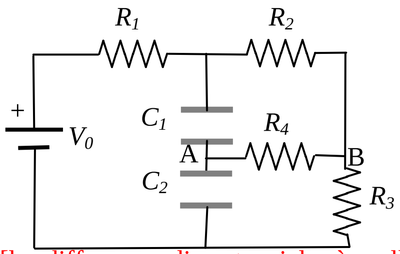
A

Corso di Laurea Ing EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 23/5/2007

Nome e cognome: …………………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un circuito elettrico è costituito da quattro resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm, R_3 = 500 ohm, R_4 = 800 ohm) e due condensatori (C_1 = 200 nF, C_2 = 1.00 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10.0 V.



a) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la differenza di potenziale V_4 ai capi della resistenza R_4 (cioè tra i punti A e B di figura)?

V_4 = …………………………………… = ... V 0 [la differenza di potenziale è nulla essendo nulla la corrente che, in condizioni stazionarie, passa attraverso la resistenza R_4]

b) Quanto vale la corrente I erogata dal generatore in condizioni stazionarie?

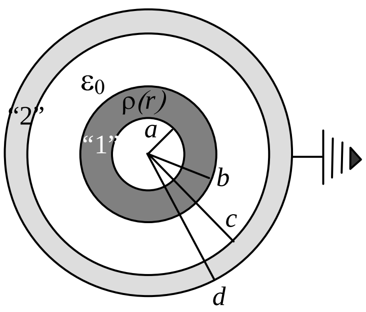
I = …………………………………… = ………… mA $V_0/(R_1+R_2+R_3)$ = 10.0 mA [in condizioni stazionarie la corrente passa attraverso la serie delle tre resistenze; la resistenza R_4 non partecipa alla conduzione, dato che, in condizioni stazionarie, non c'è passaggio di corrente da/per i condensatori]

c) Supponete che, ad un dato istante, il generatore venga scollegato dal circuito; quanto vale l'energia U_{diss} che viene dissipata per effetto Joule dalle resistenze nell'**intero** processo di scarica dei condensatori? Quali resistenze sono coinvolte nella dissipazione?

U_{diss} = …………………………………… = ... J $(C_1/2)V_1^2+(C_2/2)V_2^2 = (C_1/2)(R_2I)^2+(C_1/2)(R_3I)^2$ = 1.41×10^{-5} J [per ragioni di bilancio energetico, nel processo di scarica le resistenze dissipano per effetto Joule l'energia inizialmente accumulata nei condensatori, che si esprime come $(C/2)V^2$, dove V è la differenza di potenziale **iniziale**; essendo i punti A e B allo stesso potenziale, la differenza di potenziale V_1 ai capi di C_1 è R_2I; la V_2 ai capi di C_2 è R_3I, da cui la soluzione]

Resistenze coinvolte nel processo: …………………………………… R_2 , R_3 ,R_4 [la resistenza R_1 non dissipa energia dato che, a generatore scollegato, in essa non circola corrente]

2. Un guscio sferico (detto "1") di raggio interno a = 10 cm e raggio esterno b = 20 cm porta al suo interno una densità di carica volumica **disomogenea** che dipende solo dalla distanza r dal centro secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 b^2/r^2$, con $\rho_0 = 1.0\times10^{-5}$ C/m^3. Un secondo guscio, detto "2", fatto di **materiale conduttore**, ha raggio interno c = 40 cm, raggio esterno d = 50 cm ed è **collegato a terra**. Il guscio "2" circonda il guscio "1" essendo concentrico ad esso, come rappresentato schematicamente in figura.



a) Quanto vale la carica Q portata dal guscio "1" al suo interno? [Sfruttate in modo opportuno la simmetria sferica del problema!]

Q = …………………………….. = ... C $\int_{guscio} dq = \int_{guscio} \rho(r)\, dV = \rho_0 b^2 4\pi \int_a^b (1/r^2)\, r^2 dr = \rho_0 4\pi b^2 (b-a) = 5.0\times10^{-7}$ C [la soluzione viene dalla definizione di densità volumica di carica, tenendo presente che l'integrale, nelle condizioni di simmetria sferica considerata, può essere calcolato usando l'elemento di volume $dV = 4\pi r^2 dr$, che corrisponde a suddividere il guscio "1" in tanti gusci concentrici di spessore infinitesimo]

b) Quanto valgono le cariche Q_c e Q_d che, all'equilibrio, si trovano sulle superfici interna (r=c) ed esterna (r=d) del guscio "2"?

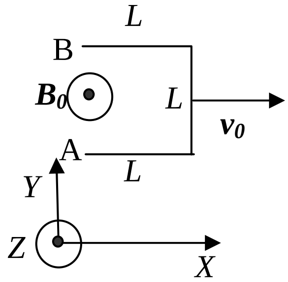
Q_c = …………………………….. = ... C $-Q = -5.0\times10^{-7}$ C [applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $c<R<d$ si trova che, dovendo essere il campo nullo all'equilibrio e quindi essendo nullo il flusso, la carica contenuta è nulla. Questa carica contenuta è data dalla somma algebrica $Q + Q_c$, da cui la soluzione]

Q_d = …………………………….. = ... C 0 [infatti il campo esterno all'intero sistema, cioè quello per $r>d$, deve essere nullo essendo nullo il potenziale del guscio "2" (la differenza di potenziale da qui all'infinito deve essere nulla!). La condizione è già soddisfatta dalla carica Q_c, per cui su questa superficie non si deposita altra carica]

c) A quale **potenziale elettrico** V_b si trova la superficie esterna del guscio "1", cioè la superficie sferica di raggio $r=b$? [Ricordate la relazione tra differenza di potenziale e potenziale, e che, per convenzione, la terra ha potenziale nullo ($V_{TERRA}=0$); usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto, che è il "mezzo" che si trova fra i due gusci]

V_b = …………………………….. = ... V $\int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^c E \cdot dr = \int_b^c Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) \cdot dr = (Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/c)$ = 1.4x10^4 V [per definizione si ha $\Delta V = V_c - V_b = 0 - V_b = -\int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, dove si è sfruttato il fatto che il guscio "2", e quindi anche tutti i punti che si trovano ad $r = c$, sono a terra, cioè a potenziale nullo. Per il calcolo abbiamo sfruttato il teorema di Gauss, che stabilisce che il campo nella regione tra i due gusci è quello di una carica puntiforme Q collocata al centro del guscio "1"]

3. Un pezzo di filo elettrico **sottile** di materiale conduttore è ripiegato ad "U" come rappresentato in figura; la lunghezza di tutti e tre i suoi lati è L = 10 cm. Questo filo viene mosso da un operatore esterno in modo da avere una velocità **costante** di modulo v_0 = 10 m/s diretta nel verso positivo dell'asse X del sistema di figura; in tutto lo spazio in cui si muove il filo insiste un campo magnetico **uniforme e costante** di modulo B_0 = 1.0x10^{-2} T diretto nel verso positivo dell'asse Z. Supponete che il movimento del filo abbia avuto inizio molto prima di quando si compiono le osservazioni di questo esercizio, cioè che il conduttore si trovi in condizioni di equilibrio.



a) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V = V_B - V_A$ tra i capi B ed A del filo (indicati in figura)?

ΔV = ... = ... V. $-v_0 B_0 L$ =- 1.0x10^{-2} V [il modulo del campo impresso è $E^* = v_0 B_0$; questo campo è diretto lungo Y ed è uniforme nel tratto verticale del filo; i tratti orizzontali, invece, non contribuiscono dato che in essi non c\`è spostamento di carica (la forza è ortogonale al loro asse ed il filo è sottile), da cui la soluzione; il segno negativo tiene conto della particolare distribuzione delle cariche (quelle positive sono spinte verso il basso, in accordo con la regola della mano destra)]

b) Supponendo che il filo abbia massa **trascurabile** e resistenza elettrica R = 10 ohm, quanto vale la potenza W che l'operatore esterno deve applicare al filo per muoverlo a velocità $\mathbf{v_0}$? [Attenti: considerate una situazione **stazionaria**, cioè di **equilibrio**!]

W = ... = ... W. 0 [in condizioni stazionarie le cariche si sono già spostate ai capi del filo e non c'è alcuna corrente; quindi la dissipazione Joule, che sarebbe l'unica forma di perdita di energia, è nulla ed il bilancio energetico porta alla soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 23/5/2007 Firma:

FOGLIETTO

$\vec{j} = \rho\vec{v} = ne\vec{v}$ Def. dens. corr.

$\vec{j} = \sigma_C \vec{E} = \frac{1}{\rho_C}\vec{E}$ Dens.corr.in conduttore.

$\sigma_C = \frac{ne^2\tau_C}{m}$ Conducibilità secondo Drude.

$I = \Phi_S(\vec{j}) = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS$ Corrente/dens.corr.

$V = RI$ Legge di Ohm

$W = VI$ Effetto Joule

$Q = CV$ Capacità

$\tau = RC$ Tempo di scarica Condensatore su resistenza

$U_E = CV^2/2$ Energia condensatore

$\vec{F}_E = q\vec{E}$ Def. campo elettrico/forza elettrica

$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ Def. d.d.p.

$\vec{E} = \frac{\kappa_E Q}{r^2}\hat{r}$ Campo in r di carica puntiforme/sferica Q

$d\vec{E} = \frac{\kappa_E dq}{r^2}\hat{r}$ Relazione costitutiva campo el.

$\Phi_{S,chiusa}(\vec{E}) = \int_{S,chiusa} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ Teorema di Gauss

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ Circuitazione campo elettrico (statico)

$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ Forza di Lorentz

$d\vec{F}_M = Id\vec{l} \times \vec{B}$ Forza su elemento di filo

$\vec{p}_M = SI\hat{n}$ Momento dipolo magnetico per spira di superficie S e corrente I

$\vec{\tau} = \vec{p}_M \times \vec{B}$ Momento delle forze su spira

$d\vec{B} = \frac{\kappa_B d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ Relazione costitutiva campo magn.

$\Phi_{S,chiusa}(\vec{B}) = \int_{S,chiusa} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$ Flusso campo magn.

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concat}$ Teor. Ampere (statico).

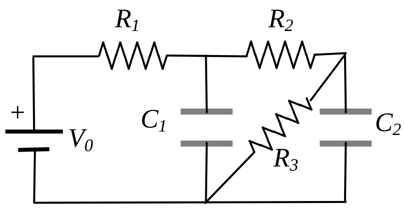
$\int \xi^n d\xi = \frac{\xi^{n+1}}{n+1}$ (per $n \neq -1$) Integrali

$\int \frac{1}{\xi} d\xi = \ln(\xi)$

Corso di Laurea Ing EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 23/5/2007

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

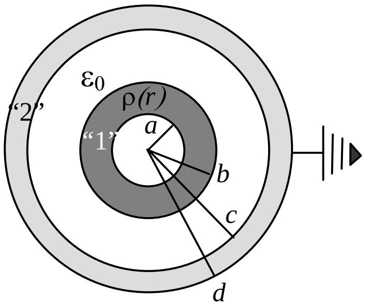
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



1. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm, R_3 = 500 ohm) e due condensatori (C_1 = 200 nF, C_2 = 1.00 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10.0 V.
   a) Quanto vale la corrente I erogata dal generatore in condizioni stazionarie?
   I = …………………………………… = ………… mA $V_0/(R_1+R_2+R_3)$ = 10.0 mA [in condizioni stazionarie la corrente passa attraverso la serie delle tre resistenze]

   b) Quanto valgono le cariche Q_1 e Q_2 accumulate sui condensatori in condizioni stazionarie?
   Q_1 = …………………………………… = ... C $C_1V_1 = C_1(V_0-R_1I) = 1.80\text{x}10^{-6}$ C [la differenza di potenziale ai capi del condensatore è pari a quella del generatore meno la "caduta di potenziale" ai capi di R_1, da cui la soluzione]
   Q_2 = …………………………………… = ... C $C_2V_2 = C_2(V_0-R_1I-R_2I) = C_2R_3I = 5.00\text{x}10^{-6}$ C [la differenza di potenziale ai capi del condensatore è pari a quella del generatore meno la "caduta di potenziale" ai capi di R_1 e R_2 (in serie), ovvero è pari alla differenza di potenziale ai capi di R_3, da cui la soluzione]

   c) Supponete che, ad un dato istante, il generatore venga scollegato dal circuito; quanto vale l'energia U_{diss} che viene dissipata per effetto Joule dalle resistenze nell'**intero** processo di scarica dei condensatori? Quali resistenze sono coinvolte nella dissipazione?
   U_{diss} = …………………………………… = ... J $Q_1^2/(2C_1)+Q_2^2/(2C_2) = 2.06\text{x}10^{-5}$ J
   [per ragioni di bilancio energetico, nel processo di scarica le resistenze dissipano per effetto Joule l'energia inizialmente accumulata nei condensatori, che si esprime come $Q^2/(2C)$, dove Q è la carica accumulata inizialmente (quella determinata al punto precedente)]
   Resistenze coinvolte nel processo: …………………………………… R_2 , R_3[la resistenza R_1 non dissipa energia dato che, a generatore scollegato, in essa non circola corrente]



2. Un guscio cilindrico (detto "1") di raggio interno a = 10 cm, raggio esterno b = 20 cm ed altezza h = 2.0 m ($h>>a,b$) porta al suo interno una densità di carica volumica **disomogenea** che dipende solo dalla distanza r dal centro secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 b^2/r^2$, con $\rho_0 = 1.0\text{x}10^{-5}$ C/m^3. Un secondo guscio, detto "2", fatto di **materiale conduttore**, ha raggio interno c = 40 cm, raggio esterno d = 50 cm, altezza h = 2.0 m ($h>>c,d$) ed è **collegato a terra**. Il guscio "2" circonda il guscio "1" essendo coassiale ad esso, come rappresentato schematicamente in figura. [Considerate nulli gli "effetti ai bordi" dato che i gusci sono "molto più alti che larghi"]
   a) Quanto vale la carica Q portata dal guscio "1" al suo interno? [Sfruttate in modo opportuno la simmetria cilindrica del problema! Può farvi comodo sapere che $ln2$ ~ 0.69]
   Q = ……………………………. ~ .... C $\int_{guscio}dq = \int_{guscio}\rho(r)\,dV = \rho_0 b^2 2\pi h \int_a^b (1/r^2)\, r dr = \rho_0 2\pi b^2 h\, ln(b/a) \sim 3.5\text{x}10^{-6}$ C [la soluzione viene dalla definizione di densità volumica di carica, tenendo presente che l'integrale, nelle condizioni di simmetria cilindrica considerata, può essere calcolato usando l'elemento di volume $dV = 2\pi rhdr$, che corrisponde a suddividere il guscio "1" in tanti gusci coassiali di spessore infinitesimo]

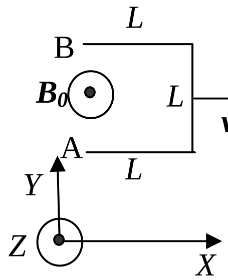
   b) Quanto valgono le cariche Q_c e Q_d che, all'equilibrio, si trovano sulle superfici interna (r=c) ed esterna (r=d) del guscio "2"? [Ricordate di trascurare gli effetti ai bordi, che in pratica significa porre campo nullo all'esterno del sistema!]
   Q_c = ……………………………. ~ .... C $-Q = -3.5\text{x}10^{-6}$ C [applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio $c<R<d$ si trova che, dovendo essere il campo nullo all'equilibrio e quindi essendo nullo il flusso, la carica contenuta è nulla. Questa carica contenuta è data dalla somma algebrica $Q + Q_c$, da cui la soluzione]

Q_d = …………………………….. = ... C   0   [infatti il campo esterno all'intero sistema, cioè quello per $r>d$, deve essere nullo essendo nullo il potenziale del guscio "2" (la differenza di potenziale da qui all'infinito deve essere nulla!). La condizione è già soddisfatta dalla carica Q_c, per cui su questa superficie non si deposita altra carica]

c) A quale **potenziale elettrico** V_b si trova la superficie esterna del guscio "1", cioè la superficie cilindrica di raggio $r=b$? [Ricordate la relazione tra differenza di potenziale e potenziale, e che, per convenzione, la terra ha potenziale nullo ($V_{TERRA}=0$); usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto, che è il "mezzo" che si trova fra i due gusci]

V_b = …………………………….. = ... V $\int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^c E \cdot dr = \int_b^c Q/(2\pi\varepsilon_0 hr) \cdot dr = (Q/(2\pi\varepsilon_0 h))\ln(c/b) = 2.2\text{x}10^4$ V   [per definizione si ha $\Delta V = V_c - V_b = 0 - V_b = -\int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, dove si è sfruttato il fatto che il guscio "2", e quindi anche tutti i punti del guscio che si trovano ad $r = c$, sono a terra, cioè a potenziale nullo. Per il calcolo abbiamo sfruttato il teorema di Gauss, che stabilisce che il campo nella regione tra i due gusci si trova da $E2\pi rh=Q/\varepsilon_0$, da cui $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 hr)$]

3. Un pezzo di filo elettrico **sottile** di materiale conduttore è ripiegato ad "U" come rappresentato in figura; la lunghezza di tutti e tre i suoi lati è L = 10 cm. Questo filo viene mosso da un operatore esterno in modo da avere una velocità **costante** di modulo v_0 = 10 m/s diretta nel verso positivo dell'asse X del sistema di figura; in tutto lo spazio in cui si muove il filo insiste un campo magnetico **uniforme e costante** di modulo $B_0 = 1.0\text{x}10^{-2}$ T diretto nel verso positivo dell'asse Z. Supponete che il movimento del filo abbia avuto inizio molto prima di quando si compiono le osservazioni di questo esercizio, cioè che il conduttore si trovi in condizioni di equilibrio.



a) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V = V_B - V_A$ tra i capi B ed A del filo (indicati in figura)?

ΔV = ... = ... V. $-v_0 B_0 L = -1.0\text{x}10^{-2}$ V   [il modulo del campo impresso è $E^* = v_0 B_0$; questo campo è diretto lungo Y ed è uniforme nel tratto verticale del filo; i tratti orizzontali, invece, non contribuiscono dato che in essi non c\`è spostamento di carica (la forza è ortogonale al loro asse ed il filo è sottile), da cui la soluzione; il segno negativo tiene conto della particolare distribuzione delle cariche (quelle positive sono spinte verso il basso, in accordo con la regola della mano destra)]

b) Supponendo che il filo abbia massa **trascurabile** e resistenza elettrica R = 10 ohm, quanto vale la potenza W che l'operatore esterno deve applicare al filo per muoverlo a velocità $\mathbf{v_0}$? [Attenti: considerate una situazione **stazionaria**, cioè di **equilibrio**!]

W = ... = ... W. 0   [in condizioni stazionarie le cariche si sono già spostate ai capi del filo e non c'è alcuna corrente; quindi la dissipazione Joule, che sarebbe l'unica forma di perdita di energia, è nulla ed il bilancio energetico porta alla soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 23/5/2007   Firma:

FOGLIETTO

$\vec{j} = \rho\vec{v} = ne\vec{v}$ Def. dens. corr.

$\vec{j} = \sigma_C \vec{E} = \frac{1}{\rho_C}\vec{E}$ Dens.corr.in conduttore.

$\sigma_C = \frac{ne^2\tau_C}{m}$ Conducibilità secondo Drude.

$I = \Phi_S(\vec{j}) = \int_S \vec{j}\cdot\hat{n}dS$ Corrente/dens.corr.

$V = RI$ Legge di Ohm

$W = VI$ Effetto Joule

$Q = CV$ Capacità

$\tau = RC$ Tempo di scarica Condensatore su resistenza

$U_E = CV^2/2$ Energia condensatore

$\vec{F}_E = q\vec{E}$ Def. campo elettrico/forza elettrica

$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ Def. d.d.p.

$\vec{E} = \frac{\kappa_E Q}{r^2}\hat{r}$ Campo in r di carica puntiforme/sferica Q

$d\vec{E} = \frac{\kappa_E dq}{r^2}\hat{r}$ Relazione costitutiva campo el.

Teorema di Gauss

$\Phi_{S,chiusa}(\vec{E}) = \int_{S,chiusa} \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ Circuitazione campo elettrico (statico)

$\vec{F}_M = q\vec{v}\times\vec{B}$ Forza di Lorentz

$d\vec{F}_M = Id\vec{l}\times\vec{B}$ Forza su elemento di filo

$\vec{p}_M = SI\hat{n}$ Momento dipolo magnetico per spira di superficie S e corrente I

$\vec{\tau} = \vec{p}_M \times \vec{B}$ Momento delle forze su spira

$d\vec{B} = \frac{\kappa_B d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ Relazione costitutiva campo magn.

Flusso campo magn.

$\Phi_{S,chiusa}(\vec{B}) = \int_{S,chiusa} \vec{B}\cdot\hat{n}dS = 0$

Teor. Ampere (statico).

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concat}$

$\int \xi^n d\xi = \frac{\xi^{n+1}}{n+1}$ (per $n \neq -1$)

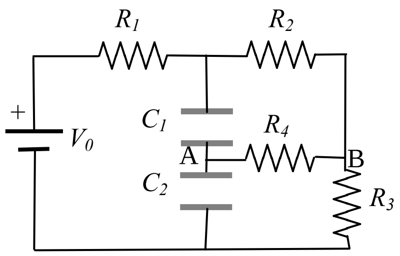
$\int \frac{1}{\xi}d\xi = \ln(\xi)$ Integrali

Corso di Laurea Ing EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 23/5/2007

Nome e cognome: …………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un circuito elettrico è costituito da quattro resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm, R_3 = 500 ohm, R_4 = 800 ohm) e due condensatori (C_1 = 200 nF, C_2 = 1.00 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10.0 V.

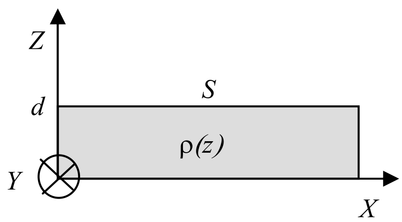


a) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la differenza di potenziale V_4 ai capi della resistenza R_4 (cioè tra i punti A e B di figura)?
V_4 = …………………………………… = ... V   0   [la differenza di potenziale è nulla essendo nulla la corrente che, in condizioni stazionarie, passa attraverso la resistenza R_4]

b) Quanto vale la corrente I erogata dal generatore in condizioni stazionarie?
I = …………………………………… = ………… mA $V_0/(R_1+R_2+R_3)$ = 10.0 mA   [in condizioni stazionarie la corrente passa attraverso la serie delle tre resistenze; la resistenza R_4 non partecipa alla conduzione, dato che, in condizioni stazionarie, non c'è passaggio di corrente da/per i condensatori]

c) Supponete che, ad un dato istante, il generatore venga scollegato dal circuito; quanto vale l'energia U_{diss} che viene dissipata per effetto Joule dalle resistenze nell'**intero** processo di scarica dei condensatori? Quali resistenze sono coinvolte nella dissipazione?
U_{diss} = …………………………………… = ... J $(C_1/2)V_1^2+(C_2/2)V_2^2 = (C_1/2)(R_2I)^2+(C_1/2)(R_3I)^2 = 1.41\text{x}10^{-5}$ J [per ragioni di bilancio energetico, nel processo di scarica le resistenze dissipano per effetto Joule l'energia inizialmente accumulata nei condensatori, che si esprime come $(C/2)V^2$, dove V è la differenza di potenziale **iniziale**; essendo i punti A e B allo stesso potenziale, la differenza di potenziale V_1 ai capi di C_1 è R_2I; la V_2 ai capi di C_2 è R_3I da cui la soluzione]
Resistenze coinvolte nel processo: …………………………………… R_2 , R_3 ,R_4 [la resistenza R_1 non dissipa energia dato che, a generatore scollegato, in essa non circola corrente]

2. Una lastra di materiale non conduttore è "appoggiata" sul piano XY di un sistema di riferimento, come rappresentato in figura. La lastra è molto più "larga" di quanto non sia "alta", in modo da poter trascurare gli "effetti ai bordi": infatti la sezione di base vale S = 1.0x10^3 cm^2, mentre lo spessore vale d = 1.0 cm. La lastra porta una distribuzione di carica volumica **disomogenea** che dipende solo dalla quota z secondo la legge $\rho(z) = \rho_0 z^2/d^2$, con ρ_0 = 3.0x10^{-5} C/m^3. Si sa che il campo elettrico è nullo per $z \leq 0$.



Disegno non in scala!

a) Quanto vale la carica Q portata dalla lastra al suo interno? [Sfruttate in modo opportuno la simmetria piana del problema!]
Q = …………………………….. = ... C $\int_{lastra} dq = \int_{lastra}\rho(z)\, dV = (\rho_0 S/d^2) \int_0^d z^2 dz = (\rho_0 S/d^2)\, d^3/3 = \rho_0 S\, d/3 = 1.0\text{x}10^{-8}$ C   [la soluzione viene dalla definizione di densità volumica di carica, tenendo presente che l'integrale, nelle condizioni di simmetria piana considerata, può essere calcolato usando l'elemento di volume $dV = Sdz$, che corrisponde a suddividere la lastra in tante "lamine" sovrapposte]

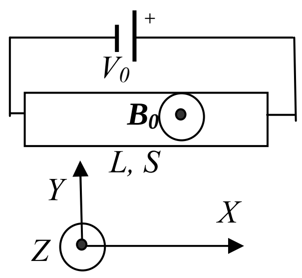
b) Quanto vale la differenza di potenziale ΔV tra faccia "superiore" e faccia "inferiore" della lastra (cioè tra i punti $z = d$ e z = 0)? [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica nella lastra]
ΔV = …………………………….. = ... V $- \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^d E(z)\, dz = - \int_0^d (\rho_0/(3d^2\varepsilon_0))\, z^3\, dz = - \rho_0 d^2/(12\varepsilon_0) = -$ 28 V [il campo interno alla lastra si determina in funzione di z usando Gauss su una superficie chiusa costituita da una lastra ideale di sezione S con una faccia in z = 0 (dove il campo è nullo!) e l'altra alla quota z **generica** . Sapendo che il campo è diretto lungo z e dipende solo da z (si trascurano gli "effetti ai bordi"), si ha allora $\Phi_{S,chiusa}(\mathbf{E}) = SE(z) = Q_{INT}(z)/\varepsilon_0$. La carica interna alla superficie di Gauss in questione si trova integrando nel volume secondo quanto stabilito nella risposta alla domanda precedente]

C

c) Un elettrone (massa m = 9.0x10^{-31} kg, carica q = - 1.6x10^{-19} C) incide sulla faccia "inferiore" (z=0) della lastra avendo una velocità iniziale di modulo v_0 = 2.0x10^6 m/s diretta nel verso positivo dell'asse Z. Supponendo ragionevolmente che l'elettrone possa penetrare nel materiale della lastra senza "interagire meccanicamente" con esso (cioè trascurando ogni forma di attrito), quanto vale, in modulo, la velocità v con cui esso lascia la faccia "superiore" (z=d) della lastra? [**Trascurate ogni effetto della forza peso** sulla dinamica dell'elettrone]

v = ……………………………….. ~ .... m/s $(v_0^2 - (2q/m)\Delta V)^{1/2}$ ~ 3.7x10^6 m/s [per la conservazione dell'energia, che si applica in assenza di attriti, si ha $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2 + q\Delta V$; fate attenzione al fatto che q < 0, per cui l'elettrone viene accelerato!]

3. Una barretta di sezione S = 1.0 cm^2 e lunghezza L = 10 cm, fatta di materiale conduttore di conducibilità σ_C = 1.6x10^8 (ohm m)$^{-1}$, è collegata come in figura ad un generatore di differenza di potenziale continua V_0 = 10 V. Un campo magnetico **uniforme e costante** di modulo B_0 = 1.0x10^{-2} T diretto nel verso positivo dell'asse Z di figura, agisce sul sistema. Il sistema è in condizioni stazionarie.



a) Sapendo che la densità degli elettroni che formano la corrente è n_e = 1.0x10^{27} elettroni/m^3, qual è la velocità v_X con cui gli elettroni si muovono lungo l'asse X di figura? [Fate approssimazioni ragionevoli sull'uniformità del campo elettrico nella barretta; usate il valore e = 1.6x10^{-19} C per l'unità di carica]

v_X = ... = ... m/s $-j/(n_e e) = -\sigma_C E/(n_e e) = \sigma_C V_0/(L n_e e)$ = 1.0x10^2 m/s [si suppone campo uniforme in direzione X, come atteso in un conduttore omogeneo in condizioni stazionarie e geometria piana; quindi $E = -V_0/L$, dove il segno negativo tiene conto del "segno" della differenza di potenziale]

b) Quanto vale, componente per componente, la forza $\boldsymbol{F}$ che agisce su **uno** degli elettroni che formano la corrente?

F_X = ... = ... N eV_0/L = 1.6x10^{-17} N [è la forza elettrica dovuta al campo determinato nella risposta precedente]

F_Y = ... = ... N $ev_X B_0$ = 1.6x10^{-19} N [è la forza di Lorentz, con segno giusto tenendo conto della geometria del sistema e della regola della mano destra]

F_Z = ... = ... N 0 [non ci sono forze lungo Z]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 23/5/2007 Firma:

FOGLIETTO

$\vec{j} = \rho\vec{v} = ne\vec{v}$ Def. dens. corr.

$\vec{j} = \sigma_C \vec{E} = \frac{1}{\rho_C}\vec{E}$ Dens.corr.in conduttore.

$\sigma_C = \frac{ne^2\tau_C}{m}$ Conducibilità secondo Drude.

$I = \Phi_S(\vec{j}) = \int \vec{j}\cdot\hat{n}dS$ Corrente/dens.corr.

$V = RI$ Legge di Ohm

$W = VI$ Effetto Joule

$Q = CV$ Capacità

$\tau = RC$ Tempo di scarica Condensatore su resistenza

$U_E = CV^2/2$ Energia condensatore

$\vec{F}_E = q\vec{E}$ Def. campo elettrico/forza elettrica

$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ Def. d.d.p.

$\vec{E} = \frac{\kappa_E Q}{r^2}\hat{r}$ Campo in $\boldsymbol{r}$ di carica puntiforme/sferica Q

$d\vec{E} = \frac{\kappa_E dq}{r^2}\hat{r}$ Relazione costitutiva campo el.

Teorema di Gauss $\Phi_{S,chiusa}(\vec{E}) = \int_{S,chiusa}\vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ Circuitazione campo elettrico (statico)

$\vec{F}_M = q\vec{v}\times\vec{B}$ Forza di Lorentz

$d\vec{F}_M = Id\vec{l}\times\vec{B}$ Forza su elemento di filo

$\vec{p}_M = SI\hat{n}$ Momento dipolo magnetico per spira di superficie S e corrente I

$\vec{\tau} = \vec{p}_M \times \vec{B}$ Momento delle forze su spira

$d\vec{B} = \frac{\kappa_B d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ Relazione costitutiva campo magn.

Flusso campo magn. $\Phi_{S,chiusa}(\vec{B}) = \int_{S,chiusa}\vec{B}\cdot\hat{n}dS = 0$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{concat}$ Teor. Ampere (statico).

$\int \xi^n d\xi = \frac{\xi^{n+1}}{n+1}$ (per $n \neq -1$) Integrali

$\int \frac{1}{\xi}d\xi = \ln(\xi)$