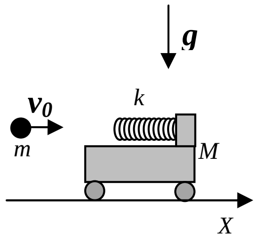
Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 22/4/2009

Nome e cognome: …………………………………………………….. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

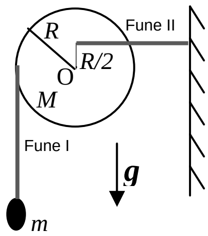
1. Un piccolo carrello di massa M può scorrere con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (orizzontale) di un dato sistema di riferimento. Il carrello è equipaggiato con una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 3.0\text{x}10^4$ N/m, montata come rappresentato in figura (la molla è fissata su una sponda, rigida e indeformabile, che appartiene al carrello). Inizialmente il carrello è fermo e la molla, ovviamente, si trova alla sua lunghezza di riposo (che è incognita). Ad un dato istante un oggetto puntiforme, di massa $m = M/4$, impatta sull'estremo libero della molla avendo una velocità di modulo $v_0 = 10$ m/s diretta orizzontalmente nel verso indicato in figura. In seguito all'impatto la molla viene compressa e si osserva che il carrello inizia a muoversi (anche l'oggetto, ovviamente, si muove). [Trascurate ogni forma di attrito nel movimento dei corpi]



a) Quanto vale la velocità V del carrello **nell'istante in cui la molla assume la sua massima compressione**?
V = ………………………… = …….. m/s $v_0m/(m+M)=v_0/5 = 2.0$ m/s [il sistema carreello + oggetto è isolato lungo l'asse X, dato che su di esso non agiscono forze esterne in questa direzione. Si conserva dunque la quantità di moto totale del sistema, cioè $mv_0 = mv + MV$. D'altra parte la condizione di massima compressione della molla si verifica quando oggetto e carrello hanno velocità **relativa** nulla, cioè quando $v = V$, da cui la soluzione]

b) Sapendo che $M = 16$ kg, qual è il valore della massima compressione Δ_{MAX} che la molla viene ad assumere nel processo considerato?
Δ_{MAX} = ……………………. ~ ……… m $v_0(M/(5k))^{1/2}$ ~ 0.10 m [non essendoci attriti, il sistema conserva la sua energia meccanica. Si può quindi scrivere $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2+(M/2)V^2+(k/2)\Delta_{MAX}^2$, avendo notato che la variazione di energia potenziale della molla (che inizialmente si trova alla sua lunghezza di riposo) è data da $(k/2)\Delta_{MAX}^2$. Sfruttando la conservazione della quantità di moto (vedi quesito precedente) si ha $k\Delta_{MAX}^2 = mv_0^2-(m+M)V^2 = Mv_0^2(1/4-(5/4)/25) = (Mv_0^2/4)(1-1/5) = Mv_0^2/5$, da cui la soluzione]

2. Un cilindro **pieno ed omogeneo** di massa $M = 2.0$ kg e raggio $R = 10$ cm è imperniato sul suo asse (punto O di figura) in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Attorno alla superficie laterale del cilindro è avvolta una sottile fune (fune I) inestensibile e di massa trascurabile: all'estremo "libero" della fune è vincolato un blocchettino di massa $m = M/3$. Si intende che la fune **non slitta mai** sulla superficie laterale del cilindro. Inizialmente il sistema è tenuto in equilibrio da un'altra fune (fune II), anche questa inestensibile e di massa trascurabile, che è inchiodata ad un estremo (con un chiodo di massa trascurabile) sulla superficie "frontale" del cilindro, ad una distanza $L = R/2$ dal centro, mentre l'altro suo estremo è vincolato ad una parete verticale rigida ed indeformabile: come mostrato in figura, la fune I è verticale, mentre la fune II è orizzontale. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Sapendo che il sistema è in equilibrio, quanto vale il modulo della tensione T_{II} che la fune II esercita sul cilindro? Quanto vale, **in modulo**, la forza F che il perno esercita sul cilindro?
T_{II} = ……………………….. = ……….. N $2mg = 2Mg/3 = 13$ N [per l'equilibrio rotazionale del cilindro, la sommatoria dei momenti delle forze rispetto al polo (cioè il centro del cerchio che rappresenta la sezione del cilindro, laddove passa l'asse di rotazione assegnato) deve essere nulla. Le uniche forze che agiscono sul cilindro e hanno braccio non nullo sono le due tensioni, i cui momenti tenderebbero a far ruotare in verso opposto il cilindro. Dunque è sufficiente uguagliare i moduli dei due momenti, cioè porre $T_IR = T_{II}R/2$, dove si è tenuto debitamente in conto del fatto che il braccio della forza T_{II} è pari alla distanza $L = R/2$. D'altra parte anche il blocchettino è in equilibrio: pertanto deve essere, per i moduli, $T_I = mg$, da cui la soluzione]
F = ……………………….. ~ ……….. N $(T_{II}^2+(T_I + Mg)^2)^{1/2} = ((2Mg/3)^2+(Mg/3 + Mg)^2)^{1/2} = (Mg/3)(4+16)^{1/2}$~ 29 N [per l'equilibrio traslazionale del cilindro occorre che la sommatoria delle forze che su di esso agiscono sia nulla. Tali forze sono le due tensioni, la forza peso del cilindro e la forza F incognita. Questa, in **modulo**, deve essere quindi uguale al **modulo** della somma **vettoriale** delle forze che agiscono in direzioni ortogonali fra loro, cioè il peso e la tensione della fune I e la tensione della fune II]

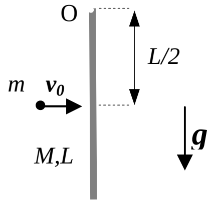
b) Supponete ora che all'istante $t_0 = 0$ la fune II venga improvvisamente tagliata: non sussistendo più le condizioni per l'equilibrio, il cilindro prende a ruotare e il blocchettino a scendere verso il basso mentre la fune I si srotola (assumete che la velocità angolare del cilindro e, di conseguenza, la velocità traslazionale del blocchettino siano inizialmente nulle). Quanto vale l'istante t' in cui il blocchettino è sceso verso il basso di un tratto $\Delta h = 96$ cm? [Supponete che in tutto questo processo la fune I continui a **non slittare** sulla superficie laterale del cilindro. Suggerimento: considerate attentamente il tipo di moto di cui è animato il blocchettino nella sua discesa!]
t' = ……………………….. ~ ……….. s $(5\Delta h/g)^{1/2}$ ~ 0.70 s [l'equazione del moto traslazionale del blocchettino scritta in un riferimento verticale orientato verso il basso recita: $a = g - T/m$, con T **modulo** della tensione della fune I (che, attenzione, è ovviamente diversa rispetto al valore di equilibrio T_I calcolato prima!). L'equazione del moto rotazionale del cilindro recita invece: $\alpha = TR/I$, con $I = MR^2/2$ momento di inerzia del cilindro omogeneo per rotazioni attorno al suo asse geometrico. Dato che la fune non slitta, si ha $\alpha = a/R$. Si ottiene dunque un sistema di tre equazioni con tre incognite, che, risolto per a, fornisce l'equazione: $a = g/(1+I/(mR^2))=g/(1+M/(2m))=2g/5$, dove nell'ultimo passaggio si sono sfruttate le informazioni sul rapporto tra le masse date nel testo. Come si nota, l'accelerazione è costante e quindi il moto è uniformemente accelerato. Detto $\Delta z(t)$ lo spostamento (verso il basso) del blocchettino ad un istante generico t, si ha $\Delta z(t)=at^2/2=gt^2/5$, da cui, ponendo $\Delta z(t')=\Delta h$, si ottiene direttamente la soluzione. Notate che lo stesso risultato si può ottenere determinando la velocità v' all'istante considerato attraverso bilancio energetico (conservazione energia meccanica) e ponendo $t'=v'/a$]

c) Cosa potete affermare sull'andamento temporale del momento angolare **complessivo** del sistema cilindro + blocchettino dopo il taglio della fune II? Discutete bene, in brutta, sull'eventuale conservazione del momento angolare e, se ne siete capaci, scrivete la legge oraria $L(t)$ per la componente assiale del momento angolare (rispetto al centro del cilindro).

Discussione: ……………………….. il momento angolare evolve secondo l'equazione $dL/dt = \tau$, con τ sommatoria delle componenti (assiali) dei momenti delle forze (esterne al sistema) che agiscono sull'intero sistema. L'unica forza agente **sul sistema** che ha braccio non nullo è la forza peso che agisce sul blocchettino e cha braccio pari a R. Le altre forze sono infatti o interne (la tensione della fune) o applicate al polo (l'asse del cilindro). Dunque il momento angolare **non** si conserva.

$L(t)$ = ……………………….. $mgRt$ [dato che il momento della forza peso sul blocchetto, mgR, è costante nel tempo, l'equazione di evoluzione temporale del momento angolare ha soluzione banale $L(t) = L_0 + mgR(t-t_0) = mgRt$, avendo scelto $t_0 = 0$ come istante iniziale ed avendo notato che in tale istante il momento (iniziale) è nullo (tutto è fermo all'inizio!). Notate che da questa legge oraria è possibile ricavare la legge oraria della velocità (angolare del cilindro e traslazionale del blochhettino). Infatti $L = I\omega + mvR = (I/R + mR)v$, da cui $v = gt(1/(1+M/m))$. Questa equazione è ovviamente compatibile con l'equazione del moto derivata nella soluzione al quesito precedente]

3. Una sottile asta omogenea di lunghezza L = 50 cm e massa M = 2.0 kg è imperniata ad un suo estremo in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente l'asta si trova ferma nella propria posizione di equilibrio, cioè con il suo asse lungo la verticale. Ad un dato istante sull'asta incide un proiettile puntiforme, di massa m = 0.10 kg, che impatta sul punto di mezzo dell'asta (distante $L/2$ dai suoi estremi) avendo una velocità orizzontale di modulo $v_0 = 1.0\text{x}10^2$ m/s, come rappresentato in figura. In seguito all'impatto il proiettile rimane **conficcato** nell'asta e tutto il sistema (asta + proiettile conficcato) comincia a ruotare attorno al perno.



a) Discutete per benino, in brutta, quali tra le grandezze **del sistema** (energia cinetica, quantità di moto, momento angolare) si conservano e quali no.

Discussione: ………………………………l'urto è palesemente anelastico, per cui dell'energia viene spesa nella penetrazione e arresto del proiettile all'interno dell'asta. Di conseguenza l'energia cinetica non si conserva. Inoltre il sistema non è isolato, dato che il perno può trasmettere forze (esterne) di tipo impulsivo: dunque anche la quantità di moto del sistema non si conserva lungo alcuna direzione. Tuttavia le forze esterne hanno braccio nullo rispetto al perno, per cui si conserva il momento angolare del sistema calcolato rispetto al perno (ovvero rispetto al polo coincidente con il perno)

b) Quanto vale la velocità angolare ω del sistema asta + proiettile conficcato **subito** dopo l'urto?

ω = ……………………………… ~ …….. rad/s $mv_0L/(2I_{tot}) \sim (3/2)(m/M)v_0/L$ = 15 rad/s [per la conservazione del momento angolare rispetto al perno si ha $mv_0L/2 = I_{tot}\omega$. Il momento di inerzia del sistema asta + proiettile è dato dalla somma dei momenti di inerzia (rispetto al perno) dell'asta omogenea, $I_{ASTA} = ML^2/3$, e del proiettile, $I_P = mL^2/4$. Dunque $I_{tot} = L^2(M/3+m/4)$, da cui la soluzione. Notate che $I_{ASTA} >> I_P$, per cui nella soluzione numerica è possibile approssimare $I_{tot} \sim I_{ASTA}$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga <u>pubblicato</u> sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 22/4/2009 Firma:

B

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 22/4/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

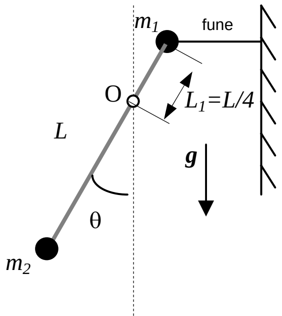
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Due ioni con carica unitaria positiva q e massa rispettivamente m_1 e $m_2=m_1/2$ si muovono **l'uno contro l'altro** lungo l'asse X di un sistema di riferimento. Inizialmente i due ioni si trovano a grandissima distanza (praticamente "infinita") tra di loro e le loro velocità sono $v_{01}=|v_0|$ e $v_{02}=-|v_0|$ (le due velocità sono uguali in modulo ed opposte in segno), con $|v_0| = 3.0\times10^3$ m/s. Si osserva che i due ioni si avvicinano l'un l'altro fino a raggiungere una distanza minima d_{MIN} (ovviamente essi non si fermano a tale distanza minima, ma subito dopo averla raggiunta la distanza relativa aumenta). [**Trascurate ogni effetto della forza peso** e ogni eventuale forza di attrito]

   a) Quanto vale la velocità v_1 dello ione di massa m_1 misurata nell'istante in cui i due ioni raggiungono la minima distanza relativa?
   v_1 = …………………… = ……….. m/s $v_0(m_1-m_2)/(m_1+m_2)=v_0/3= 1.0\times10^3$ m/s [non agendo altre forze se non quelle (interne) di interazione elettrica fra le due cariche, il sistema dei due ioni è isolato. Dunque si conserva la quantità di moto, cioè, ad ogni istante del processo, deve essere $(m_1-m_2)|v_0| = m_1v_1 + m_2v_2$, dove si è scritta correttamente (in termini di segni!) la quantità di moto iniziale del sistema. D'altra parte nell'istante di massimo avvicinamento la velocità **relativa** dei due ioni deve essere nulla, altrimenti essi continuerebbero ad avvicinarsi o si starebbero allontanando. Dunque $v_1=v_2$, da cui la soluzione]

   b) Sapendo che $q = 1.6\times10^{-19}$ C e che la somma delle masse degli ioni vale $(m_1+m_2)=3.2\times10^{-26}$ kg, qual è il valore della distanza minima d_{MIN}? [Può farvi comodo ricordare che la forza di interazione elettrica tra due cariche puntiformi q si esprime, in modulo, come $|F| = \kappa_E q^2/x^2$, essendo $\kappa_E = 9.0\times10^9$ N m^2/C^2 e x la distanza relativa (generica) tra le particelle; può anche farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$,valida per $n \neq -1$]
   d_{MIN} = …………………… = ……….. m $2\kappa_E q^2/((v_0^2-v_1^2)\,(m_1+m_2)) = 9\kappa_E q^2/(4v_0^2\,(m_1+m_2)) = 1.8\times10^{-9}$ m [per il bilancio energetico (nella forma del cosiddetto teorema delle forze vive, visto che sul sistema non agiscono altre forze all'infuori di quella elettrica di interazione (repulsione!), si può scrivere $L_E = \Delta E_K = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2 - ((m_1+m_2)/2)v_0^2 = ((m_1+m_2)/2)(v_1^2-v_0^2)$, dove si è sfruttata la condizione sulle velocità che si verifica nell'istante di massimo avvicinamento secondo quanto stabilito nella risposta al quesito precedente. Il lavoro L_E è quello esercitato dalla forza elettrica nel processo che vede inizialmente i due ioni a distanza "infinita" fra loro, e "finalmente" alla distanza d_{MIN} . Ricordando la definizione di lavoro (e tenendo conto in modo opportuno del fatto che la forza di interazione è repulsiva), si ha $L_E =\int_\infty^{d_{MIN}} (-\kappa_E q^2/x^2)dx = -\kappa_E q^2/d_{MIN}$. Mettendo tutto insieme ed usando anche il risultato trovato alla soluzione del quesito precedente si ottiene la risposta]

2. Un corpo rigido è costituito da un'asta di **massa trascurabile** e lunghezza L = 20 cm alle cui estremità sono attaccate due masse puntiformi m_1 = 1.0 kg e $m_2 = 2m_1$ = 2.0 kg. L'asta è imperniata nel punto O di figura, che dista $L_1 = L/4$ dall'estremo che alloggia la massa m_1, in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente il corpo rigido (che è una sorta di manubrio) è tenuto in equilibrio nella posizione descritta in figura (l'angolo rispetto alla verticale vale $\theta = \pi/6$) da una fune inestensibile e di massa trascurabile un cui estremo è vincolato all'estremità "1" dell'asta (quello dove si trova la massa m_1), essendo l'altro estremo inchiodato ad una parete verticale rigida ed indeformabile. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) \sim 0.87$]



   a) Quanto vale il modulo della tensione T che la fune esercita sul corpo rigido? Quanto vale, **in modulo**, la forza F che il perno esercita sul corpo rigido?
   T = …………………….. ~ ……….. N $(3m_2-m_1)gtg\theta \sim 28$ N [per l'equilibrio rotazionale del corpo rigido, la sommatoria dei momenti delle forze rispetto al polo O deve essere nulla. Le uniche forze che agiscono sul cilindro e hanno braccio non nullo sono le due forze peso, i cui momenti tenderebbero a far ruotare in verso opposto il cilindro, e la tensione della fune (che agisce per far ruotare il manubrio nello stesso verso della forza peso sulla massa m_1). Deve quindi essere, tenendo conto dei versi di rotazione ed uguagliando i moduli dei momenti: $m_2g(L-L_1)sin\theta = m_1gL_1sin\theta+TL_1cos\theta$, dove si è sfruttato il fatto che i bracci delle forze peso dipendono da $sin\theta$ mentre il braccio della tensione dipende da $cos\theta$ a causa della geometria del sistema. Con poche manipolazioni algebriche si ottiene il risultato]
   F = …………………….. ~ ……….. N $(T^2+(m_1g+m_2g)^2)^{1/2} \sim 41$ N [per l'equilibrio traslazionale del cilindro occorre che la sommatoria delle forze che su di esso agiscono sia nulla. Tali forze sono le due tensioni e la forza F incognita. Questa, in **modulo**, deve essere quindi uguale al **modulo** della somma **vettoriale** delle due tensioni (per la cui determinazione si veda la risposta al quesito precedente), che si calcola in modo banale notando che le loro direzioni sono mutuamente ortogonali]

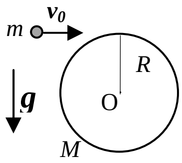
   b) Supponete ora che, ad un dato istante, la fune venga improvvisamente tagliata: il corpo rigido prende allora a ruotare nel verso antiorario di figura, passando per la posizione verticale (quella in cui l'asta assume direzione verticale). Quanto vale la velocità angolare ω del corpo rigido in tale istante? [Supponete trascurabile ogni forma di attrito]
   ω = …………………….. ~ …….. rad/s $(20g(1-cos\theta)/(19L))^{1/2} \sim 0.30$ rad/s [non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè $0 = \Delta E_K+\Delta U_G$. La variazione di energia cinetica può essere espressa come $(I/2)\omega^2$, dove il momento di inerzia (rispetto ad O) vale $I = m_1L_1^2+m_2(L-L_1)^2 = 19m_1L^2/16$ (nell'ultimo passaggio si sono usate le relazioni tra masse e distanze date nel testo). L'energia potenziale gravitazionale varia perché la massa m_2 scende verso il basso di un tratto $(L-L_1)(1-cos\theta)$ e la massa m_1 sale di un tratto $L_1(1-cos\theta)$. Dunque $\Delta U_G = m_1g(L/4)(1-6)(1-cos\theta)$, dove ancora una volta abbiamo usato le varie relazioni date nel testo. Da qui si ottiene la soluzione]

   c) Come si scrive la **funzione** energia potenziale gravitazionale $U_G(\theta)$ del corpo rigido in funzione dell'angolo θ rispetto alla verticale? Cercate di scrivere questa funzione, senza usare i dati numerici del sistema, e discutete brevemente (ma per benino) in brutta sulle posizioni di equilibrio del sistema, basando le vostre affermazioni proprio sull'andamento della funzione che avete scritto.

$U_G(\theta)$ =……………………….. $-5m_1g(L/4)\,(1-\cos\theta)$ [come affermato nella soluzione del quesito precedente, la **variazione** dell'energia potenziale si scrive $\Delta U_G = -m_1g(L/4)(1\text{-}6)(1-\cos\theta)$. La funzione energia potenziale è costruita a partire da tale variazione aggiungendo una costante arbitraria, che può ad esempio essere scelta ponendo $U_G(\theta=0) = 0$, come fatto nella soluzione (verificate!)

Discussione: ……………………….. la funzione appena scritta ha un minimo locale in $\theta = 0$ ed un massimo locale in $\theta = \pi/2$, che dunque corrispondono rispettivamente a posizioni di equilibrio stabile e instabile.

3. Un cilindro **pieno ed omogeneo** di massa M = 2.0 kg e raggio R = 10 cm è imperniato sul suo asse (punto O di figura) in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente tale cilindro si trova fermo in equilibrio. Ad un dato istante sul cilindro incide un proiettile puntiforme, di massa m = 0.10 kg, che impatta sulla superficie laterale del cilindro avendo una velocità orizzontale di modulo v_0 = 1.0x10^2 m/s, come rappresentato in figura. In seguito all'impatto il proiettile (puntiforme!) rimane **conficcato** nel cilindro (sul suo punto di impatto, tangente alla superficie laterale del cilindro) e tutto il sistema (cilindro + proiettile conficcato) comincia a ruotare attorno al perno.



a) Discutete per benino, in brutta, quali tra le grandezze del sistema (energia cinetica, quantità di moto, momento angolare) si conservano e quali no.

Discussione: ………………………………l'urto è palesemente anelastico, per cui dell'energia viene spesa nella penetrazione e arresto del proiettile sul cilindro. Di conseguenza l'energia cinetica non si conserva. Inoltre il sistema non è isolato, dato che il perno può trasmettere forze (esterne) di tipo impulsivo: dunque anche la quantità di moto del sistema non si conserva lungo alcuna direzione. Tuttavia le forze esterne hanno braccio nullo rispetto al perno, per cui si conserva il momento angolare del sistema calcolato rispetto al perno (ovvero rispetto al centro del cilindro)

b) Quanto vale la velocità angolare ω del sistema cilindro + proiettile conficcato **subito** dopo l'urto?

ω = ……………………………… ~ …….. rad/s $mv_0R/I_{tot} \sim 2(m/M)v_0/R$ = 1.0x10^2 rad/s [per la conservazione del momento angolare rispetto al perno si ha $mv_0R = I_{tot}\omega$. Il momento di inerzia del sistema cilindro + proiettile è dato dalla somma dei momenti di inerzia (rispetto al perno) del cilindro pieno omogeneo, $I_{CIL} = MR^2/2$, e del proiettile, $I_P = mR^2$. Dunque $I_{tot} = R^2(M/2+m)$, da cui la soluzione. Notate che $I_{CIL} >> I_P$,per cui nella soluzione numerica è possibile approssimare $I_{tot} \sim I_{CIL}$

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 22/4/2009 Firma:

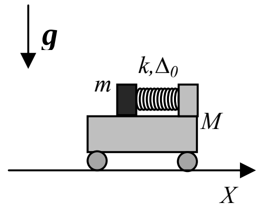
C

Corso di Laurea CIA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 22/4/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………… **Matricola: ……………**

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piccolo carrello di massa M può scorrere con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. Il carrello è equipaggiato con una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 5.0 \times 10^4$ N/m, montata come rappresentato in figura (la molla è fissata su una sponda, rigida e indeformabile, che appartiene al carrello). Inizialmente il carrello è fermo e la molla è **mantenuta compressa** per un tratto $\Delta_0 = 10$ cm da un filo che ne collega gli estremi; un oggetto puntiforme di massa $m = M/4$ si trova fermo a contatto dell'estremo "libero" della molla, come rappresentato in figura. Tale oggetto può scorrere con **attrito trascurabile** sulla superficie del carrello. Ad un dato istante il filo viene tagliato, la molla perde la sua compressione "spingendo" l'oggetto; di conseguenza, sia l'oggetto che il carrello cominciano a muoversi in direzione orizzontale. [Trascurate ogni forma di attrito]



   a) Quale relazione deve esistere tra le velocità v e V rispettivamente dell'oggetto e del carrello in ogni istante del processo? [Scrivete la relazione analitica che lega v a V senza usare i valori numerici dei parametri del problema, e giustificate bene, in brutta, le motivazioni della vostra affermazione]
   v = ………………………… $-MV/m = -4V$ [il sistema carrello + oggetto è isolato lungo l'asse X, dato che su di esso non agiscono forze esterne in questa direzione. Si conserva dunque la quantità di moto totale del sistema, che inizialmente (tutto fermo!) è nulla. Dunque ad ogni istante del processo deve essere $0 = mv + MV$, da cui la risposta, dove il segno negativo indica, giustamente, che oggetto e carrrello si muovono in versi opposti]

   b) Durante il processo, la molla, espandendosi, verrà ad assumere la propria lunghezza di riposo. Sapendo che $M = 16$ kg, quanto vale la velocità V' del carrello misurata nell'istante in cui la molla assume la propria lunghezza di riposo?
   V' = …………………….. = ………. m/s $\Delta_0((k/(5M))^{1/2} = 2.5$ m/s [oltre alla conservazione della quantità di moto, il sistema obbedisce anche alla conservazione dell'energia meccanica, dato che, come dichiarato nel testo, non sono presenti forze di attrito. Deve quindi essere $0 = (m/2)v'^2 + (M/2)V'^2 - (k/2)\Delta_0^2$, avendo notato che la variazione di energia potenziale della molla è data da $-(k/2)\Delta_0^2$. Sfruttando la relazione tra le velocità data dalla conservazione della quantità di moto (vedi quesito precedente) e facendo qualche manipolazione algebrica, si ottiene la soluzione]

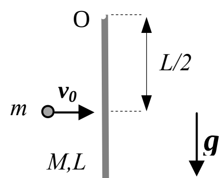
2. Un cilindro **pieno ed omogeneo** di massa $m = 2.0$ kg e raggio $R = 10$ cm si trova, inizialmente fermo, sulla sommità di un piano inclinato di altezza $h = 15$ m e inclinazione $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Ad un dato istante, il cilindro viene lasciato libero di scendere sul piano inclinato, partendo con velocità iniziale nulla. Il piano inclinato è **scabro** e si verifica che l'attrito tra superficie laterale del cilindro e superficie del piano è tale da garantire moto di **rotolamento puro**, cioè il cilindro si muove rotolando **senza strisciare**. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) \sim 0.87$ e trascurate ogni forma di attrito diversa da quella che provoca il moto di rotolamento puro]

   a) Quanto vale la velocità v_{CM} che il centro di massa del cilindro raggiunge al termine del piano inclinato?
   v_{CM} = ……………………….. = ……….. m/s $(2mgh/(m+I/R^2))^{1/2} = 2(gh/3)^{1/2} = 14$ m/s [sul cilindro non agiscono forze dissipative se non l'attrito responsabile del rotolamento. Poiché questo avviene senza strisciamento, si tratta di attrito statico che non dà dissipazione di energia. Pertanto si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta U_G + \Delta E_K = -mgh + (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2$. D'altra parte il rotolamento puro impone una condizione geometrica tra velocità del centro di massa e velocità angolare di rotazione: $v_{CM} = \omega R$. Inoltre per un cilindro pieno omogeneo si ha $I = mR^2/2$, da cui la soluzione]

   b) Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra superficie del piano inclinato e superficie laterale del cilindro vale $\mu_S = 0.80$, verificate **quantitativamente** che il moto di rotolamento puro sia effettivamente possibile. [Fate una bella e chiara discussione in brutta]
   Verifica e discussione: ……………………….. l'equazione del moto traslazionale del centro di massa del cilindro, scritta nel riferimento del piano inclinato (orientato verso il basso) recita $a_{CM} = gsin\theta - F_A/m$, con F_A intensità della forza di attrito effettivamente necessaria per avere rotolamento puro. D'altra parte l'equazione del moto di rotazione del cilindro si scrive $\alpha = F_A R/I$, essendo la sola forza di attrito in grado di provocare il rotolamento (le altre forze, peso e reazione vincolare, hanno braccio nullo). Nel rotolamento puro si ha poi $\alpha = a_{CM}/R$. Dunque si ha un sistema di tre equazioni in tre incognite che può essere risolto per F_A ottenendo: $F_A = mgsin\theta/3$. D'altra parte per definizione di coefficiente di attrito statico deve anche essere $F_A \le \mu_S N = \mu_S mgcos\theta$, da cui si ricava la seguente condizione su μ_S: $\mu_S \ge tg\theta/3$. Questa condizione è effettivamente verificata, e dunque il moto di rotolamento puro è effettivamente possibile.

   c) Supponete ora che alla base del piano inclinato sia presente un tratto **orizzontale** perfettamente liscio, cioè con coefficiente di attrito (sia statico che dinamico) praticamente nullo. Quanto varrà la velocità angolare ω' del cilindro quando esso si trova a percorrere questo tratto? [State attenti a valutare tutte le possibili conservazioni delle varie grandezze in gioco e spiegate bene, in brutta, cosa vi aspettate che succeda!]
   ω' =……………………….. ~ …….. rad/s $v_{CM}/R = 70$ rad/s quando il cilindro si trova sul piano liscio, su di esso non agisce più alcuna forza di attrito. Pertanto il momento delle forze esterne è nullo e dunque si conserva il momento angolare. Di conseguenza il cilindro continua a ruotare attorno al proprio asse con la velocità angolare che aveva acquistato nella discesa lungo il piano inclinato, da cui la soluzione. Notate che, ovviamente, anche quantità di moto ed energia meccanica (cioè cinetica) si conservano, essendo il cilindro isolato lungo l'asse orizzontale (quello del moto) e non essendoci forze dissipative]

3. Una sottile asta omogenea di lunghezza $L = 50$ cm e massa $M = 2.0$ kg è imperniata ad un suo estremo (indicato con O in figura) in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente l'asta si



trova ferma nella propria posizione di equilibrio, cioè con il suo asse lungo la verticale. Ad un dato istante sull'asta incide un oggetto puntiforme, di massa $m = M/2 = 1.0$ kg, che impatta sul punto di mezzo dell'asta (cioè a distanza $L/2$ dai suoi estremi) avendo una velocità orizzontale di modulo $v_0 = 10$ m/s, come rappresentato in figura. L'urto tra oggetto e asta può essere considerato **perfettamente elastico**.

a) Discutete per benino, in brutta, quali tra le grandezze del sistema (energia cinetica, quantità di moto, momento angolare) si conservano e quali no.

Discussione: ………………………………. l'energia cinetica complessiva del sistema si conserva per definizione di urto elastico. Inoltre il sistema non è isolato, dato che il perno può trasmettere forze (esterne) di tipo impulsivo: dunque la quantità di moto del sistema non si conserva lungo alcuna direzione. Tuttavia le forze esterne hanno braccio nullo rispetto al perno, per cui si conserva il momento angolare del sistema calcolato rispetto al perno (ovvero rispetto al polo coincidente con il perno)

b) Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta **subito** dopo l'urto? [Tenete in debito conto il carattere dichiaratamente elastico dell'urto!]

ω = ………………………………. = …….. rad/s $(v_0/L)(12/11)$ = 22 rad/s [la conservazione dell'energia cinetica si scrive: $(m/2)v_0^2=(m/2)v^2+(I/2)\omega^2$, con v velocità del proiettile subito dopo l'urto (si suppone che essa sia sempre diretta orizzontalmente) e $I = ML^2/3$ momento di inerzia dell'asta omogenea per rotazioni attorno a un asse che passa per un suo estremo. Per la conservazione del momento angolare rispetto al perno si ha poi $mv_0L/2 = I\omega + mvL/2$, ovvero $v = v_0 - 2I\omega/(mL) = v_0 -2(M/(3m))\omega L= v_0 -4\omega L/3$ (nell'ultimo passaggio si è sfruttato il rapporto tra le masse dato nel testo). Sostituendo nell'equazione di conservazione dell'energia cinetica si ottiene un'equazione algebrica del secondo grado la cui soluzione fornisce la risposta]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 22/4/2009 Firma: