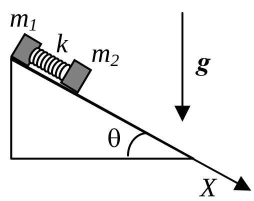
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 18/12/2007

Nome e cognome: ………………………………………………………..   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

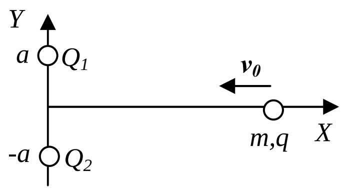
1. Un oggetto puntiforme di massa m è soggetto ad una forza **disomogenea** che agisce sul piano orizzontale XY avendo le seguenti espressioni per le sue due componenti: $F_X(x) = Ax + B$; $F_Y(y) = Ay$, con A e B costanti opportunamente dimensionate. Ad un dato istante l'oggetto passa per l'origine del sistema di riferimento avendo una velocità di **modulo** v_0 con componenti solo sul piano XY. Ad un istante successivo l'oggetto si trova a passare per il punto (del piano) di coordinate x_1, y_1 .
   a) Come si esprime, **in modulo,** la velocità v_1 dell'oggetto in questo punto? [Trascurate ogni possibile forza dissipativa]
   v_1=................................ $((2/m)((A/2)(x_1^2+y_1^2)+Bx_1))^{1/2}$ [per il bilancio energetico deve essere $L = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \Delta E_K$. Ricordando la definizione di prodotto scalare, si ha $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{x1} F_x dx + \int_0^{y1} F_Y dy = (A/2)x_1^2+Bx_1 + (A/2)y_1^2$, da cui la soluzione. Notate che il risultato non cambia se si suppone di calcolare il lavoro nel percorso fatto di due tratti lineari (consecutivi) paralleli rispettivamente alla direzione X e alla direzione Y; infatti la forza è conservativa ed il lavoro non dipende dalla traiettoria]
   b) Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ}, y_{EQ} , se esiste, dell'oggetto sottoposto a tale forza? Commentate sulle caratteristiche dell'eventuale equilibrio (stabile, instabile, indifferente).
   x_{EQ} = …………………………………… $-B/A$
   y_{EQ} = …………………………………… 0
   Commento: .... si ha equilibrio quando $\mathbf{F} = 0$; essendo la forza conservativa, il carattere dell'equilibrio può essere individuato analizzando la funzione "energia potenziale" $U(x,y) = -((A/2)(x^2+y^2)+Bx)$ attorno alla posizione di equilibrio x_1, y_1 , e verificando se la posizione di equilibrio rappresenta un minimo od un massimo, o se la funzione energia non dipende dalla posizione. Questa analisi può essere condotta separatamente per le due coordinate e si ottiene che il tipo di equilibrio dipende dal segno delle costanti A e B

2. Un sistema è costituito da due blocchetti di massa m_1 = 40 g e m_2 = 80 g (ognuno di dimensioni così piccole da poter essere considerato puntiforme) legati assieme da una molla di costante elastica k = 4.0 N/m e lunghezza di riposo **trascurabile**. I due blocchetti possono scorrere con attrito trascurabile sulla superficie di un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale; inizialmente il blocchetto di massa m_1 è tenuto fisso sulla sommità del piano da un chiodo (vedi figura). [Supponete che l'asse della molla resti sempre parallelo al piano inclinato; usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Quanto vale l'elongazione Δ_0 della molla in condizioni di equilibrio?
   Δ_0 = …………………………………… = ……….. m $m_2 g\sin\theta/k = 9.8\text{x}10^{-2}$ m [all'equilibrio la forza elastica bilancia la componente "attiva" della forza peso su m_2]
   b) All'istante t_0 = 0 il chiodo viene rimosso ed il sistema si trova libero di muoversi lungo il piano inclinato. Come si scrivono le equazioni del moto per l'accelerazione del centro di massa, a_{CM} , e per **l'accelerazione relativa**, $a_{REL} = a_2-a_1$? [Considerate un asse di riferimento X parallelo al piano ed orientato verso il basso, come in figura]
   a_{CM} = …………………………………… $g\sin\theta$ [l'equazione del moto del CM recita: $Ma_{CM} = F_{EXT}$, da cui la soluzione]
   a_{REL} = …………………………………… $-k(m_1+m_2)/(m_1m_2))(x_2-x_1)$ [l'equazione del moto relativo recita: $\mu\ a_{REL} = F_{INT}$, con $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$, massa ridotta del sistema. La forza di interazione è quella della molla, che dipende linearmente dall'elongazione, ovvero dalla "distanza" tra i due blocchetti x_2-x_1]

3. Una particella dotata di carica elettrica q e massa m si trova inizialmente nella posizione $x = x_0$, $y = 0$ di un sistema di riferimento (il piano XY è orizzontale). Supponete che x_0 sia così grande da poter essere considerato "infinito" e che la carica q abbia una velocità iniziale v_0 diretta nel verso negativo dell'asse X, come in figura. Due cariche puntiformi $Q_1 = q$ e $Q_2 = q$ (tutte e tre le cariche hanno lo stesso segno e lo stesso valore) si trovano fisse nello spazio nelle posizioni $x_1 = 0$, $y_1 = a$ ed $x_2 = 0$, $y_2 = -a$, con $a << x_0$. Si osserva che, ad un dato istante,



successivo a quello iniziale, la particella q si arresta momentaneamente.
[Trascurate gli effetti della forza peso ed ogni causa dissipativa]

a) Come si esprime la differenza di potenziale elettrico ΔV tra la posizione iniziale della particella e la posizione in cui essa si arresta?
$\Delta V =$ …………………………………… $(m/2)v_0^2/q$ [poiché sulla particella non agiscono forze dissipative, l'energia meccanica si conserva, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$, dove ΔU è la differenza di energia potenziale della particella stessa nelle posizioni "finale" (quando si ferma) ed "iniziale" (quando si trova a grandissima distanza dalle cariche Q_1 e Q_2). L'unica energia potenziale in gioco è quella dovuta al campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, e quindi, per definizione di differenza di potenziale, si ha $\Delta U = q\Delta V$; inoltre $\Delta E_K = 0-(m/2)v_0^2$, da cui la soluzione]

b) Come si esprime la coordinata x' del punto di arresto della particella?
$x' =$ …………………………………… $((2\kappa q/(mv_0^2)^2-a^2)^{1/2}$ [sulla base di quanto affermato sopra, deve essere $-\Delta E_K/q = \Delta V$. La differenza di potenziale è dovuta al campo delle dua cariche Q_1 e Q_2, cioè, ricordando che i potenziali, come le energie, si sommano algebricamente come scalari, si ha $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, con ovvio significato dei pedici. Considerando il campo di una carica puntiforme, è facile scrivere: $\Delta V_1 = -\kappa Q_1(1/x_0 - 1/(x'^2+a^2)^{1/2}) = \kappa Q_1/(x'^2+a^2)^{1/2}$, passaggio dovuto al fatto che x_0 può essere considerato matematicamente "infinito". Il calcolo per ΔV_2 porta a $\Delta V_2 = \kappa Q_2/(x'^2+a^2)^{1/2}$, cioè, essendo le cariche di ugual valore (q) e segno, le due differenze di potenziale sono uguali. Riarrangiando si ottiene la soluzione, dove si suppone che i dati del problema, in accordo con la descrizione del testo, garantiscano che l'argomento della radice quadrata sia positivo, cioè che la coordinata x' sia reale! Se non ricordate l'espressione della differenza di potenziale per il campo creato da una carica puntiforme q posta, ad esempio, nella posizione $(0,a)$ (si tratta della carica Q_1, per la Q_2 si ottiene lo stesso risultato), potete facilmente calcolarla in questo modo: $\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{x0}^{x'} E_x dx = -\int_{x0}^{x'} (\kappa q/(x^2+a^2)) \cos\theta \, dx = -\kappa q \int_{x0}^{x'} 1/(x^2+a^2)^{3/2} x \, dx = -(\kappa q/2) \int_{\xi 0}^{\xi'} \xi^{-3/2} d\xi$, dove abbiamo: scelto per il calcolo del lavoro uno spostamento lungo l'asse X (essendo il campo conservativo, non dipende dalla traiettoria!); trovato la componente X del campo (necessaria: ricordate che l'espressione del lavoro contiene un prodotto scalare!) moltiplicandone il modulo per il coseno dell'angolo θ compreso tra l'asse X e la conginungente tra la posizione della carica ed il punto (generico!) dell'asse X considerato nell'integrale; espresso questo $\cos\theta$ come $x/(x^2+a^2)^{1/2}$, come ci suggersice la trigonometria (ovviamente l'angolo cambia mano a mano che si compie l'integrazione, ed infatti dipende da x); eseguito il cambio di variabile $\xi = (x^2+a^2)$ e notato che $xdx = d\xi/2$. L'integrale si può facilmente calcolare tra gli estremi $\xi_0=(x_0^2+a^2)$ e $\xi' = (x'^2+a^2)$, ottenendo infine: $\Delta V = -(\kappa q/2)\, \xi^{-1/2}/(-1/2) = \kappa q(\xi'^{-1/2}-\xi_0^{-1/2}) = \kappa q(1/(x'^2+a^2)^{1/2}-1/(x_0^2+a^2)^{1/2}) = \kappa q(1/(x'^2+a^2)^{1/2})$, dove abbiamo usato il fatto che x_0 è "infinito", cioè si ottiene proprio l'espressione che abbiamo prima usato e che potevate anche ricordare]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 18/12/2007 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 18/12/2007

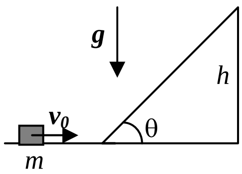
Nome e cognome: ……………………………………………………… **Matricola: ……………**

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Una particella dotata di carica q e massa m è sottoposta all'azione di un campo elettrico **disomogeneo** diretto lungo l'asse X che dipende dalla posizione x secondo la legge: $E = Ax^2+Bx+C$, con A, B, C costanti opportunamente dimensionate. All'istante $t_0 = 0$ la particella passa per il punto $x_0 = 0$ con una velocità v_0 diretta lungo l'asse X; ad un istante successivo la particella passa per la posizione x_1.
   a) Come si scrive il **modulo** della velocità v_1 che la particella possiede quando passa per x_1? [Trascurate ogni eventuale forza dissipativa]
   v_1=……………………………… $(v_0^2+(2q/m)((A/3)x_1^3+(B/2)x_1^2+Cx_1))^{1/2}$ [per la conservazione dell'energia meccanica deve essere $0 = \Delta E_K+\Delta U_E = (m/2)(v_1^2-v_0^2) - L_E$, con $L_E = \int_{x0}^{x1} Edx = (A/3)x_1^3+(B/2)x_1^2+Cx_1$, da cui la soluzione]

   b) Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ} per la particella (se esiste)? Commentate **brevemente** sul carattere dell'eventuale equilibrio.
   x_{EQ}=……………………………… $(-B \pm (B^2 -4AC)^{1/2})/(2A)$
   Commento:……………………………… si ha equilibrio quando $F = qE = 0$; la posizione di equilibrio esiste ed è unica per $B^2=4AC$; esistono due posizioni di equilibrio per $B^2>4AC$, altrimenti l'equilibrio non è possibile. Il carattere dell'equilibrio dipende dall'andamento della funzione "energia" potenziale $U(x) = -q\int Edx$, in particolare dal fatto che la posizione di equilibrio rappresenti o meno un minimo di energia. La risposta dipende dal segno e dal valore delle costanti A, B, C, come si può verificare facilmente (ma non è richiesto di fare!) studiando l'andamento della funzione

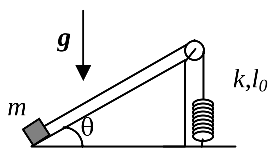
2. Una piccola cassa di massa m = 5.0 kg scivola senza attrito su una superficie piana ed orizzontale, avendo una velocità iniziale **di modulo** v_0 = 5.0 m/s orientata e diretta come in figura. Nel suo movimento, la cassa incontra una salita, rappresentata da un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto all'orizzontale. La superficie del piano presenta **attrito trascurabile**, e l'altezza del piano vale h = 1.0 m. Si osserva che la cassa sale lungo il piano fino a raggiungerne la sommità. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e trascurate ogni forza dissipativa]



   a) Quanto vale, in **modulo**, la velocità v della cassa nell'istante in cui la cassa raggiunge la sommità del piano?
   v = …………………………….. ~ .... m/s $(v_0^2-2gh)^{1/2}$ ~ 2.3 m/s [per la conservazione dell'energia meccanica, che vale essendo trascurabili le forze dissipative]

   b) Come cambia la soluzione al punto precedente se si suppone che il piano inclinato sia ricavato da un blocco di massa $M = m$ in grado di **scivolare** con attrito trascurabile in direzione orizzontale? Commentate e cercate di determinare la velocità che la cassa ha quando (e se) raggiunge la sommità del piano inclinato in queste nuove condizioni. [Considerate il blocco inizialmente fermo]
   Commento: ....……………………………… essendo il blocco mobile, ci si aspetta che esso si metta in movimento a causa dell'"interazione" con la cassa. Nella conservazione dell'energia compare allora un nuovo termine $\Delta E_K' = (M/2)V^2$, dovuto all'energia cinetica acquistata dal blocco in movimento, cioè si ha: $0 = \Delta E_K + \Delta E_K' + \Delta U_G = (m/2)v^2+(M/2)V^2+mgh$; di conseguenza compare una nuova incognita, V, che è la velocità (ovviamente in direzione orizzontale, il blocco si può muovere solo in questa direzione!) del blocco quando la cassa raggiunge la sommità del piano, se la raggiunge. Per determinare V si può osservare che il sistema cassa+blocco è isolato in direzione orizzontale, per cui si deve conservare la quantità di moto totale del sistema in questa direzione, cioè: $\Delta p_X = 0$. Inizialmente, potendo considerare il blocco fermo, si ha $p_{X0}=mv_0$. All'istante finale si ha invece: $p_X = MV + mv_X = MV + mv\cos\theta$ (occorre infatti proiettare la velocità $\boldsymbol{v}$ della cassa in direzione X moltiplicando per $\cos\theta$). La conservazione dell'energia meccanica unita alla conservazione della quantità di moto lungo X consente di scrivere un sistema di due equazioni e due incognite (v e V). Tenendo conto del fatto che $M=m$ e che $\cos\theta = 1/2^{1/2}$, si ottiene questa equazione di secondo grado per v: $(3/2)v^2-v(v_0 2^{1/2})+2gh = 0$. La soluzione fornirebbe il valore di v cercato (a patto che la velocità iniziale fosse sufficientemente grande da dare luogo a soluzioni reali!)

3. Una cassa di massa m = 2.0 kg può scivolare con attrito trascurabile sulla superficie di un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Alla cassa è



attaccata una fune instensibile e di massa trascurabile che, dopo essere passata per la gola di una puleggia di massa trascurabile, termina all'estremità di una molla di costante elastica k = 50 N/m e lunghezza di riposo l_0 = 50 cm. L'altro estremo della molla è fissato su un pavimento rigido ed indeformabile secondo lo schema indicato in figura. Inizialmente la cassa è tenuta ferma alla base del piano inclinato da un chiodo; corrispondentemente, la lunghezza della molla è l_I = 1.0 m. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e trascurate ogni forza dissipativa]

a) All'istante t_0 = 0 il chiodo viene rimosso e la cassa comincia a risalire lungo il piano, fino ad arrestarsi dopo aver percorso una distanza pari ad L. Quanto vale L?

L = …………………………….. = ... m $2(l_1-l_0)-2(mg/k)\sin\theta$ = 0.61 m [nel problema sono presenti solo forze conservative, per cui si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_{ela} = 0 + mgL\sin\theta + (k/2)(l'-l_0)^2-(k/2)(l_1-l_0)^2$, dove abbiamo indicato con $L\sin\theta$ la variazione di quota della cassa, usato la relazione $U_{ela}=(k/2)(l-l_0)^2$, valida per esprimere l'energia potenziale della molla per una lunghezza l generica, e con l' la lunghezza della molla quando la cassa si ferma (ovviamente $\Delta E_K = 0$ poiché la cassa è ferma sia all'inizio che alla "fine" del processo!). Essendo la fune inestensibile, deve anche essere $l_1-l' = L$, cioè $l'=l_1-L$. Si ottiene quindi: $0 = mgL\sin\theta + (k/2)((l_1-L-l_0)^2-(l_1-l_0)^2)= mgL\sin\theta + (k/2)L(L-2l_1+2l_0)$, da cui la soluzione]

b) A quale istante t' la cassa si arresta?

t' = …………………………… = ... s $T/2= \pi/(k/m)^{1/2}$ = 0.63 s [essendo presente una forza elastica, è facile verificare che il moto è periodico. Infatti, scelto un asse parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso, l'equazione del moto si scrive: $a = g\sin\theta - (k/m)(x-l_0)$. Osservate che questa equazione è la stessa che si avrebbe se la molla fosse fissata alla sommità del piano: infatti la presenza della puleggia (di massa e attrito trascurabili!) non modifica il problema, ed in pratica è come se prendessimo un riferimento, centrato sul pavimento, che segue la direzione della fune (la lunghezza della fune è irrilevante, e può essere posta pari a zero). Questa equazione del moto ha una soluzione oscillatoria con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$ Per rispondere alla domanda è sufficiente notare che, come in ogni moto oscillatorio, la massa si arresta dopo un intervallo pari a metà del periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega$]

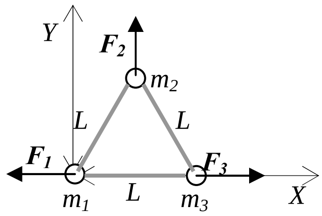
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 18/12/2007 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 18/12/2007

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Tre masse puntiformi, m_1 , m_2, m_3 , sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato L essendo collegate tra loro da asticelle rigide di massa trascurabile. All'istante t_0 = 0 il sistema si trova su un piano **orizzontale** rigido XY nella configurazione rappresentata in figura (la massa m_1 si trova nell'origine del sistema); il sistema può muoversi sul piano con attrito trascurabile. Sulle tre masse agiscono tre forze **uniformi e costanti** di identico modulo F, ma orientazione diversa: $\boldsymbol{F_1}$ è diretta nel verso negativo dell'asse X, $\boldsymbol{F_2}$ nel verso positivo dell'asse Y, $\boldsymbol{F_3}$ nel verso positivo dell'asse X. [Trascurate ogni forza dissipativa]



a) Come si scrive la **legge oraria del moto** del centro di massa del sistema, $x_{CM}(t)$, $y_{CM}(t)$? [Esprimetela in funzione dei dati noti del problema]

$x_{CM}(t)$ = …………………………….. $x_{CM0} = L(m_2/2+m_3)/(m_1+m_2+m_3)$

$y_{CM}(t)$ = …………………………….. y_{CM0} + $Ft^2/(2(m_1+m_2+m_3)=(Lm_2 3^{1/2}+Ft^2)(2/(m_1+m_2+m_3))$

[l'equazione del moto del centro di massa recita: $\boldsymbol{a_{CM}} = \Sigma \boldsymbol{F} / M$, con $M = (m_1 + m_2 + m_3)$. Nella somma vettoriale delle forze, a causa dell'orientazione e verso, resta la sola forza $\boldsymbol{F_2}$, costante, uniforme e diretta lungo Y. Dunque il CM si sposterà di moto uniformemente accelerato lungo questa direzione. Per determinare la legge oraria, oltre a conoscere la velocità "iniziale" $\boldsymbol{v_{CM0}}$, che per semplicità supponiamo nulla, occorre anche determinare la posizione iniziale del centro di massa attraverso la definizione: $\boldsymbol{r_{CM}} = (m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2} + m_3\boldsymbol{r_3})/M$, da cui, tenendo conto della posizione delle masse e usando un po' di goniometria: $x_{CM0} = L(m_2/2 + m_3)/(m_1+m_2+m_3)$ e $y_{CM0}=L(m_2 3^{1/2}/2)/(m_1+m_2+m_3)$]

b) Come si scrive il lavoro complessivo $L(t)$ fatto da **tutte le forze** nell'intervallo di tempo fra t_0 ed un istante t generico?

$L(t)$= .... $((m_1+m_2+m_3)/2)(a_{CM}{}^2t^2) = F^2t^2/(2(m_1+m_2+m_3))$ [pociché sul sistema agiscono solo le forze $\boldsymbol{F_i}$ date, deve essere $L(t) = (M/2)v_{CM}{}^2 – (M/2)v_0{}^2$. Supponendo per semplicità nulla la velocità iniziale del sistema, si ha semplicemente $v_{CM}(t) = a_{CM}t = Ft/M$, da cui la soluzione (notate che, essendo il moto solo in direzione Y, è possibile "trascurare" la natura vettoriale della velocità e "confondere" componente con modulo). Allo stesso risultato si può giungere anche considerando la definizione di lavoro ed usando la legge oraria della velocità, con un approccio che però è più laborioso]

2. Un sistema è costituito da due blocchetti di massa m_1 = 40 g e m_2 = 80 g (ognuno di dimensioni così piccole da poter essere considerato puntiforme) legati assieme da una molla di costante elastica k = 4.0 N/m e lunghezza di riposo l_0 = 10 cm. I due blocchetti possono scorrere con **attrito trascurabile** sulla superficie di un piano rigido **orizzontale**. All'istante t_0 = 0 si osserva che i due blocchetti viaggiano con pari velocità diretta nel verso positivo dell'asse X e di modulo v_0 = 0.50 m/s; allo stesso istante, le coordinate X delle posizioni dei due blocchetti sono x_{10} = 0 e x_{20} = 20 cm. [Ovviamente il moto va considerato come unidimensionale]

a) Nell'evoluzione successiva del sistema, si osserva che ad un certo istante t' la lunghezza della molla assume il valore di riposo l_0. Quanto vale l'istante t'?

t' = …………………………………… ~ ………… s $\pi/(2(k/\mu)^{1/2})=(\pi/2)(m_1m_2/(k(m_1+m_2))^{1/2}$ ~ 0.13 s

[quando la molla cambia la sua lunghezza, significa che i blocchetti hanno cambiato la loro distanza, cioè che essi hanno mutato la loro posizione relativa. Dunque l'evoluzione della lunghezza della molla dipende dalla forza elastica di interazione tra i due blocchetti, che è una forza interna. L'equazione del moto relativo per un sistema di due corpi recita: $a_{REL} = a_2-a_1 = F_{INT}/\mu$, con $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$, massa ridotta del sistema. È facile verificare che $F_{INT} = -k(x_2-x_1-l_0) = -k(x_2-x_1)+kl_0$. Tenendo conto che l'accelerazione relativa è la derivata seconda rispetto al tempo della "distanza" (x_2-x_1),si vede facilmente che quella che abbiamo scritto è un'equazione differenziale (per il moto relativo) che ha soluzione oscillatoria con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2} = ((m_1+m_2)k/(m_1m_2))^{1/2}$. All'istante iniziale considerato la velocità relativa (v_2-v_1) è nulla, mentre la molla si trova allungata del tratto $(x_{20}-x_{10}-l_0)$. Il problema è allora analogo a quello di un oscillatore armonico che viene lasciato andare (da fermo) da una certa posizione iniziale. La lunghezza di riposo viene raggiunta dopo un intervallo pari a $T/4$ con $T = 2\pi/\omega$ periodo dell'oscillazione]

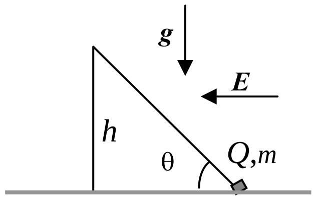
b) Quanto valgono le velocità v_1' ed v_2' dei due blocchetti all'istante t'? [Il calcolo può essere complicato! Cercate almeno di discutere il metodo che conduce alla soluzione]

v'_1 = …………………………………… ~ .... m/s $3v_0-2v'_2$ ~ 1.3 m/s

v'_2 = …………………………………… ~ .... m/s $v_0 - \Delta_0\,(k/6)^{1/2}$ ~ 0.42 m/s [in linea di principio, questa soluzione potrebbe essere determinata usando la legge oraria del moto relativo, che, come appena stabilito, è armonico. Tuttavia questa strada è poco percorribile a causa della complicazione algebrica delle espressioni. Conviene allora ragionare in termini di conservazione dell'energia meccanica (sul sistema non agiscono forze dissipative) e della quantità di moto (il sistema è isolato essendo la forza elastica una forza interna al sistema stesso). Si ha quindi: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ela} = (m_1/2)v'_1{}^2+(m_2/2)v'_2{}^2-((m_1+m_2)/2)v_0{}^2 +0-(k/2)(x_{20}-x_{10}-l_0)^2$, e $m_1v'_1+m_2v'_2=(m_1+m_2)v_0$ Potete facilmente riconoscere che queste equazioni sono molto simili a quelle che descrivono un urto anelastico, o una frammentazione; infatti quando la lunghezza della molla è pari a quella di riposo si ha che tutta l'energia elastica "inizialmente" immagazzinata nella molla è stata "trasferita" in energia cinetica dei componenti del sistema. Per la soluzione è conveniente notare che $m_2=2m_1$. Posto $\Delta_0 = (x_2-x_0-l_0)$, si ha allora questo sistema di due equazioni per le due incognite v'_1 e

v'_2: $v'^2_1+2v'^2_2-3v_0^2-k\Delta_0^2 = 0$ e $v'_1+2v'_2=3v_0$. Risolvendo si ottiene la soluzione, dove si è anche fatta una scelta "logica" per il doppio segno che esce dalla soluzione dell'equazione di secondo grado, supponendo che, in seguito al ritorno della molla nella sua posizone iniziale, m_2 diminuisca la sua velocità (ed m_1 la aumenti)]

3. Un oggetto puntiforme di massa m = 10 g dotato di carica elettrica $Q = 1.0\text{x}10^{-5}$ C si trova inizialmente fermo alla base di un piano inclinato di altezza h = 20 cm che forma un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto all'orizzontale. All'istante $t_0 = 0$ viene acceso istantaneamente un campo elettrico **uniforme e costante** che ha modulo E (incognito) ed è diretto orizzontalmente con il verso indicato in figura. Per effetto del campo elettrico l'oggetto risale lungo il piano inclinato e si osserva che esso arriva alla sommità essendo dotato di una velocità che vale, in **modulo**, v' = 40 cm/s. [Trascurate ogni forza dissipativa ed usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale, in modulo, il campo elettrico E?

E = …………………………….. = ... N/C $((m/2)v'^2+mgh)/(Qh) = 1.0\text{x}10^4$ N/C [per la conservazione dell'energia meccanica deve essere: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G + \Delta U_E = (m/2)v'^2+mgh-qEh$, dove abbiamo notato che la variazione di energia potenziale elettrica vale $\Delta U_E = -L_E = - \int \mathbf{F_E}\cdot \mathbf{ds} = - \int qEdx = -qE\int dx = -qEh$ (il piano inclinato è un triangolo isoscele e lo spostamento orizzontale, che è quello rilevante per il calcolo del lavoro del campo, che è orizzontale, è pari all'altezza del piano). Uguagliando si trova la soluzione]

b) Dopo aver lasciato la sommità del piano, l'oggetto prosegue nel suo moto salendo verso l'alto fino ad una certa quota h_{MAX} (misurata rispetto al "suolo"). Quanto vale h_{MAX}?

h_{MAX} = …………………………….. = ... m $h + v'^2\sin^2\theta/(2g) = 2.0\text{x}10^{-1} + 4.1\text{x}10^{-3}$ m $= 2.0\text{x}10^{-1}$ m [si ottiene risolvendo le equazioni del moto dell'oggetto sottoposto alla accelerazione di gravità; come si vede, l'altezza massima è praticamente coincidente con quella del piano inclinato, vista la ridotta velocità con cui l'oggetto arriva alla sua sommità]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/12/2007 Firma: