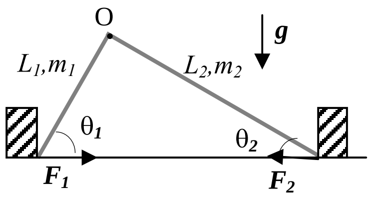
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 2/4/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un elemento di copertura di un edificio (tetto!) può essere schematizzato come costituito da due travi **rigide ed omogenee**, di lunghezza e massa rispettivamente m_1 = 100 kg, L_1 = 5.0 m , m_2 = 300 kg, L_2 = 8.7 m. Due estremità delle travi sono imperniate fra di loro, in modo da poter ruotare con attrito trascurabile attorno ad un asse passante per il punto O di figura. Nelle condizioni di lavoro le due travi formano gli angoli $\theta_1 = \pi/3$ e $\theta_2 = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, essendo mantenute in questa configurazione da due muretti verticali, rigidi ed indeformabili, che nascono dal suolo (piano, rigido ed indeformabile): le travi si appoggiano infatti a questi muretti. [Supponete trascurabili le forze di attrito tra travi e superficie orizzontale di appoggio e tra travi e muretti; usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $cos(\pi/3) = sin(\pi/6)$ = ½ e $cos(\pi/6) = sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



a) Quanto valgono **in modulo** le forze $\boldsymbol{F_1}$ ed $\boldsymbol{F_2}$ indicate in figura? [Si tratta delle forze (**orizzontali**!) che agiscono sulle estremità delle due travi nei punti in cui esse sono in contatto con i muretti]

$|\boldsymbol{F_1}|$ =................................ ~ .... N $(3^{1/2}\, g\, (m_1+m_2)/8) \sim 8.5\text{x}10^2$ N [per l'equilibrio traslazionale in direzione orizzontale dell'intero sistema deve essere, per i moduli, $F_1 = F_2$, dato che queste sono le uniche forze orizzontali che agiscono sul sistema delle due travi. Per l'equilibrio traslazionale dell'intero sistema in direzione verticale si ha $N_1+N_2 = m_1g + m_2g$. Consideriamo ora l'equilibrio rotazionale della sola trave 1 rispetto al polo O (la scelta del polo è arbitraria dato che cerchiamo la condizione di equilibrio, e scegliendo il polo O possiamo evitare di considerare le forze che il perno esercita sulla trave). Considerando i moduli, deve essere: $m_1g(L_1/2)cos\theta_1 + F_1L_1sin\theta_1 = N_1L_1cos\theta_1$, dove N_1 è il modulo della reazione vincolare (**verticale**!) che il suolo esercita sulla trave 1; con un po' di algebra si ottiene facilmente $F_1 = N_1 - m_1g/(2tg\theta_1)$.. Per la trave 2 si avrà analogamente $m_2g(L_2/2)cos\theta_2 + F_2L_2sin\theta_2 = N_2L_2cos\theta_2$ da cui $F_2 = N_2 - m_2g/(2tg\theta_2)$. Si ha quindi un sistema di quattro equazioni con quattro incognite (F_1, F_2, N_1, N_2) la cui soluzione per F_1 porta al risultato indicato]

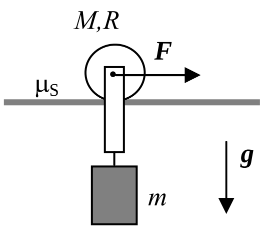
$|\boldsymbol{F_2}|$ =................................ ~ .... N $|\boldsymbol{F_1}| \sim 8.5\text{x}10^2$ N [vedi sopra]

b) Quanto valgono le componenti orizzontali e verticali, rispettivamente $F_{O,hor}$ e $F_{O,ver}$, della forza esercitata dalla trave 1 sulla trave 2 nel punto O? [La forza viene chiaramente trasferita dal perno che vincola una trave sull'altra (pur pemettendone, ovviamente, la rotazione!)]

$F_{O,hor}$ = …………………………………… ~ .... N $F_2 \sim 8.5\text{x}10^2$ N [per l'equilibrio traslazionale della sola trave 2 deve essere $\boldsymbol{F_O} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{N_2} + m_2\boldsymbol{g} = 0$. Poiché l'unica forza orizzontale è $\boldsymbol{F_2}$ si ottiene il risultato, dove il segno positivo indica che ci si riferisce ad un asse orientato verso la destra in figura]

$F_{O,ver}$ = …………………………………… = ... N $m_2g - N_2 = m_2g-(F_2tg\theta_2 + m_2g/2) = m_2g/2 - (m_1+m_2)g/8 = g(3m_2-m_1)/8 = 9.8\text{x}10^2$ N [vedi sopra; il segno si riferisce ad un riferimento orientato verso l'alto ed il valore di N_2 si ottiene facilmente come risultato intermedio nella soluzione del punto precedente]

2. Un "carro ponte" è costituito da un cilindro **omogeneo** di raggio R = 50 cm e massa M = 2.0x10^2 kg che può ruotare con attrito trascurabile attorno al suo asse. Un giogo di massa trascurabile attaccato all'asse del cilindro permette di appendere al cilindro stesso un peso m. Il binario (sospeso) su cui scorre il cilindro è rigido ed indeformabile e disposto in direzione orizzontale; si sa che esso presenta un coefficiente di attrito statico μ_s (incognito). Il movimento del cilindro è assicurato da una forza $\boldsymbol{F}$ costante ed uniforme di direzione orizzontale e modulo F = 1.0x10^4 N applicata al giogo come in figura. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Sapendo che per m = 500 kg il cilindro si muove di **rotolamento puro,** quanto deve valere, **al minimo**, il coefficiente di attrito $\mu_{S,MIN}$?

$\mu_{S,MIN}$ …………………………………… = ……….. $F\,M\,/\,(g(m+M)(2m+3M)) = 0.18$ [l'equazione del moto di traslazione orizzontale (del centro di massa, ma anche di ogni punto che è solidale al giogo!) è $a_{CM}=(F - F_A)/(m+M)$, dove si è tenuto conto della massa totale del sistema, $m+M$. L'equazione del moto di rotazione è $\alpha = F_AR/I$ con F_A forza di attrito statico tra binario e cilindro. I rappresenta il momento di inerzia del sistema che si trova in rotazione. Attenzione: se si escludono moti di "sbandieramento" del giogo (come ragionevole, non essendoci cause fisiche che li possano determinare, come attriti o forze con momento non nullo rispetto all'asse diverse dall'attrito statico), il sistema che si trova in rotazione è solo il cilindto. Quindi, I è il momento di inerzia del solo cilindro, cioè $I = MR^2/2$. Per il rotolamento puro deve anche essere $\alpha = a_{CM}/R$; riarrangiando le equazioni si ottiene $F_A = F\ M/(2m+3M)$. D'altra parte deve anche essere $F_A \le \mu_S\ (m+M)g$, da cui il risultato]

b) Supponendo che inizialmente il sistema sia fermo e che l'operatore che fornisce la forza $\boldsymbol{F}$ esegua un lavoro $L = 1.6\text{x}10^5$ J, quanto vale la velocità v che il carro ponte raggiunge (cioè la velocità del centro di massa del cilindro)? [Supponete che il moto avvenga nelle condizioni di rotolamento puro stabilite al punto precedente]

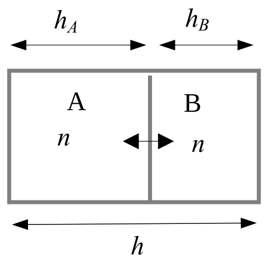
v = ... = ... m/s $2(L/(2m+3M))^{1/2}$ = 20 m/s [per il bilancio energetico, sapendo che non c'è dissipazione in energia dato che l'attrito è di tipo statico, si ha $L = \Delta E_K$, dove abbiamo anche usato il fatto che non c'è variazione di energia potenziale di alcun genere. D'altra parte, essendo il sistema inizialmente fermo, $\Delta E_K = (m+M)v^2/2 + (I/2)\omega^2$, con $\omega = v/R$ ed $I = (M/2)R^2$, da cui la soluzione]

3. Un omino (supposto puntiforme!) di massa m = 80 kg si trova fermo al centro di un disco di raggio R = 5.0 m e massa $M = 8.0\text{x}10^2$ kg, in grado di ruotare con attrito trascurabile attorno al suo asse (la superficie del disco è orizzontale) ed inizialmente fermo. Ad un dato istante, un motore di **potenza costante** P = 0.50 kW mette in rotazione il disco (in questa fase l'omino rimane immobile al centro del disco). Dopo un intervallo Δt = 10 s il motore viene disaccoppiato dall'asse del disco, che quindi rimane libero di ruotare "in folle" con attrito trascurabile. A questo punto l'omino decide di spostarsi verso il bordo del disco.

a) Quanto vale la velocità angolare ω' del disco quando l'omino ne ha raggiunto il bordo?

ω' = ... = ... rad/s $(2P\Delta tI)^{1/2}/I'$ = 0.83 rad/s [l'omino si sposta verso il bordo del disco per effetto di forze **interne** al sistema omino+disco, che quindi risulta isolato rispetto ai momenti di forza calcolati rispetto all'asse. Si itende infatti che sull'asse che, oltre a fornire la rotazione, mantiene il disco in posizione orizzontale agiscano forze di reazione vincolare che bilanciano le forze peso. Dunque il momento angolare complessivo del sistema si conserva, per cui, detti I ed I' i momenti di inerzia all'"inizio" (omino al centro) e alla "fine" (omino al bordo del processo), calcolati rispetto all'asse del disco, si ha: $I\omega = I'\omega'$. La velocità angolare iniziale ω si calcola attraverso un bilancio energetico: $P\ \Delta t = (I/2)\ \omega^2$. Per il calcolo dei momenti di inerzia, inzialmente si ha $I = (M/2)R^2$ ("conta" solo l'inerzia del disco, essendo l'omino al centro) e alla fine si ha $I' = (M/2)R^2+mR^2$, essendo l'ultimo termine della somma il momento di inerzia dell'omino rispetto all'asse]

4. Avete un recipiente cilindrico, con pareti rigide ed indeformabili ricoperte da un materiale isolante termico, che ha area di base $S = 8.31\ \text{cm}^2$ e lunghezza h=20.0 cm. Il recipiente è diviso in due da una parete mobile circolare di spessore trascurabile, che può muoversi con attrito trascurabile in direzione orizzontale, come rappresentato in figura. La parete mobile, che è anche fatta di **materiale termicamente isolante**, divide dunque il recipiente in due parti, di lunghezza iniziale rispettivamente h_{A0} e h_{B0}. In entrambi le parti del recipiente si trova la stessa quantità $n = 2.00\text{x}10^{-2}$ moli di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto. Inizialmente il sistema è in equilibrio alla temperatura, **unica** in tutte le parti del recipiente, T_0 = 300 K. [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti; ricordate che per un gas perfetto monoatomico si ha $c_V = (3/2)R$]



Disegno non in scala!!!

a) Quanto valgono le pressioni P_{A0} e P_{B0} del gas nelle due parti del recipiente?

P_{A0} = ... = ... Pa $2nRT_0/(Sh) = 6.00\text{x}10^5$ Pa [all'equilibrio la pressione del gas deve essere la stessa nelle due parti, per cui, di fatto, è come se una quantità $2n$ moli di gas perfetto si trovasse in un volume $V_0 = Sh$ (la parete ha spessore trascurabile), ovvero $h_{A0}=h_{b0}=h/2$. Quindi $P_{A0} = P_{B0} = 2nRT_0/(Sh)$]

P_{B0} = ... = ... Pa $P_{A0} = 6.00\text{x}10^5$ Pa [vedi sopra]

b) L'isolante termico viene rimosso da una delle superfici "di base" del recipiente (quella di sinistra in figura, a contatto con il gas che si trova nella parte A), e questa superficie viene quindi messa in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura maggiore di T_0. Si osserva che la parete si sposta verso la destra della figura finché la lunghezza della parte A non diventa $h_A' = (3/2)h_{A0}$. Quanto valgono la pressione P_B e la temperatura T_B del gas che si trova nella parte B in questa nuova condizione di equilibrio? [Supponete che la trasformazione considerata avvenga molto lentamente, cioè proceda "per stati di equilibrio" può servirvi ricordare che $4^{1/3} \sim 1.59$]

P_B = ... ~ .... Pa $P_{B0}(V_{B0}/V_B)^\gamma = P_{B0}(h_{B0}/h_B')^\gamma = P_{B0}((h/2)/(h/4))^{5/3} = P_{B0}2^{5/3} \sim 19.0\text{x}10^5$ Pa [nello stato iniziale si ha, ovviamente, $h_{A0} = h_{B0} = h/2$. Alla fine della trasformazione è invece $h_B' = h - h_A' = h- (3/2)h_{A0} = h/4$. Poiché la parete mobile e le altre pareti del recipiente sono tutte isolanti termicamente, la trasformazione del gas nella parte B è un'adiabatica reversibile (dato che procede per stati di equilibrio). La soluzione si ottiene applicando la legge delle adiabatiche reversibili, $PV^\gamma = cost.$]

T_B = ... ~ .... K $P_BSh_B'/(nR) = T_0(h_{B0}/h_B')^{\gamma-1} = T_0 2^{2/3} \sim 476$ K

c) Quanto vale il calore Q fornito dalla sorgente al sistema nella trasformazione? [Commentate bene questa risposta!]

Q = …………………………………… ~ .... J $nc_V(4T_B - 2T_0) \sim 3.25\text{x}10^2$ J [essendo la parete mobile isolante, il calore Q viene assorbito dal solo gas nella parte A. Si ha quindi $Q = Q_A = L_A + \Delta U_A$. Dato che le pareti del recipiente sono indeformabili, deve essere $L_{TOT} = L_A + L_B = 0$, cioè $L_A = -L_B = \Delta U_B = nc_V(T_B\text{-}T_0)$, dove abbiamo sfruttato la circostanza che la trasformazione del gas in B è un'adiabatica e quindi $L_B = -\Delta U_B$. Inoltre $\Delta U_A = nc_V(T_A\text{-}T_0)$. La temperatura T_A si ottiene considerando lo stato di equilibrio finale; deve infatti essere $T_A = P_AV_A/(nR) = (P_BV_B/(nR))\ h_A'/h_B' = 3T_B$ Combinando le varie equazioni si ottiene il risultato]

Commento: ……………………………………......... vedi sopra

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 2/4/2008 Firma:

FOGLIETTO

Densità di massa: $\rho_m = \dfrac{dm}{dV}$

Eq. Moto rot.: $\alpha = \Sigma\tau / I$

CM: $\vec{r}_{CM} = \int \vec{r}dm$

Mom. Inerzia (discr.): $I = \Sigma m_i r_i^2$

Teo. Assi par.: $I = I_{CM} + MD^2$

Eq.moto trasl.: $\vec{a} = \Sigma\vec{F} / M$

Mom. Inerzia (cont.): $I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho_m dV$

Mom. Ang (part. Sing.).: $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$

gas perf.: $PV = nRT$

En. Cin. Rot.: $E_{k,rot} = I\omega^2 / 2$

Mom. Ang. (corpo rig.): $L = I\omega$

adiab. Rev.: PV^γ =cost, con $\gamma = c_P/c_V$ e $c_P = c_V + R$

Mom. Forza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Cons. Mom. Ang.: $\dfrac{dL}{dt} = \Sigma\tau$

I princ. Term. $Q = L + \Delta U$

Efficienza macch. Termica: $\eta = L/Q_{ASS}$

Eff. Frigo: $\eta_F = Q_{ASS}/|L|$

Eff. Carnot: $\eta_C = 1 - T_1/T_2$