e legge oraria $\theta(t) = Acos(\Omega t+\Phi)$. I valori di A e Φ si ottengono dalle condizioni iniziali che sono, evidentemente, $\theta(t=0)=\theta_0$ (determinato sopra) e $d\theta/dt|_{t=0}$ = 0 (la massa parte da ferma). Si ottiene Φ = 0 e $A=\theta_0$]
   $T(\theta=0)$ = ………………………………………… $m(g+\omega'^2L) = m(g+\theta_0^2\Omega^2L)$, con θ_0 determinato al punto precedente e $\Omega = (g/L)^{1/2}$ [la massa passa per la posizione θ = 0 all'istante $t' = T/4 = \pi/(2\Omega)$. A questo istante la sua velocità angolare ω'=

$d\theta/dt|_{t=t'}$ vale $\omega' = -\theta_0\Omega$, come si ottiene facilmente ricordando la legge oraria della velocità nel moto armonico. Dunque la massa deve subire un'accelerazione centripeta di modulo $\omega'^2 L$ che deve essere fornita dalle due forze che hanno, in quel punto, direzione radiale, cioè la tensione della fune (verso il centro) e la forza peso (si allontana dal centro). Si ottiene quindi la soluzione, con una procedura simile a quella adottata per l'esercizio precedente]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 1/12/2008 Firma:

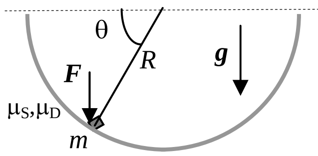
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove su una circonferenza di raggio R = 50 cm con accelerazione angolare **costante ed uniforme** α (incognita). All'istante t_0 = 0 l'oggetto **parte da fermo** dalla posizione angolare (misurata rispetto ad un riferimento polare) $\theta_0 = \pi/3$; si sa che esso ripassa (la "prima volta") per questa stessa posizione angolare all'istante t' = 10 s.
   a) Quanto vale il **modulo** della velocità ***v'*** che l'oggetto possiede all'istante t'? [Ricordate che la velocità è una grandezza vettoriale!]
   v' = …………………………….. = ... m/s $4\pi R/t'$ = 0.62 m/s [la velocità è solo tangenziale, non essendoci moto in direzione radiale. Dunque $v' = \omega' R = \alpha t' R$. Il valore dell'accelerazione angolare si ricava dalla legge oraria del moto angolare, che recita $2\pi = (\alpha/2)t'^2$]

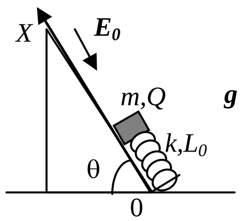
2. Un oggetto puntiforme di massa m = 200 g può muoversi su una guida semicircolare di raggio R = 10 cm (fissa, rigida ed indeformabile) disposta su un piano verticale come in figura. All'oggetto è applicata una forza ***F*** diretta verticalmente e di modulo F = 0.20 N; la superficie della guida è scabra e presenta coefficienti di attrito statico μ_S = 0.80 e attrito dinamico μ_D = 0.50. La massa si trova in una posizione tale che il raggio diretto verso di essa forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) Sapendo che, nella situazione appena descritta, l'oggetto si trova fermo in equilibrio, quanto vale in modulo la forza di attrito F_A? [Verificate con attenzione che la situazione descritta sia fisicamente possibile!]
   F_A = …………………………….. = ... N $mgcos\theta + Fcos\theta$ = 1.1 N [l'equilibrio in direzione tangenziale, quella del possibile moto dell'oggetto, impone che le componenti tangenziali delle forze siano bilanciate. Le forze che hanno componente tangenziale sono il peso, $mgcos\theta$, e la forza ***F*** , $Fcos\theta$, che agiscono entrambi con lo stesso segno. Da qui la risposta. Occorre poi verificare che la situazione sia fisicamente possibile, cioè che il valore massimo dell'attrito statico, $F_{A,MAX} = \mu_S N = \mu_S(mgsin\theta+Fsin\theta)$, sia effettivamente maggiore del valore richiesto per l'equilibrio. Questo si verifica effettivamente, e quindi la situazione è possibile]

   b) Supponendo ora che ad un dato istante la forza ***F*** venga improvvisamente spenta, quanto vale l'accelerazione **angolare** α **immediatamente dopo** lo spegnimento della forza?
   α = …………………………….. = ... rad/s^2 0 [occorre innanzitutto stabilire se c'è movimento. Dato che la forza di attrito statico massima, $F_{A,MAX}=\mu_S mgsin\theta$, continua ad essere maggiore della forza che agisce in direzione tangenziale, che vale in modulo $mgcos\theta$. la situazione continua ad essere di equilibrio e quindi $\alpha = a_t = 0$]

3. Un oggetto di massa m può muoversi con attrito trascurabile su un piano inclinato che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale (il piano è rigido, indeformabile e fisso nello spazio). L'oggetto, che è dotato di una carica elettrica Q, è attaccato ad una molla con costante elastica k e lunghezza di riposo L_0 che ha il suo asse parallelo al piano inclinato ed un estremo attaccato ad un muretto che si trova alla base del piano stesso (vedi figura). Inizialmente sull'oggetto agisce un campo elettrico esterno **uniforme e costante** $\boldsymbol{E_0}$ diretto in direzione parallela al piano inclinato e orientato come in figura. [In questo problema non si conoscono i valori numerici e le risposte vanno espresse in funzione dei dati letterali noti; usate un riferimento X che corre verso l'alto del piano inclinato ed ha origine alla sua base, come in figura]



   a) Come si esprime, rispetto al sistema di riferimento di figura, la posizione di equilibrio x_0 del sistema? Come si esprime, all'equilibrio, il modulo della reazione vincolare ***N*** che il piano inclinato esercita sull'oggetto?
   x_0 = …………………………………… L_0-$mgsin\theta/k$-QE_0/k [le forze che agiscono lungo la direzione del piano, usando un segno positivo per quelle orientate verso l'alto, sono $-mgsin\theta$, $-QE_0$, e la forza elastica $-k(x-L_0)$. All'equilibrio le forze devono bilanciarsi, da cui la soluzione]
   N = …………………………………… $mgcos\theta$ [le forze elastica ed elettrica non hanno componenti nella direzione di ***N*** (quella ortogonale al piano inclinato), e quindi l'unica forza che la reazione vincolare deve equilibrare è la componente della forza peso, da cui la soluzione]

   b) Sapendo che all'istante t_0=0 il campo elettrico $\boldsymbol{E_0}$ viene improvvisamente spento, come si scrive la legge oraria del moto dell'oggetto $x(t)$? [Usate correttamente le condizioni iniziali del problema sulla base della descrizione data] Come si scrive l'istante t' in cui l'oggetto ripassa per la posizione x_0 per la "prima volta", ammesso che ci ripassi?

F

$x(t)$ = ... $(QE_0/k)\cos(\omega t) + L_0 - mg\sin\theta/k$ [l'equazione del moto, scritta rispetto al riferimento di figura, recita $a = -(k/m)(x-L_0)-g\sin\theta$. Questa equazione ammette soluzione armonica con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$ e posizione di equilibrio $x_{EQ}=L_0-mg\sin\theta/k$. La soluzione generale è quindi $x(t)=A\cos(\omega t+\Phi)+x_{EQ}$. I parametri A e Φ si ottengono dalle condizioni iniziali, che evidentemente sono $x(t=0)=x_0$ (determinato sopra) e $v(t=0)=0$. Si ottiene facilmente $\Phi = 0$ e $A = x_0-x_{EQ}=QE_0/k$, da cui la soluzione]

t' = ... $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$ [l'oggetto ritorna alla posizione di equilibrio dopo un periodo T]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 1/12/2008 Firma:

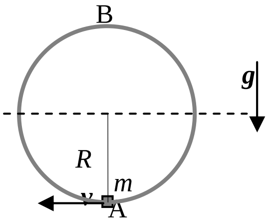
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme, che si muove lungo l'asse X di un sistema di riferimento, passa all'istante t_0=0 per la posizione x_0 = 10 m avendo una velocità di modulo v_0 = 5.0 m/s diretta nel **verso negativo** dell'asse X. A partire da questo stesso istante viene "accesa" un'accelerazione **uniforme e costante** a (di valore incognito) diretta nel vero positivo dell'asse X. Si osserva che l'oggetto ripassa per la posizione iniziale x_0 all'istante t' = 500 ms.
   a) Quanto vale l'accelerazione a?
   a = …………………………………… = ……… m/s^2 $2v_0/t'$ = 20 m/s^2 [a parte la differenza di direzioni coinvolte, questo moto è identico a quello di un oggetto lanciato verso l'alto in presenza dell'accelerazione di gravità. Il tempo necessario a ripassare per la posizione di partenza è il doppio di quello necessario a fermarsi. Dunque deve essere, dalla legge oraria della velocità nel moto uniformemente accelerato, 0 = $v_0+at'/2$, da cui la soluzione (attenti ai segni!)]

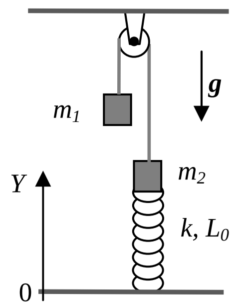
2. Un sasso di massa m = 250 g, da approssimare come puntiforme, è fissato all'estremità di una fune inestensibile di lunghezza R = 20 cm e massa trascurabile, la cui altra estremità è vincolata ad un perno fissato rigidamente su una parete verticale. Il sasso può quindi compiere delle orbite circolari su un piano verticale, come descritto in figura. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



   a) Sapendo che il sasso passa per la posizione A di figura (la più in basso della traiettoria) con una velocità angolare ω_A = 2.0 rad/s, quanto vale la tensione T_A della fune quando il sasso passa per questa posizione?
   T_A = …………………………………… = ... N $m(g+\omega_A^2R)$ = 1.2x10^2 N   [in questa posizione l'accelerazione centripeta, che ha modulo ω_A^2R , è fornita da tensione della fune e da forza peso, che hanno segni opposti. Dunque deve essere $m\omega_A^2R=T-mg$, da cui la soluzione]

   b) Quanto deve valere, al minimo, la velocità angolare ω_B nella posizione B di figura (la più in alto della traiettoria) affinché la fune resti tesa durante l'intera traiettoria compiuta dal sasso?
   ω_B = …………………………………… = …….. rad/s $(g/R)^{1/2}$ = 7.0 rad/s   [nel punto B forza peso e tensione hanno lo stesso verso. Al minimo, si può porre circa uguale a zero la tensione, per cui si ottiene la soluzione]

3. Due blocchi di massa m_1 e m_2 sono uniti tra loro da una fune inestensibile e di massa trascurabile che scorre sulla gola di una puleggia priva di massa secondo lo schema indicato in figura. I due blocchi possono dunque muoversi con attrito trascurabile in direzione verticale. Il blocco di massa m_2 è agganciato all'estremo di una molla di massa trascurabile, che ha costante elastica k e lunghezza di riposo L_0; la molla ha il suo asse in direzione verticale e l'altro suo estremo è vincolato ad un pavimento rigido ed indeformabile. Un asse Y verticale e diretto verso l'alto, ha la sua origine nel pavimento. [In questo problema non ci sono valori numerici: dovete rispondere usando i dati letterali noti. Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Come si scrive la lunghezza L' della molla **all'equilibrio**? Quanto vale, **all'equilibrio**, il modulo della tensione T' della fune?
   L' = ……………………………………$L_0+((m_1-m_2)/k)g$ [le equazioni del moto dei due blocchi si scrivono, rispetto al riferimento dato: $a_1=-m_1g+T$; $a_2 = -m_2g+T-k(y-L_0)$, con $a_1=-a_1$. Il sistema di tre equazioni e tre incognite può essere risolto per a_2 , ottenendo $a_2 = g(m_1-m_2)/(m_1+m_2)-(k/(m_1+m_2))(y-L_0)$. Ponendo $a_2 = 0$ (per l'equilibrio), si ottiene $L'=y_{EQ}$ come nella soluzione]
   T' = ……………………………………m_1g [il sistema di cui sopra può essere anche risolto rispetto a T ottenendo la soluzione. Notate che, se si considera la sola massa m_1 , la condizione di equilibrio implica direttamente $T = m_1g$, che è un modo alternativo per rispondere direttamente]

   b) Supponete ora che, per qualche magia, all'istante t_0=0 la massa m_1 dimezzi il suo valore, cioè diventi $m'_1 = m_1/2$. Come si scrive, in questa nuova situazione, l'equazione del moto $a_2(y)$ del blocco di massa m_2 in funzione della posizione y (generica) del blocco stesso? Come si esprime il periodo τ dell'oscillazione, sempre che il sistema oscilli? [Usate in modo opportuno le condizioni iniziali del problema e fate riferimento all'asse Y di figura]
   $a_2(y)$ = …………………………………… $(m_1'-m_2)g/(m_1'+m_2)-(k/(m_1'+m_2))(y-L_0$ [si può scrivere un sistema di tre equazioni e tre incognite come fatto sopra, solo sostituendo m_1 con m'_1. Risolvendo per a_2 si ottiene la soluzione]
   τ = …………………………………… $F_{A,D}/m = -\mu_D N/m = -\mu_D(v'^2/R-g) = -3\mu_D g = -$ 2.9 N [il moto è effettivamente armonico, come si vede ispezionando l'equazione del moto. Il periodo vale $2\pi/\omega$, con $\omega = (k/(m_1'+m_2))^{1/2}$]

H

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

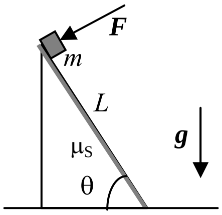
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R = 0.50 m essendo dotato di moto circolare **uniformemente accelerato**. All'istante t_0 = 0 esso passa per la posizione θ = 0 di un riferimento polare con origine nel centro della circonferenza avendo una velocità tangenziale di modulo v_0 = 5.0 cm/s. Si osserva poi che esso si arresta quando raggiunge la posizione angolare $\theta' = \pi$; si sa che il rallentamento avviene con un'accelerazione angolare **uniforme e costante** α (incognita ed evidentemente negativa).

a) Quanto vale, **il modulo** dell'accelerazione $\boldsymbol{a_0}$ dell'oggetto all'istante t_0 = 0? [Ricordate che l'accelerazione è un vettore]

a_0 = …………………………………… = ... m/s^2 $((\alpha R)^2+(\omega_0^2R)^2)^{1/2}= (v_0^2/R)(1/(4\pi)^2+1)^{1/2}$ = 5.0x10^{-3} m/s^2 [l'accelerazione è un vettore le cui componenti, ortogonali tra loro e quindi da sommare in quadratura per ottenere il modulo quadro, sono l'accelerazione tangenziale αR e l'accelerazione centripeta di modulo ω_0^2R (calcolata all'istante t_0, come richiesto dal problema). Per ottenere α basta servirsi dell'equazione del moto circolare uniformemente accelerato, che recita $\pi = \omega_0 t'+(\alpha/2)t'^2$. Inoltre, dato che all'istante t' l'oggetto si ferma, deve anche essere $0=\omega_0+\alpha t'$, da cui $t'= -\omega_0/\alpha$. Quindi $\alpha = -\omega_0^2/(2\pi)$, da cui la soluzione]

2. Una piccola cassa di massa m = 2.0 kg (da considerare come oggetto puntiforme!) si trova sulla sommità di un piano inclinato (fisso, rigido ed indeformabile) di lunghezza L = 4.9 m, che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è scabro e tra piano e cassa c'è attrito statico con coefficiente μ_S = 0.50 e attrito dinamico con coefficiente μ_D = 0.40. Sulla cassa agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}$ diretta ortogonalmente al piano inclinato nel verso di "schiacciare" la cassa sul piano (vedi figura) e avente modulo F = 40 N. In queste condizioni si osserva che la cassa è in equilibrio. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



a) Quanto vale, nelle condizioni sopra specificate, il modulo della forza di attrito F_A?

F_A = …………………………………… = ……….. N $mgsin\theta$ = 17 N [all'equilibrio la componente "attiva" della forza peso, $mgsin\theta$, deve essere "bilanciata" dalla sola forza di attrito, che è l'unica forza in gioco avente la direzione del piano inclinato, da cui la soluzione. Osservate che, essendo noto il coefficiente di attrito statico, è opportuno valutare se esso può effettivamente dare luogo alla situazione descritta. Occorre ricordare che $F_A \leq \mu_S N$, con $N = mgcos\theta+F$. Usando i valori numerici riportati nel testo, si osserva che la disuguaglianza è rispettata, e quindi la situazione è fisicamente possibile]

b) Supponete ora che, all'istante t_0=0, il coefficiente di attrito statico si annulli improvvisamente (ad esempio, supponete che uno strato di olio venga improvvisamente spruzzato tra cassa e piano inclinato): a questo istante, la cassa si mette in movimento partendo da ferma. Qual è l'istante t' in cui essa raggiunge la base del piano inclinato, se la raggiunge? [Notate che la forza esterna $\boldsymbol{F}$ è sempre presente, uniforme e costante e diretta sempre ortogonalmente al piano inclinato; dovete tenere presente che, a differenza dell'attrito statico, l'attrito dinamico è ancora presente]

t' = …………………………………… ~ ……….. s $(2L/a)^{1/2} = (2L/(gsin\theta-\mu_D(gcos\theta+F/m)))^{1/2}$ = non risolubile! [prendendo un asse parallelo al piano inclinato orientato verso il basso, si ha che l'equazione del moto si scrive $a = gsin\theta - F_{A,D}/m = gsin\theta-\mu_D(gcos\theta+F/m)$. L'accelerazione è dunque uniforme e costante e la soluzione si ottiene risolvendo la legge oraria del moto, $L = (a/2)t'^2$. Occorre però notare che l'accelerazione risulta negativa, cioè il moto di fatto non avviene!]

3. Due cariche elettriche di valore opposto q_1=Q e q_2=-Q, sono fissate nelle posizioni rispettive $y_1 = d$ e $y_2 = -d$ dell'asse Y di un piano cartesiano orizzontale XY. [In questo problema i valori numerici dei dati non sono noti, e quindi dovete esprimere le soluzioni in funzione dei dati letterali noti. Indicate con il simbolo κ_E la costante del campo elettrico]

a) Come si scrive l'espressione $E_X(x)$ della **componente** X del campo elettrico generato dalle cariche in funzione della posizione x (generica) sull'asse X del sistema di riferimento? Come si scrive l'espressione $E_Y(x)$ della **componente** Y del campo elettrico generato dalle cariche in funzione della posizione x (generica) sull'asse X del sistema di riferimento? [Dovete scrivere una funzione di x e una funzione di y, rispettivamente!]

$E_X(x)$ = …………………………………… 0 [il campo elettrico complessivo è dato dalla sovrapposizione dei campi elettrici generati dalle due cariche. Il modulo dei due campi elettrici avrà lo stesso valore in tutti i punti dell'asse X, dato che ogni punto dell'asse X sta alla stessa distanza $R = (x^2+d^2)^{1/2}$ (per Pitagora) dalle due cariche e che tale modulo si esprime come $\kappa_E Q/R^2$. La componente X si ottiene moltiplicando il modulo per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse X e la congiungente fra la posizione generica $x$dell'asse X e la carica che genera il campo. Si vede però che, essendo le due cariche di segno opposto, i contributi lungo l'asse X si annullano per tutti i punti dell'asse X]

$E_Y(x)$ = …………………………………… $-2\kappa_E Q^2 d/(x^2+d^2)^{3/2}$ [stavolta occorre moltiplicare il modulo dei campi per il seno dell'angolo, e si osserva che la componente del campo complessivo di ottiene moltiplicando per due la componente del campo generato da una carica. Tenendo anche conto del fatto che il seno dell'angolo si può esprimere, per la trigonometria, come $-d/R$, si ottiene la soluzione]

b) Supponete ora che lungo l'asse X del riferimento che state usando sia disposta un'asta rigida e liscia, e che un anellino di massa m e carica q possa scorrere con attrito trascurabile su questa asta essendovi infilato. Quanto vale, in funzione della posizione generica x, il modulo della reazione vincolare $N(x)$ che l'asta esercita sull'anellino?

$N(x)$ = ……………………………………………………$((q2\kappa_E Q^2 d/(x^2+d^2)^{3/2})^2+(mg)^2)^{1/2}$ [la reazione vincolare deve bilanciare tutte le forze che provocherebbero un movimento in direzione diversa da quella dell'asta. Queste forze sono la forza elettrica $qE_Y(x)$, che agisce lungo la direzione Y e la forza peso, che agisce in direzione Z. Essendo le due forze ortogonali, il modulo della reazione vincolare si ottiene facendo la somma dei quadrati ed estraendo la radice quadrata]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 1/12/2008 Firma:

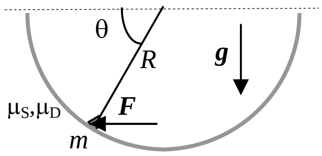
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 1/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… **Matricola: ……………**

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme passa all'istante t_0=0 per l'origine di un piano cartesiano *XY* avendo una velocità v_0 = -3.0 m/s lungo l'asse *X*. Si sa che solamente nell'intervallo temporale t_0, *t'* , con *t'*= 1.0 s, sull'oggetto agisce un'accelerazione **costante ed uniforme** *a* (incognita) diretta lungo l'asse *Y* e che all'istante *t'* la coordinata *Y* dell'oggetto è *y'* = -8.0 m.
   a) Quanto vale il **modulo** della velocità ***v''*** che l'oggetto possiede all'istante *t''* = 2*t'* = 2.0 s? [Tenete conto che l'accelerazione è nulla fuori dall'intervallo temporale sopra specificato e che la velocità è una grandezza vettoriale!]
   v'' = …………………………………… ~ ………. m/s $(v_0^2+(at')^2)^{1/2}=(v_0^2+(2y'/t')^2)^{1/2}$ ~ 16 m/s [la velocità cambia solo nell'intervallo temporale in cui agisce l'accelerazione, per cui $v''=v'$. Il valore di $v'=(v'_X{}^2+v'_Y{}^2)^{1/2}$ si ottiene notando che $v'_X=v_{0X}=v_0$ mentre $v'_Y = at'$. Il valore dell'accelerazione *a* si ottiene dalla legge oraria del moto lungo *Y* , che recita $y'=(a/2)t'^2$,da cui $a = 2y'/t'^2$]

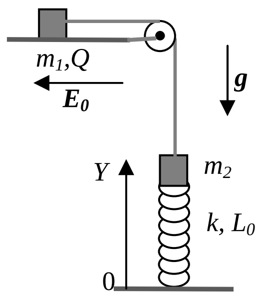
2. Un oggetto puntiforme di massa *m* = 500 g può muoversi su una guida semicircolare di raggio *R* = 10 cm (fissa, rigida ed indeformabile) disposta su un piano verticale come in figura. All'oggetto è applicata una forza ***F*** diretta orizzontalmente e di modulo *F* = 1.0 N; la superficie della guida è scabra e presenta coefficienti di attrito statico μ_S = 0.80 e attrito dinamico μ_D = 0.50. La massa si trova in una posizione tale che il raggio diretto verso di essa forma un angolo θ = π/3 rispetto all'orizzontale. [Usate *g* = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che *sin*(π/3) = $3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e *cos*(π/3) = 1/2]



   a) Sapendo che, nella situazione appena descritta, l'oggetto si trova fermo in equilibrio, quanto vale in modulo la forza di attrito F_A? [Verificate con attenzione che la situazione descritta sia fisicamente possibile!]
   F_A = …………………………….. = ... N *mgcos*θ - *Fsin*θ = 1.6 N [se non ci fosse attrito, l'oggetto si muoverebbe per effetto delle componenti tangenziali delle forze peso, *mgcos*θ ,e ***F*** , -*Fsin*θ (i segni sono in accordo con il riferimento angolare di figura). Dunque all'equilibrio la forza di attrito statico deve bilanciare queste due forze, da cui il risultato. Affinché questa situazione sia fisicamente possibile, occorre che il valore massimo della forza di attrito statico, $F_{A,MAX} = \mu_S N = \mu_S(mg\sin\theta+F\cos\theta)$, sia maggiore del valore richiesto per l'equilibrio. Con i dati del problema, questa condizione è ben verificata]

   b) Supponendo ora che ad un dato istante e per effetto di qualche magia i coefficienti di attrito si annullino entrambi, quanto vale il modulo dell'accelerazione ***a*** **immediatamente dopo** l'annullamento dell'attrito? [Ricordate che l'accelerazione è un vettore!]
   a = …………………………….. ~ .... m/s^2 *gcos*θ-*(F/m)sin*θ ~ 3.2 m/s^2 [l'unica forza che ha componenti in direzione tangenziale è la forza peso, da cui la soluzione. Notate che l'eventuale accelerazione radiale di origine centripeta è nulla, essendo praticamente nulla la velocità raggiunta dall'oggetto subito dopo la sua partenza]

3. Due blocchi di massa m_1 e m_2 sono uniti tra loro da una fune inestensibile e di massa trascurabile che scorre sulla gola di una puleggia priva di massa secondo lo schema indicato in figura. Il blocco di massa m_1 si muove con attrito trascurabile su un piano orizzontale, mentre il blocco di massa m_2 si muove in direzione verticale. Il blocco di massa m_1 è dotato di una carica elettrica *Q* (di segno positivo); il blocco di massa m_2 è agganciato all'estremo di una molla di massa trascurabile, che ha costante elastica *k* e lunghezza di riposo L_0. La molla ha il suo asse in direzione verticale e l'altro suo estremo è vincolato ad un pavimento rigido ed indeformabile; un asse *Y* verticale e diretto verso l'alto ha la sua origine nel pavimento. Inizialmente è presente un campo elettrico **uniforme e costante** $\boldsymbol{E_0}$ diretto orizzontalmente nel verso indicato in figura. [In questo problema non ci sono valori numerici: dovete rispondere usando i dati letterali noti. Indicate con *g* il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Come si scrive la lunghezza *L'* della molla all'equilibrio? Quanto vale, all'equilibrio, il modulo della tensione *T'* della fune?
   L' = ……………………………………$L_0+qE_0/k-m_2g/k$ [le equazioni del moto dei due blocchi si scrivono $a_1 = a_2 = QE_0/m_1 – T/m_1$ e $a_2=a_1=T/m_2-g-(k/m_2)(y-L_0)$, dove si è scelto il riferimento *Y* per descrivere il moto di m_2 ed un riferimento orizzontale diretto verso la sinistra della figura per il moto di m_1 (essendo la fune inestensibile è sicuramente $a_1=a_2$). Il sistema si può risolvere ad esempio per a_2 , ottenendo $a_2 = (QE_0)/(m_1+m_2)-m_2g/(m_1+m_2)-(k/(m_1+m_2))(y-L_0)$. Ponendo a_2=0 si ottiene $y_{EQ}=L'$, come nella soluzione]
   T' = ……………………………………QE_0 [risolvendo il sistema di cui sopra per *T* e imponendo a_2 = 0 si ottiene la soluzione, che può essere trovata immediatamente esaminando l'equilibrio del blocco m_1, sul quale agiscono la tensione *T'* (in verso"negativo" rispetto al riferimento scelto) e la forza elettrica QE_0] al punto più alto del percorso, nelle condizioni di velocità minima per compiere l'intero giro della morte l'accelerazione centripeta v_A^2/R deve essere fornita dalla forza peso *mg* (si assume nulla la reazione vincolare in queste condizioni), da cui la soluzione. Notate che la presenza dell'attrito, che produce forze di direzione tangenziale, non influenza la soluzione!]

b) Supponete ora che all'istante t_0=0 il campo elettrico venga improvvisamente spento. Come si scrive la legge oraria del moto $y_2(t)$ del blocco di massa m_2 per $t > t_0$=0? Come si esprime il periodo τ dell'oscillazione, sempre che il sistema oscilli? [Usate in modo opportuno le condizioni iniziali del problema e fate riferimento all'asse *Y* di figura]

$y(t)$ = …………………………………… $(qE_0/k)\cos(\omega t)+L_0-m_2g/k$, con $\omega = (k/(m_1+m_2))^{1/2}$ [l'equazione del moto scritta sopra per a_2 è ancora valida a patto di porre $E_0 = 0$. Dunque si ha $a_2=-(k/(m_1+m_2))(y-L_0)-m_2g/(m_1+m_2)$. Questa equazione del moto ammette soluzione armonica con pulsazione $\omega = (k/(m_1+m_2))^{1/2}$ e posizione di equilibrio $y_{EQ}=L_0-m_2g/k$. La soluzione generale è dunque $y(t)=A\cos(\omega t+\Phi) + y_{EQ}$, con A e Φ determinabili esaminando le condizioni iniziali. Queste sono, evidentemente: $y(t=0)=L'$ (determinato sopra) e $v(t=0)=0$ (si parte da fermi!). Dall'ultima si ottiene Φ=0,che, inserito nella prima, permette di trovare $A = L'-y_{EQ}=qE_0/k$, da cui la soluzione]

τ = …………………………………… $2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$ [vedi sopra!]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 1/12/2008 Firma: