A

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 21/11/2008

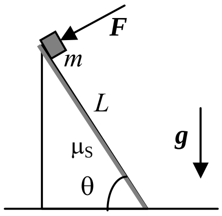
Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano orizzontale XY seguendo una traiettoria circolare di raggio (costante) R = 50 cm. All'istante t_0 = 0 l'oggetto si trova a passare per la posizione di coordinate cartesiane $x_0 = R$, y_0 = 0 con velocità di componenti cartesiane v_{0X} = 0 e $v_{0Y} = v_0$ = 2.0 m/s. Si sa che il moto avviene con accelerazione **angolare costante ed uniforme** α (incognita) e che il punto ripassa per la posizione iniziale all'istante t' = 500 ms. [Si intende che l'accelerazione angolare è misurata rispetto ad un riferimento polare con origine coincidente con quella del riferimento cartesiano; inoltre la coordinata angolare del riferimento polare si intende misurata rispetto alla direzione dell'asse X, come di consueto]
   a) Quanto vale l'accelerazione angolare α?
   α = …………………………………… = ……… rad/s^2 $4\pi/t'^2-2v_0/(Rt')$ = 34 rad/s^2 [è un banale moto circolare uniformemente accelerato, per cui $\theta(t') = 2\pi = \omega_0 t'+\alpha t'^2/2$, con $\omega_0 = v_0/R$, da cui la soluzione. Fate attenzione al fatto che il moto **non** è circolare uniforme, per cui non è $t' = T = 2\pi/\omega_0$!]

   b) Quanto vale, componente cartesiana per componente cartesiana, l'accelerazione $\boldsymbol{a}'$ dell'oggetto all'istante t' di cui sopra?
   a'_X = …………………………………… = ……… m/s^2 $-\omega'^2R=-((v_0/R)+\alpha t')^2R=-((v_0/R)+(4\pi/t'^2-2v_0/(Rt'))t')^2R=-(4\pi/t'-v_0/R)^2R \sim -2.2\times10^2$ m/s^2
   a'_Y = …………………………………… = ……… m/s^2 αR = 17 m/s^2 [nell'istante considerato, in cui l'oggetto attraversa l'asse X (e quindi si muove in direzione Y), le direzioni tangenziale e radiale corrispondono rispettivamente alle direzioni cartesiane Y e X. Per il moto considerato (circolare uniformemente accelerato), l'accelerazione tangenziale è αR e quella radiale è l'accelerazione centripeta che in modulo vale ω'^2R , da cui la soluzione in cui si è esplicitato il valore della velocità angolare all'istante t']

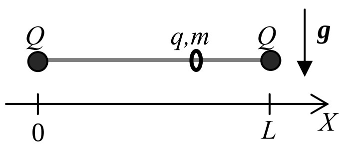
2. Una piccola cassa di massa m = 2.0 kg (da considerare come oggetto puntiforme!) si trova sulla sommità di un piano inclinato (fisso, rigido ed indeformabile) di lunghezza L = 4.9 m, che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è scabro e tra piano e cassa c'è attrito statico con coefficiente μ_S = 0.50. Sulla cassa agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}$ diretta ortogonalmente al piano inclinato nel verso di "schiacciare" la cassa sul piano (vedi figura) e avente modulo F = 10 N. In queste condizioni si osserva che la cassa è in equilibrio. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]



   a) Quanto vale, nelle condizioni sopra specificate, il modulo della forza di attrito F_A?
   F_A = …………………………………… = ……….. N $mg sin\theta$ = 17 N [all'equilibrio la componente "attiva" della forza peso, $mg sin\theta$, deve essere "bilanciata" dalla sola forza di attrito, che è l'unica forza in gioco avente la direzione del piano inclinato, da cui la soluzione. Osservate che, essendo noto il coefficiente di attrito statico, è opportuno valutare se esso può effettivamente dare luogo alla situazione descritta. Occorre ricordare che $F_A \le \mu_S N$, con $N = mg cos\theta+F$. Usando i valori numerici riportati nel testo, si osserva che la disuguaglianza non è rispettata, e quindi la situazione è fisicamente impossibile!!]

   b) Supponete ora che, all'istante t_0=0, il coefficiente di attrito statico si annulli improvvisamente (ad esempio, supponete che uno strato di olio venga improvvisamente spruzzato tra cassa e piano inclinato): a questo istante, la cassa si mette in movimento partendo da ferma. Qual è l'istante t' in cui essa raggiunge la base del piano inclinato, se la raggiunge? [Notate che la forza esterna $\boldsymbol{F}$ è sempre presente, uniforme e costante e diretta sempre ortogonalmente al piano inclinato, anche in questa fase dell'esperimento; inoltre anche ogni altra forma di attrito va considerata trascurabile]
   t' = …………………………………… = ……….. s $(2L/(g sin\theta))^{1/2} \sim 1.1$ s [in assenza di attrito, il moto avviene lungo il piano inclinato per effetto della sola forza che ha componenti in questa direzione, che è la forza peso. Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione di modulo $g sin\theta$, da cui la soluzione]

3. Due cariche elettriche di ugual valore $Q = 1.0\times10^{-5}$ C sono fissate agli estremi di un'asta rigida ed indeformabile, di lunghezza L = 20 cm, a sua volta fissa nello spazio e diretta **orizzontalmente** come indicato in figura. Sull'asta può scorrere con **attrito trascurabile** un piccolo anellino carico (l'asta è infilata nel foro dell'anellino, da considerare puntiforme), che ha massa m = 10 g e reca una carica elettrica $q = Q/2$. [Usate il valore $\kappa_E = 9.0\times10^9$ Nm^2/C^2 per la cost. del campo el.]



   a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ dell'anellino? Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ}? [**Non** usate valori numerici nell'espressione dell'equazione del moto e fate riferimento ad un asse X diretto come in figura, con origine corrispondente alla posizione di una delle due cariche Q, indicando con x la posizione (generica) dell'anellino]

$a(x)$ = …………………………………… $(\kappa_E Q^2/(2m))(1/x^2-1/(L-x)^2) = (k_E Q^2 L/(2m))((L-2x)/(x^2(L-x)^2))$ [il moto può avvenire solo in direzione orizzontale, essendo la forza peso "bilanciata" dalla reazione vincolare dell'asta sull'anello. Sull'anello agiscono le forze elettriche generate dalle due cariche puntiformi; poiché l'anello è vincolato a muoversi in direzione X, queste forze hanno direzione X (sono dirette lungo la congiungente tra anello e cariche), per cui il problema è effettivamente unidimensionale. Chiamando 1 la carica che si trova all'origine e 2 quella che si trova all'estremo dell'asta, si ha: $F_1=q\kappa_E Q/x^2$ e $F_2=- qk_E Q/(L-x)^2$, dove il segno meno è dovuto al fatto che la forza esercitata dalla carica 2 tende a respingere (cioè a spingere nel verso negativo dell'asse X) l'anello. Tenendo conto del fatto che $q = Q/2$ e usando un po' di algebra si ottiene la soluzione]

x_{EQ} = …………………………………… = ……… m $L/2$ = 0.10 m [si ottiene ponendo $a(x_{EQ})=0$ nell'equazione precedente]

b) Siete in grado di risolvere l'equazione del moto (cioè determinare la legge oraria del moto) scritta al punto precedente con qualche sensata approssimazione? Discutete in modo chiaro!

Discussione: …………………………………… se si suppone che, durante il movimento dell'anello, esso si trovi sempre in prossimità della posizione di equilibrio, cioè sia sempre $x = x_{EQ},+ \Delta x = L/2+\Delta x$, con $\Delta x << L$, si possono fare delle ragionevoli approssimazioni. Infatti il numeratore dell'espressione trovata sopra per $a(x)$ diventa $-\Delta x$, mentre il denominatore diventa $(L/2+\Delta x)^2(L/2-\Delta x)^2=(L^2/4-\Delta x^2)^2=(L^4/16)(1-(\Delta x^2/(L^2/4))^2)$. Poiché Δx è molto piccolo rispetto a L (e quindi anche rispetto a $L/2$!), il termine con Δx si può trascurare. Dunque l'equazione del moto diventa, approssimativamente (al secondo ordine, per dirla in termini matematici): $a(x)\sim (\kappa_E Q^2 L/(2m))(-\Delta x/(L^4/16)) = - (8\kappa_E Q^2/(mL^3))\ \Delta x$. Questa equazione del moto è quello di un oscillatore armonico con pulsazione $\omega = (8\kappa_E Q^2/(mL^3))^{1/2} \sim 2.1\text{x}10^2$ rad/s. Pertanto si può concludere che l'anellino può compiere piccole oscillazioni armoniche attorno alla sua posizione di equilibrio.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 21/11/2008 Firma:

B

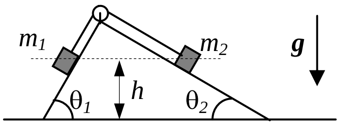
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 21/11/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

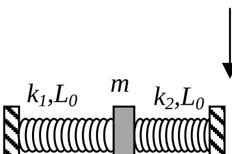
1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano cartesiano XY di un moto che, descritto in coordinate **polari** $R\theta$, segue le leggi orarie $R(t)=v_0t$ e $\theta(t)=(\alpha/2)t^2$, con v_0 = 2.0 m/s e α = 3.1 rad/s^2. [Considerate un sistema di riferimento polare e uno cartesiano centrati nella stessa origine; la coordinata angolare del riferimento polare è misurata rispetto alla direzione cartesiana X]
   a) In quale istante t' l'oggetto attraversa per la "prima volta" l'asse X del sistema di riferimento? [Escludete la risposta banale t' = 0!]
      t'=……………………………… ~ …….. s $(4\pi/\alpha)^{1/2}$~ 2.0 s [l'oggetto attraversa l'asse X quando $\theta(t')$ = 2π, da cui la soluzione. Chiaramente è accettabile, anzi migliore, la risposta che si ottiene ponendo $\theta(t')=\pi$, che è anche un istante di attraversamento dell'asse X (con x < 0)]
   b) Quanto vale, **in modulo**, la velocità v' dell'oggetto all'istante t' di cui sopra? [Ricordate che la velocità è un vettore!]
      v' =……………………………… ~ …….. m/s $(v'^2_R+v'^2_\theta)^{1/2}$ = $(v_0^2+(\omega' R')^2)^{1/2}$ = $(v_0^2+(\alpha t' v_0 t')^2)^{1/2}$ = $v_0(1+(\alpha t'^2)^2)^{1/2}$ $=v_0(1+(4\pi)^2)^{1/2}$ ~ 25 m/s [la velocità è un vettore che ha component tangenziali e radial, per cui il modulo si ottiene sommando in quadratura le componenti e facendone la radice quadrata. La velocità radiale è costante ed uniforme e vale v_0; la velocità tangenziale ad un istante generico è $v_\theta(t)= R(t)\omega(t)$, con $\omega(t) = \alpha t$]

2. Due piccoli blocchi di massa m_1 = 500 g e m_2 = 200 g si trovano su due piani inclinati (fissi, rigidi ed indeformabili) che hanno inclinazioni rispetto all'orizzontale rispettivamente $\theta_1 = \pi/3$ e $\theta_2 = \pi/6$. I due blocchi sono collegati tra loro da una fune (inestensibile e di massa trascurabile) che passa per la gola di una puleggia (priva di attriti e di **massa trascurabile**) come indicato in figura; la fune rimane parallela ai piani inclinati. [Nella soluzione considerate i blocchi come oggetti puntiformi. Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3)$ = $cos(\pi/6)$ = $3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $sin(\pi/6)$ = $cos(\pi/3)$ = 1/2]



   a) Supponendo che i due piani inclinati siano lisci, cioè che gli attriti (statico e dinamico) siano trascurabili, e immaginando di far partire da fermi i blocchi dalla posizione indicata in figura (inizialmente essi si trovano ad altezza h =1.0 m dall'orizzontale), in quale istante t' uno dei blocchi giunge alla base del proprio piano inclinato? [Notate che, ovviamente, solo uno dei due blocchi raggiunge effettivamente la base del "proprio" piano inclinato]
      t' = …………………………….. ~ .... s $(2h/(sin\theta_1\ a_1))^{1/2}$= $(2h(m_1+m_2)\ /(sin\theta_1\ g(m_1sin\theta_1-m_2sin\theta_2))\ )^{1/2}$ ~ 0.70 s [rispetto ad un riferimento parallelo ai due blocchi ed orientatl verso l'alto per il blocco 2 e verso il basso per il blocco 1, le due equzioni del moto si scrivono: $a_1 = gsin\theta_1-T_1$, $a_2 =- gsin\theta_2+T_2$. Per la scelta del riferimento e il fatto che la fune è inestensibile, si ha $a_1 = a_2$; inoltre, essendo la puleggia di massa trascurabile, è, in modulo, $T_1 = T_2$. Risolvendo il sistema delle due equazioni si ottiene $a_1=g(m_1sin\theta_1-m_2sin\theta_2)/(m_1+m_2)$. Con i dati del problema si vede che questa accelerazione è positiva, dunque il blocco 1 scende e il blocco 2 sale. Per calcolare il tempo di discesa occorre notare che il moto è uniformemente accelerato, per cui $L = h/sin\theta_1 = (a_1/2)t'^2$, da cui la soluzione]
   b) Come cambierebbe la soluzione data al punto precedente nel caso in cui i piani inclinati fossero scabri e presentassero un coefficiente di attrito statico μ_S = 0.70 ed un coefficiente di attrito dinamico μ_D = 0.50? Discutete in modo chiaro e completo!
      Discussione: …………………………………… occorre chiedersi in primo luogo se la situazione indicata in figura può essere di equilibrio. Sulla base della soluzione data al punto precedente, conviene esplicitare la tensione della fune, che è $T =((m_2-m_1)a_1+g(m_1sin\theta_1+m_2sin\theta_2))/2$. Quindi la forza che agisce sul blocco 1 per farlo scendere è $F_1 = m_1gsin\theta_1 - T$. Al massimo, la forza di attrito statico vale $F_{1A} = \mu_S m_1gcos\theta_1$; per avere equilibrio occorre che questa forza sia almeno pari alla forza F_1. D'altra parte supponendo equilibrio si ha a_1 = 0, da cui $F_{1EQ} = m_1gsin\theta_1 - (g(m_1sin\theta_1+m_2sin\theta_2))/2 = g(m_1sin\theta_1-m_2sin\theta_2)/2$. Con i dati del problema, si verifica che la forza di attrito può effettivamente uguagliare la forza "attiva "che tende a mettere in movimento il blocco 1, per cui, tenendo anche conto della in estensibilità della fune, il sistema sta in equilibrio. Si noti che, se non ci fosse la fune e il blocco 2, il blocco 1 non resterebbe in equilibrio, per cui nella soluzione è necessario considerare l'effetto della fune e del blocco 2.

3. Un piccolo blocchettino (da considerare come un oggetto puntiforme) di massa m = 30 g può scorrere con **attrito trascurabile** su un piano orizzontale. Il blocchettino è agganciato a



due molle di massa trascurabile disposte con il loro asse in direzione orizzontale: le molle hanno entrambe la stessa lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, ma le loro costanti elastiche sono diverse, e valgono k_1 = 2.0 N/m e k_2 = 1.0 N/m. Le estremità delle due molle (quelle non agganciate al blocchettino) sono vincolate a due muretti verticali, rigidi ed indeformabili, posti a distanza D = 1.2 m l'un l'altro: la figura riporta uno schema della situazione.

a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del blocchettino? Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ}? [**Non** usate valori numerici nell'espressione dell'equazione del moto e fate riferimento ad un asse X diretto come in figura, con origine corrispondente al muretto "di sinistra", indicando con x la posizione (generica) del blocchettino]

$a(x)$ = …………………………………… $(1/m)(-k_1(x-L_0)+k_2(D-x-L_0))=-((k_1+k_2)/m)x-((k_1-k_2)L_0-k_2D)$ [il moto può avvenire solo in direzione orizzontale, essendo la forza peso "bilanciata" dalla reazione vincolare del piano. Sul blocchettino agiscono le forze elastiche delle due molle, che sono ovviamente dirette lungo X e pertanto il problema è unidimensionale. L'equazione del moto si scrive $a(x) = (1/m)(F_1+F_2)$, dove F_1 ed F_2 sono le componenti orizzontali (con segno!) delle due forze elastiche. Per la scelta del sistema di riferimento, detta x la posizione (generica) del blocchettino è chiaro che $F_1 = k_1(x-L_0)$. Per quanto riguarda la molla "2", il valore della compressione (o elongazione) è, in modulo, pari a $|D-x-L_0|$. In particolare, si ha compressione quando $(D-x) < L_0$, viceversa si ha elongazione. Notando che in caso di compressione la forza è diretta nel verso negativo delle X (viceversa nel caso di elongazione), si ha $F_2 = k_2(D-x-L_0)$, con segni coerenti con la scelta del sistema di riferimento. Sommando algebricamente le due forze si ottiene il risultato]

x_{EQ} = …………………………………… = ……… m $((k_1-k_2)L_0+k_2D)/(k_1+k_2)$ = 0.57 m [si ottiene ponendo $a(x_{EQ})=0$ nell'equazione precedente]

b) Supponete ora che il blocchettino venga spostato di un tratto Δ_0 = 10 cm **dalla posizione di equilibrio**, e di qui, all'istante t_0 = 0, venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. A quale istante t' passerà (per la prima volta) per la posizione di equilibrio?

t' = …………………………….. = ... s $T/4 = \pi/(2\omega) = \pi/(2((k_1+k_2)/m)^{1/2})$ = 0.16 s [l'equazione del moto è quella di un moto armonico con pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ e periodo $T = 2\pi/\omega$. Vista la condizione iniziale di velocità nulla, il tempo necessario a ripassare per la posizione di equilibrio è pari a $T/4$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 21/11/2008 Firma:

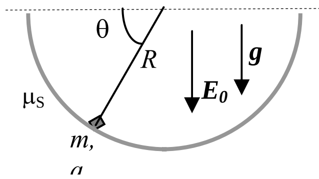
C

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 21/11/2008

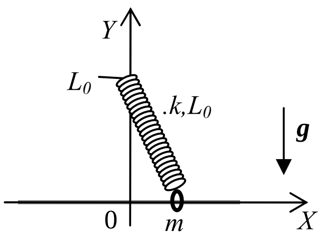
Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove su una circonferenza di raggio R = 50 cm con accelerazione angolare **costante ed uniforme** α (incognita). All'istante t_0 = 0 l'oggetto **parte da fermo** dalla posizione angolare (misurata rispetto ad un riferimento polare) $\theta_0 = \pi/3$; si sa che esso ripassa (la "prima volta") per questa stessa posizione angolare all'istante t' = 10 s.
   a) Quanto vale la velocità **tangenziale** v' all'istante t' di cui sopra?
   v' = …………………………….. = ... m/s $\omega(t')R= \alpha t'R = (4\pi/t'^2)\, t'R = (4\pi/t')\, R$ = 0.63 m/s [il moto è circolare uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, per cui la legge oraria del moto è $\theta(t) = \theta_0 + (\alpha/2)t^2$. Per la condizione del problema deve essere $\theta(t')=\theta_0+2\pi=\theta_0+(\alpha/2)t'^2$, da cui si ricava il valore di $\alpha = (4\pi/t'^2)$. La velocità tangenziale è poi $v' = \omega(t')R$, da cui la soluzione, tenendo conto che $\omega(t')=\alpha t'$]
   b) Quanto vale, **il modulo** dell'accelerazione $\boldsymbol{a}'$ dell'oggetto all'istante t' di cui sopra? [Ricordate che l'accelerazione è un vettore]
   a'= .... ~ ……… m/s^2 $((\alpha R)^2+(\omega^2R)^2)^{1/2} = R\alpha(1+\alpha^2t'^2)^{1/2} = R(4\pi/t'^2)\,(1+(4\pi)^2)^{1/2}$ ~ 7.9 m/s^2 [l'oggetto sente un'accelerazione tangenziale pari a αR e un'accelerazione radiale pari all'accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $\omega'^2R = (\alpha t')^2R$. L'accelerazione $\boldsymbol{a}'$ è un vettore che ha queste due componenti in direzioni ortogonali fra loro: dunque il suo modulo si ottiene estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati. In questo modo, tenendo anche conto delle considerazioni svolte alla soluzione del punto precedente a proposito della determinazione di α, si ottiene la soluzione]



2. Un oggetto puntiforme di massa m = 200 g reca una carica elettrica q = 2.0x10^{-3} C; esso può muoversi su una guida semicircolare di raggio R = 10 cm (fissa, rigida ed indeformabile) disposta su un piano verticale come in figura. La superficie della guida è scabra e presenta coefficiente di attrito statico μ_S = 0.50 e attrito dinamico trascurabile (fisicamente questo non è molto ragionevole, ma qui supponiamo che sia possibile). Nella regione di interesse è presente un campo elettrico esterno, **costante ed uniforme**, di modulo E_0 = 500 N/C e direzione verticale orientata verso il basso (vedi figura). La massa si trova in una posizione tale che il raggio diretto verso di essa forma un angolo $\theta = \pi/3$ **rispetto all'orizzontale**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $cos(\pi/3) = 1/2$]
   a) Sapendo che, nella situazione appena descritta, l'oggetto si trova fermo in equilibrio, quanto vale in modulo la forza di attrito F_A? [Verificate con attenzione]
   F_A = …………………………….. = ... N $(mg+qE_0)cos\theta$ = 1.5 N [l'equilibrio in direzione tangenziale, quella del possible moto dell'oggetto, impone 0 = $(mg+QE_0)\ cos\theta - F_A$, da cui la soluzione. Per completare la soluzione, occorre verificare se questa forza di attrito è compatibile o meno con il coefficiente di attrito statico indicato nel testo. Infatti deve essere $F_A \le \mu_S N$, dove la reazione vincolare esercitata dalla guida sulla massa vale, in modulo, $N = (mg+qE_0)sin\theta$. Con i dati del problema si verifica che la disuguaglianza **non** è effettivamente verificata, cioè la situazione di equilibrio **non** è fisicamente possibile]
   b) Supponete ora che all'istante t_0=0 il campo elettrico esterno $\boldsymbol{E_0}$ venga improvvisamente spento. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione a_0 con cui l'oggetto **comincia** a muoversi, se si muove?
   a_0 = …………………………….. =......... m/s^2 $gcos\theta$ = 4.9 m/s^2 [l'oggetto è sottoposto alla componente tangenziale della forza peso, $mgcos\theta$, e alla forza di attrito statico che, al massimo, può avere modulo $mgsin\theta\mu_S$. Poiché questa forza è minore della componente "attiva" della forza peso, l'oggetto si mette in movimento (ovvero, continua a muoversi!) con accelerazione dovuta alla sola componente della forza peso, essendo l'attrito dinamico trascurabile]



3. Un'asta rigida ed indeformabile è fissa lungo l'asse X (**orizzontale**) di un sistema di riferimento cartesiano. Su questa asta può scorrere un piccolo anellino (da considerare puntiforme) di massa m = 50 g. All'anellino è agganciata una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 5.0 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 20 cm. L'altro estremo della molla è vincolato nel punto di coordinate x = 0 e $y = L_0$ (l'asse Y è verticale e punta verso l'alto, si veda la figura per uno schema della situazione considerata). Ogni possibile forma di attrito può essere considerata **trascurabile**.
a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ dell'anellino? Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ}? [**Non** usate valori numerici nell'espressione dell'equazione del moto e fate riferimento all'asse X di figura, indicando con x la coordinata (generica) dell'anellino]

$a(x)$ = …………………………………… $-(k/m)x(1-L_0/L)=-(k/m)x(1-1/(1+(x/L_0)^2))$ $\kappa_E Q^2/(2m))(1/x^2-1/(L-x)^2) = (k_E Q^2 L/(2m))((L-2x)/(x^2(L-x)^2))$ [il moto può avvenire solo in direzione orizzontale, essendo l'anellino vincolato a scorrere sull'asta. In questa direzione sull'anellino agisce solo la **componente *X*** della forza elastica generata dalla molla. In modulo, la forza elastica vale $k(L-L_0)$, con $L = (x^2+L_0^2)$ per il teorema di Pitagora. La componente X di questa forza si ottiene moltiplicando per il coseno dell'angolo compreso tra asse della molla (questa direzione cambia in funzione della posizione x occupata dall'anellino!) e la direzione orizzontale; la goniometria permette di valutare questo coseno come il rapporto $-x/L$ (attenzione: segno compreso, come potete facilmente verificare!). Dunque la forza elastica si può scrivere come $-k(L-L_0)(x/L)=-kx(1-L_0/L)$, dove un rapido controllo permette di stabilire che il segno è sempre quello "giusto" (la molla tende a riportare l'anellino nella posizione di equilibrio, che è all'origine, vedi dopo). Da qui, esplicitando e usando un po' di algebra, esce la soluzione]

x_{EQ} = …………………………………… = ……… m 0 [si ottiene ponendo $a(x_{EQ})=0$ nell'equazione precedente; la risposta è ovvia considerando la "simmetria" del problema]

b) Il moto dell'anellino è *sicuramente* (cioè per ogni scelta delle condizioni iniziali) armonico? Discutete in modo appropriato ed approfondito!

Discussione: …………………………………… = ……….. l'equazione del moto **non** è quella di un moto armonico a causa della presenza del termine $(1-(x/L_0)^2)$ nel denominatore dell'espressione sopra riportata. Tuttavia, se $x/L_0 << 1$, allora l'equazione del moto si riduce a quella di un oscillatore armonico con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. Questa situazione si ottiene considerando le "piccole oscillazioni" dell'anellino attorno alla sua posizione di equilibrio $x_{EQ} = 0$. Dunque, se ad esempio l'anellino viene spostato di un piccolo tratto rispetto all'equilibrio e quindi lasciato andare liberamente, il moto è (approssimativamente, al secondo ordine) armonico.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 21/11/2008 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 21/11/2008

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R = 0.50 cm disposta sul piano orizzontale XY. All'istante t_0 = 0 esso attraversa l'asse X del sistema di riferimento cartesiano avendo una velocità tangenziale di modulo v_0 = 5.0 cm/s. Si osserva poi che esso si arresta quando raggiunge la posizione angolare $\theta' = \pi/2$; si sa che il rallentamento avviene con un'accelerazione angolare **uniforme e costante** α (incognita ed evidentemente negativa). [Usate un riferimento polare con origine coincidente con quella del sistema cartesiano e misurate la coordinata angolare rispetto all'asse X, come di consueto]

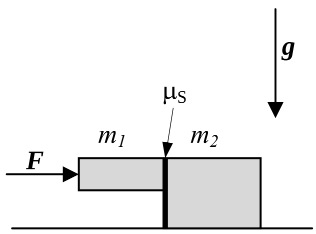
   a) Quanto vale α?

   α = …………………………….. = ... rad/s^2 $-\omega_0^2/(2\theta') = -v_0^2/(R^2 2\pi/2) = -v_0^2/(\pi R^2)$ = -3.2×10^{-3} rad/s^2 [l'oggetto si arresta all'istante t' in cui $\omega(t') = \omega_0+\alpha t'$ = 0 (il moto angolare è uniformemente accelerato) con $\omega_0 = v_0/R$. In questo istante il punto si trova nella posizione $\theta'=\theta(t')=\theta_0+\omega_0 t+\alpha t'^2/2$, combinando le due equazioni, relative alle leggi orarie del moto angolare e della velocità angolare, si ottiene la soluzione]

   b) Quanto vale, **il modulo** dell'accelerazione $\boldsymbol{a_0}$ dell'oggetto all'istante t_0 = 0? [Ricordate che l'accelerazione è un vettore]

   a_0 = ………………………………….. ~ .... m/s^2 $((\alpha R)^2+(\omega_0^2 R)^2)^{1/2}=((v_0^2/(\pi R))^2+(v_0^2/R)^2)^{1/2} = (v_0^2/R)(1/\pi^2+1)^{1/2}$ ~ 5.2×10^{-1} m/s^2 [l'accelerazione è un vettore le cui componenti, ortogonali tra loro e quindi da sommare in quadratura per ottenere il modulo quadro, sono l'accelerazione tangenziale αR e l'accelerazione centripeta di modulo $\omega_0^2 R$. La soluzione si ottiene tenendo conto della risposta al punto precedente]

2. Avete due piccoli blocchi, di massa m_1 = 50 g e m_2 = 100 g, che sono posti a contatto fra di loro come indicato in figura. In particolare, il blocco di massa m_1 risulta "sollevato" rispetto al piano orizzontale, mentre il blocco di massa m_2 è a contatto con il piano orizzontale, dove può scorrere con **attrito trascurabile**. Invece, la superficie di contatto tra i due blocchi è scabra, e presenta un coefficiente di **attrito statico** μ_S = 0.50. Sul blocco di massa m_1 agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}$ orizzontale, uniforme e costante e di modulo F = 2.5 N. Si osserva che, in queste condizioni, i due blocchi si muovono "di conserva" verso la destra della figura, con un moto uniformemente accelerato con accelerazione di modulo a (incognita); inoltre il blocco di massa m_1 **non scivola** verso il basso, cioè si trova in equilibrio in direzione verticale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; trascurate ogni possibile "ribaltamento" dei blocchi, che possono essere dotati solo di moto traslatorio (sono da considerare puntiformi…)]



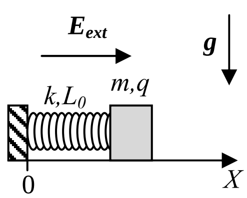
   a) Quanto vale, nelle condizioni sopra descritte e se c'è, il modulo della forza di attrito F_A che si esercita alla superficie di contatto tra i due blocchi?

   F_A = …………………………….. = ... N $m_1 g$ = 0.49 N [la forza di attrito è l'unica forza che può garantire equilibrio di m_2 rispetto alla forza peso, da cui la soluzione. Infatti non ci sono altre forze in direzione verticale che agiscano su m_1 (a parte, ovviamente, la forza peso)]

   b) Potete affermare che la situazione descritta si verifica per qualsiasi valore di F? Oppure per certi valori di F il blocco di massa m_1 cade verso il basso? Discutete andando in profondità.

   Discussione: .... affinché ci sia equilibrio deve essere $m_1 g = F_A \le \mu_S N$, con N forza di reazione vincolare esercitata all'interfaccia tra i due blocchi. Se si considera l'equazione del moto del blocco di massa m_1, deve essere $a = (1/m_1)(F-N)$, essendo F ed N dirette entrambe nella direzione (orizzontale) del moto ed avendo verso contrario tra loro. D'altra parte l'intero sistema dei due blocchi si muove con accelerazione $a = F/(m_1+m_2)$, come si può facilmente verificare scrivendo anche l'equazione del moto del blocco m_2, $a_2=(1/m_2)N$, (N, con segno positivo, è la reazione vincolare, cioè la forza, che il blocco "1" esercita sul "2", ovviamente uguale ed opposta a quella che "2" esercita su "1") e notando che, vista la condizione di contatto tra i blocchi, deve essere $a_2=a$. Risolvendo per N, si ottiene $N = Fm_2/(m_1+m_2)$. Affinché ci sia equilibrio verticale per m_1 occorre quindi che $N \ge m_1 g/\mu_S$, cioè $F \ge (m_1/m_2)g(m_1+m_2)/\mu_S$, ovvero, numericamente, deve essere $F \ge 1.5$ N. La situazione descritta nel testo è quindi fisicamente possibile.

3. Un piccolo blocchettino di massa m = 200 g (da considerare come un oggetto puntiforme) può muoversi con **attrito trascurabile** su un piano **orizzontale**. Il blocchettino, che reca una carica elettrica $q = 1.0\times10^{-4}$ C, è agganciato ad una molla di massa trascurabile, lunghezza di riposo L_0 = 50 cm e costante elastica k = 0.20 N/m, il cui altro estremo è vincolato ad un muretto verticale, rigido ed indeformabile, posto all'origine dell'asse X (si veda la figura). Inizialmente nella regione di spazio di interesse è presente un campo elettrico esterno $\boldsymbol{E_{ext}}$ **costante ed uniforme**, di



modulo incognito, diretto orizzontalmente nel verso positivo dell'asse X. In queste condizioni si osserva che il blocchettino si trova in equilibrio nella posizione x_0 = 80 cm. [Fate uso dell'asse di riferimento X indicato in figura, con origine sul muretto]

a) Quanto vale il modulo del campo elettrico esterno E_{ext}?
E_{ext} = …………………………………… = ... N/C $(k/q)(x_0-L_0) = 6.0\times10^2$ N/C [affinché ci sia equilibrio occorre che forza elettrica e forza elastica si bilancino, cioè deve essere $0 = -k(x_0-L_0)+qE_{ext}$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che, all'istante $t_0 = 0$, il campo elettrico esterno venga improvvisamente dimezzato rispetto al valore precedente, cioè diventi $E'=E_{ext}/2$: la situazione non è più di equilibrio e il blocchettino comincia a muoversi. Come si scrive la sua **legge oraria** del moto, $x(t)$, per $t>t_0$? In quale istante t' il blocchettino si arresta per la "prima volta"? [Nello scrivere la legge oraria del moto **non** usate valori numerici, ma tenete conto in modo opportuno delle **condizioni iniziali** del problema]
$x(t)$ .... $(x_0-L_0-(q/k)E')\cos((k/m)^{1/2}t)+L_0+(q/k)E'$ [il moto è armonico essendo l'equazione del moto $a(x) = -(k/m)(x-L_0) +qE'/m$. La soluzione di questa equazione è $x(t)=A\cos(\omega t+\Phi) + x_{EQ}$, con $\omega = (k/m)^{1/2}$ e $x_{EQ}=L_0+(q/k)E'$. I valori delle costanti A e Φ si ottengono dalle condizioni iniziali: $x(t_0)=x_0=A\cos\Phi + x_{EQ}$, e $v(t_0)=0=-\omega A\sin\Phi$, l'ultima delle quali tiene conto del fatto che il blocchettino parte con velocità iniziale nulla. Si ottiene $\Phi = 0$ e $A=x_0-x_{EQ}$, da cui la soluzione]
t'= …………………………………… = ... s $T/2=\pi/\omega=\pi/((k/m)^{1/2}) = 3.1$ s [nel moto armonico, la velocità si annulla (per la "prima volta") dopo mezzo periodo, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 21/11/2008 Firma: