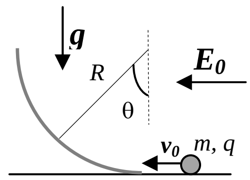
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 19/12/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un piccolo oggetto di massa m = 20 g e dotato di una carica elettrica $q = 1.0\text{x}10^{-3}$ C giunge con una velocità di modulo v_0 = 5.0 m/s alla base di una guida circolare (la sua sezione forma un quarto di circonferenza, come rappresentato in figura) fissa e indeformabile, di raggio R = 20 cm. Nella regione di interesse è presente un campo elettrico esterno **costante ed uniforme** di modulo E_0 = 300 V/m diretto orizzontalmente nel verso indicato in figura. Si osserva che l'oggetto percorre per intero la guida muovendosi con **attrito trascurabile**. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



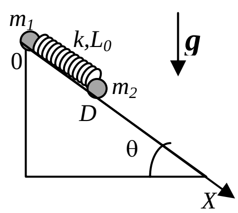
a) Quanto vale, in **modulo**, la velocità v con cui l'oggetto passa per il "**punto di mezzo**" della guida? ["Punto di mezzo" significa che il raggio spiccato dal centro della circonferenza a cui l'arco appartiene alla posizione in questione forma un angolo θ = π/4 rispetto alla verticale, come indicato in figura]

v= ………………………………… ~ ………. m/s $(v_0^2-2gR(1-\cos\theta)+2qE_0R\sin\theta/m)^{1/2}$ ~ 5.5 m/s   [nel processo si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U_G+\Delta U_E = (m/2)v^2-(m/2)v_0^2+mgR(1-\cos\theta)-qE_0R\sin\theta$, dove si è espresso la variazione di energia potenziale elettrica $\Delta U_E = -L_E = |F_E|\Delta s$, con $\Delta s = R\sin\theta$ spostamento nella direzione del campo elettrico]

b) Quanto vale la **differenza di potenziale** elettrico ΔV tra l'inizio e la fine della guida?

ΔV = ………………………………… = …….. V $-E_0R$ = -60 V   [per definizione, $\Delta V = \Delta U_E/q$, con $\Delta U_E = -qE_0R$ (vedi risposta al quesito precedente)]

2. Due oggetti (puntiformi) di massa m_1 e m_2 possono scivolare con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato (fisso, rigido, indeformabile) che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. I due oggetti sono tenuti insieme da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. Inizialmente i due oggetti sono tenuti fermi da forze esterne (ad esempio due manine) in posizioni che, rispetto ad un asse X che corre lungo il piano inclinato, ha origine sulla sua sommità, e corre verso il basso, sono x_{01} = 0 e $x_{02} = D$ (vedi figura). All'istante t_0=0 le forze esterne che tenevano fermi gli oggetti vengono improvvisamente rimosse (senza che venga impartita alcuna velocità iniziale agli oggetti) ed essi sono liberi di muoversi. [In questo esercizio i valori numerici dei dati sono ignoti e dovete esprimere le soluzioni in funzione delle espressioni letterali dei vari parametri. Usate il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Come si scrivono le equazioni del moto relativo, a_{REL} , e del centro di massa, a_{CM} , del sistema? [Dovete scrivere delle **funzioni delle posizioni generiche** x_1 e x_2 dei due oggetti rispetto all'asse considerato nel testo]

a_{REL}= ………………………………… $-(k/\mu)(x_2-x_1-L_0)$, con $1/\mu=1/m_1+1/m_2$ [il moto relativo avviene per effetto della forza elastica della molla, che è l'unica forza interna al sistema dei due oggetti.. Rispetto all'asse considerato, detta d la distanza (generica) tra gli oggetti, cioè $d = x_2-x_1$, si ha $F = -k(d-L_0)$, da cui, ricordando l'espressione dell'equazione del moto relativo, si ottiene la soluzione]

a_{CM} = ………………………………… $g\sin\theta$ [le uniche forze esterne con componenti non nulle lungo X sono le componenti "attive" delle forze peso, $m_1g\sin\theta$ e $m_2g\sin\theta$. Ricordando che l'equazione del moto del CM recita $a_{CM}=\Sigma F_{ext}/M_{tot}$ si ottiene la soluzione]

b) In quale istante t' (se esiste) la **distanza relativa** tra gli oggetti torna ad assumere per la prima volta il valore (D) che aveva all'istante iniziale?

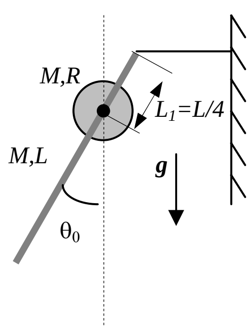
t' = ………………………………… $T=2\pi/\omega = 2\pi(\mu/k)^{1/2}$ [il moto relativo è armonico con pulsazione $(k/\mu)^{1/2}$ e il tempo richiesto equivale al periodo dell'oscillazione, da cui la soluzione; si suppone ovviamente che la lunghezza del piano inclinato e la distanza iniziale siano tali da permettere effettivamente il raggiungimento della situazione richiesta prima che la massa m_2 raggiunga la base del piano inclinato!]

c) Come si scrivono le leggi orarie del moto dei due oggetti, $x_1(t)$ e $x_2(t)$? [Cercate di tenere conto in modo opportuno delle condizioni iniziali del problema; anche in questo caso dovete esprimere la soluzione in termini dei dati letterali noti del problema]

$x_1(t)$ = ………………………………… $(m_2/(m_1+m_2))((D-L_0)(1-\cos(\omega t)))+g\sin\theta t^2/2$.

$x_2(t)$ = ………………………………… $x_1(t)+(D-L_0)\cos(\omega t)+L_0=-m_1/(m_1+m_2))((D-L_0)(1-\cos(\omega t)))+g\sin\theta t^2/2$ [la legge oraria del moto del CM è $x_{CM}(t)= (m_1x_1(t)+m_2x_2(t))/(m_1+m_2)=x_{0CM}+g\sin\theta t^2/2$, con $x_{0CM}=Dm_2/(m_1+m_2)$. La legge oraria del moto relativo è $d(t) = x_2(t)-x_1(t)$, $= A\cos(\omega t+\Phi)+d_{EQ}$, con ω sopra determinato, $d_{EQ}=L_0$ (si ottiene ponendo uguale a zero l'equazione del moto relativo) e A e Φ dati dalle condizioni iniziali; in particolare, visto che il sistema parte da fermo, si ha Φ = 0 , mentre $d(t_0=0)=D$, secondo i dati del problema, da cui $A = (D-L_0)$. A questo punto si ha un sistema di due equazioni per le (funzioni) incognite $x_1(t)$ e $x_2(t)$, la cui soluzione fornisce la risposta]

3. Un sistema è formato da un cilindro pieno **omogeneo** di raggio R = 10 cm e da una sottile sbarra **omogenea** di lunghezza $L = 8R$ = 80 cm; entrambi gli oggetti hanno la stessa massa M = 2.0 kg. Questi due corpi rigidi sono saldati tra di loro a formare un corpo unico in modo che la sbarra attraversi un diametro del cilindro e che il centro del cilindro si trovi ad una distanza $L_1 = L/4$ dall'estremità della sbarretta. Un perno, inchiodato ad una parete rigida verticale, attraversa l'asse del cilindro; il sistema cilindro+sbarretta può dunque ruotare su un piano verticale con **attrito trascurabile** attorno a questo perno. Inizialmente il sistema è tenuto in equilibrio nella configurazione geometrica di figura (l'angolo indicato vale $\theta_0 = \pi/3$) da una fune inestensibile un cui estremo è vincolato ad un'altra parete rigida verticale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.7 e $\cos(\pi/3)$ = ½, può esservi utile ricordare il "teorema degli assi paralleli", che recita $I' = I_{CM} + Md^2$, con M massa dell'oggetto considerato e d distanza tra i due assi paralleli considerati, uno dei quali passa per il centro di massa]



a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione T della fune e la forza F esercitata dal perno sul cilindro?

T = …………………………………… ~ ……… N $Mg(L/4)\sin\theta_0/((L/4)\cos\theta_0) = Mg\,tg\theta_0$ ~ 34 N [per l'equilibrio rotazionale del sistema per rotazioni attorno ad un asse passante per il perno occorre che siano bilanciati i momenti delle forze. Le sole forze esterne che fanno momento sono la forza peso della sbarra, applicata al centro di massa della sbarra stessa, cioè a metà della sua lunghezza (la sbarra è omogenea!) e la tensione della fune. Questi due momenti conducono a rotazioni in versi opposti, dunque è sufficiente uguagliarne i moduli. La risposta si ottiene notando che il braccio della forza peso agente sulla sbarretta è $L\sin\theta_0/4$ (per banali ragioni geometriche) mentre il braccio della tensione della fune è $L\cos\theta_0/4$ (per ragioni altrettanto banali!)]

F = …………………………………… ~ ……… N $(T^2+(2Mg)^2)^{1/2} = Mg(tg^2\theta_0 + 4)^{1/2}$ ~ 52 N [per l'equilibrio traslazionale del sistema occorre che tutte le forze esterne si annullino. Queste forze valgono in modulo $2Mg$ (in direzione verticale, notate che anche il cilindro ha la sua massa!) e T (in direzione orizzontale), da cui la soluzione]

b) Supponete ora che, ad un dato istante, la fune venga improvvisamente tagliata: di conseguenza, il sistema cilindro+sbarretta si mette a ruotare attorno al perno. Quanto vale la velocità angolare ω del sistema nell'istante in cui la sbarretta assume una direzione verticale?

ω = …………………………………… ~ ……… rad/s $(2Mg(L/4)(1-\cos\theta_0)/I_{tot})^{1/2} = ((192/59)(g/L)(1-\cos\theta_0))^{1/2}$ ~ 4.5 rad/s [nella rotazione si conserva l'energia meccanica del sistema. Essendo tutto inizialmente fermo, la variazione di energia meccanica si scrive $I_{TOT}\omega^2/2$, con I_{TOT} momento di inerzia complessivo del sistema. Poiché i momenti di inerzia si sommano, si ha $I_{TOT}=I_{sb}+I_{cil}$. D'altra parte, applicando il teorema degli assi paralleli e ricordando che, per una sbarretta sottile ed omogenea, è $I_{CM} = (ML^2)/12$, si ha $I_{sb}=(ML^2)/12+M(L/4)^2=7ML^2/48$, mentre per un cilindro oomogeneo che ruota attorno al proprio asse è $I_{cil}=MR^2/2=ML^2/128$. Dunque $I_{tot}=59ML^2/384$. La variazione di energia potenziale (gravitazionale) è dovuta al fatto che il centro di massa della sbarretta diminuisce la sua quota di un tratto che, in modulo, vale $(L/4)(1-\cos\theta_0)$. Da qui la soluzione. Notate che lo stesso risultato si ottiene anche considerando la variazione di quota del centro di massa dell'intero sistema, che si trova a $L/8$ "più in alto" rispetto al CM della sbarretta, cioè a distanza $L/8 = (L/4)/2$ dal perno, ma per il quale occorre considerare la massa $2M$ dell'intero sistema]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 19/12/2008 Firma:

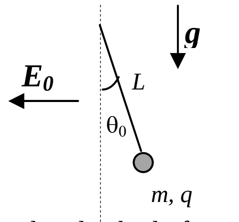
B

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 19/12/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

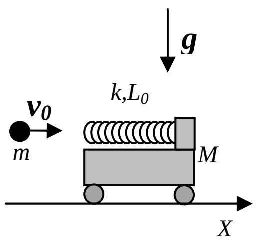
1. Un piccolo oggetto di massa m = 300 g dotato di una carica elettrica q = 1.0x10^{-3} C è legato ad una fune inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L = 1.0 m, il cui altro estremo è vincolato ad un chiodo infisso in una parete rigida verticale. Nella regione di interesse è presente un campo elettrico esterno **uniforme e costante** di modulo E_0 = 30 V/m, diretto orizzontalmente nel verso indicato in figura. Inizialmente l'oggetto è tenuto fermo (da una qualche forza esterna) nella posizione indicata in figura (l'angolo vale $\theta_0 = \pi/6$). [**Trascurate ogni forma di attrito** e usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$]



   a) Ad un dato istante la forza esterna viene rimossa improvvisamente e l'oggetto si mette in movimento in modo tale che la fune rimanga sempre tesa. Quanto vale, in modulo, la sua velocità v quando la fune si trova a passare per la posizione verticale?
   v= …………………………………… ~ ……… m/s $(2gL(1-cos\theta_0)+2qE_0Lsin\theta_0/m)^{1/2}$ ~ 1.6 m/s [si deve conservare l'energia meccanica, per cui la variazione di energia cinetica, $(m/2)v^2$, deve essere uguagliata dal modulo della variazione dell'energia potenziale gravitazionale, $mgL(1-cos\theta_0)$ ed elettrica, $qE_0Lsin\theta_0$ (tenete presente che la forza è uniforme e lo spostamento in direzione della forza stessa vale $Lsin\theta_0$ per ragioni geometriche). Da qui si ottiene la soluzione. Notate che l'indicazione del testo sulla tensione della fune, che andrebbe attentamente verificata, è necessaria per individuare correttamente la quota "finale" dell'oggetto, e quindi la variazione di energia potenziale]

   b) Quanto vale la **differenza di potenziale** elettrico ΔV tra la posizione "finale" (fune sulla verticale) e quella "iniziale" (fune all'angolo θ_0) dell'oggetto?
   ΔV = …………………………………… = …….. V $-E_0Lsin\theta_0$ = -15 V   [per definizione, $\Delta V = \Delta U_E/q$, con ΔU_E calcolato nella risposta al punto precedente, da cui la soluzione]

2. Un carrello di massa M, che può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una strada orizzontale, è dotato di una sponda verticale rigida a cui è vincolata una molla, di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. La molla è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, e la lunghezza del carrello è tale che l'estremità della molla (imperturbata) è a filo con l'estremità del carrello stesso, come rappresentato in figura. Inizialmente il carrello è fermo; all'istante t_0=0 un oggetto di massa $m=M/4$ incide, con una velocità di **modulo** v_0 diretta orizzontalmente come in figura, sull'estremità della molla; di conseguenza, la molla comincia a contrarsi. [In questo esercizio i valori numerici dei dati sono ignoti e dovete esprimere le soluzioni in funzione delle espressioni letterali dei vari parametri; trascurate ogni forma di attrito anche nel moto dell'oggetto di massa m]

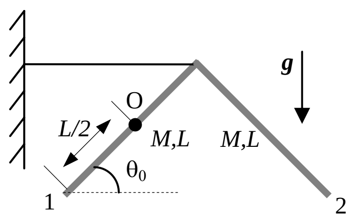


   a) Come si esprime, in modulo, la compressione massima Δ_{MAX} della molla?
   Δ_{MAX}= …………………………………… $(v_0^2mM/(k(m+M)))^{1/2}=v_0(4m/(5k))^{1/2}$ [in seguito all'arrivo dell'oggetto di massa m, la molla si comprime e il carrello si mette in movimento in direzione orizzontale. In questa direzione il sistema è isolato, per cui si conserva la quantità di moto, cioè in ogni istante è $mv_0 = mv+MV$. Inoltre si conserva l'energia meccanica, per cui $(m/2)v_0^2=(m/2)v^2+(M/2)V^2+(k/2)\Delta^2$, avendo indicato con Δ la compressione della molla a un generico istante. Nell'istante di massima compressione oggetto e carrello devono avere la stessa velocità, cioè $v=V$ (in altre parole, la velocità relativa del sistema è nulla). Si ha dunque un sistema di tre equazione con tre incognite la cui soluzione rispetto a Δ fornisce il risultato, dove si è anche fatto uso dell'indicazione $M=4m$ fornita dal testo]

   b) In quale istante t' la molla assume la sua compressione massima (di cui alla domanda precedente)?
   t' = …………………………………… $T/4=\pi/(2\omega)=\pi(\mu/(4k))^{1/2}=\pi(m/(5k))^{1/2}$ [il moto relativo dell'oggetto rispetto al carrello è armonico, dato che l'equazione del moto relativo si scrive $a_{REL}=-(k/\mu)(L-L_0)$, con L lunghezza della molla ad un dato istante. Ponendo un riferimento solidale al carrello con l'origine sulla sponda, si ha che L rappresenta la coordinata relativa dell'oggetto durante il processo di compressione, circostanza che conferma la natura armonica del moto. Si può facilmente verificare che l'istante richiesto corrisponde a $T/4$, con T periodo dell'oscillazione. Essendo $\mu = mM/(m+M) = 4m/5$ si ottiene la soluzione]

   c) Come si esprime lo spostamento ΔX del carrello quando la molla assume la sua compressione massima (di cui alle domande precedenti)? [Fate riferimento ad un asse X orizzontale orientato come in figura]
   ΔX = …………………………………… $(m/(m+M))(v_0t'-\Delta_{MAX})=(v_0t'-\Delta_{MAX})/5=v_0(m/(5k))^{1/2}(\pi-2)/5$ [il sistema è isolato in direzione orizzontale, per cui il centro di massa non ha accelerazione. Esso, quindi, si muove di velocità uniforme $v_{CM}=v_{0CM}=mv_0/(m+M)=v_0/5$. Il suo spostamento è dunque $\Delta x_{CM}=v_{CM}t'=v_0t'/5$, con t' determinato in precedenza. D'altra parte deve anche essere, per definizione e tenendo conto che la massa dei corpi rimane costante nel processo, $\Delta x_{CM}=(m\Delta x+M\Delta X)/(m+M)$. Lo spostamento dell'oggetto rispetto al riferimento considerato è $\Delta x=\Delta_{MAX}+\Delta X$, per cui, tenendo anche conto della relazione numerica tra le masse, si ha $\Delta x_{CM}=\Delta_{MAX}/5+\Delta X$, da cui la soluzione]

3. Un sistema è formato da due sottili sbarrette **omogenee** identiche, ciascuna di massa M = 1.0 kg e lunghezza L = 50 cm, saldate insieme ad una estremità a formare una "L" (l'angolo tra i loro assi vale $\pi/2$). Nel punto di mezzo di una delle due sbarrette (la numero 1 di figura) si trova un piccolo foro passante: un perno rigido, fissato ad una parete verticale, passa per il foro in modo tale che l'intero sistema può compiere rotazioni con **attrito trascurabile** su un piano verticale attorno ad un asse che passa per questo perno (il polo di rotazione è indicato con la lettera O in figura). Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio da una fune disposta come rappresentato in figura (la fune è orizzontale e collega il vertice della "L" ad una parete rigida verticale); l'angolo indicato è $\theta_0 = \pi/4$. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/4) = sin(\pi/4) = 1/2^{1/2}$, con $2^{1/2} \sim 1.4$]



a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione T della fune e la forza F esercitata dal perno sul sistema? [Fate attenzione a considerare bene la geometria e la trigonometria!]

T = ……………………………………. = ……… N $(MgL\cos\theta_0)/((L/2)\sin\theta_0) = 2Mg\cos\theta_0/\sin\theta_0 = 2Mg$ = 20 N [per l'equilibrio rotazionale del sistema per rotazioni attorno ad un asse passante per il perno occorre che siano bilanciati i momenti delle forze. Le sole forze esterne che fanno momento sono la forza peso della sbarretta 2, applicata al centro di massa della sbarretta stessa, cioè a metà della sua lunghezza (la sbarretta è omogenea!) e la tensione della fune. Questi due momenti conducono a rotazioni in versi opposti, dunque è sufficiente uguagliarne i moduli. La risposta si ottiene notando che il braccio della forza peso agente sulla sbarretta 2 è $2(L/2)\cos\theta_0$ mentre il braccio della tensione della fune è $(L/2)\sin\theta_0$. Notate anche che lo stesso risultato si deve ottenere considerando la forza peso dell'intero sistema applicata al centro di massa dell'intero sistema (c'è un po' più di geometria da fare…)]

F = ……………………………………. ~ ……… N $(T^2+(2Mg)^2)^{1/2} = 2Mg(1+1)^{1/2}$ ~ 28 N [per l'equilibrio traslazionale del sistema occorre che tutte le forze esterne si annullino. Queste forze valgono in modulo $2Mg$ (in direzione verticale) e T (in direzione orizzontale), da cui la soluzione]

b) Supponete ora che, ad un dato istante, la fune venga improvvisamente tagliata: di conseguenza, il sistema si mette a ruotare attorno all'asse passante per il perno. Quanto vale la velocità angolare ω del sistema nell'istante in cui la sbarretta 1 ha il proprio asse in direzione orizzontale (cioè, in pratica, l'angolo θ_0 indicato in figura si annulla)? [Può esservi utile ricordare il "teorema degli assi paralleli", che recita $I' = I_{CM} + Md^2$, con M massa dell'oggetto considerato e d distanza tra i due assi paralleli considerati, uno dei quali passa per il centro di massa]

ω = ……………………………………. ~ ……… rad/s $(2Mg(L/2)/I_{TOT})^{1/2} = (3g/(2L))^{1/2}$ ~ 5.4 rad/s [nella rotazione si conserva l'energia meccanica del sistema. Essendo tutto inizialmente fermo, la variazione di energia cinetica si scrive $I_{TOT}\omega^2/2$, con I_{TOT} momento di inerzia complessivo del sistema. Poiché i momenti di inerzia si sommano, si ha $I_{TOT}=I_1+I_2$. D'altra parte, applicando il teorema degli assi paralleli e ricordando che, per una sbarretta sottile ed omogenea, è $I_{CM} = (ML^2)/12 = I_1$, si ha $I_2=(ML^2)/12+MD^2$, dove la distanza tra gli assi (paralleli) è $2(L/2)\cos\theta_0$ (il centro di massa della sbarretta 2 percorre un arco di circonferenza che ha raggio D). Dunque $I_2=(ML^2/12)+(ML^2/2)=7ML^2/12$ e $I_{TOT}=8ML^2/12=2ML^2/3$. La variazione di energia potenziale (gravitazionale) è dovuta al fatto che il centro di massa della sbarretta 2 diminuisce la sua quota di un tratto che, in modulo, vale $(L/2)$. Da qui la soluzione. Notate che lo stesso risultato si ottiene anche considerando la variazione di quota del centro di massa dell'intero sistema, che vale $(L/2)\sin\theta_0\cos\theta_0$, ma per il quale occorre considerare la massa $2M$ dell'intero sistema]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

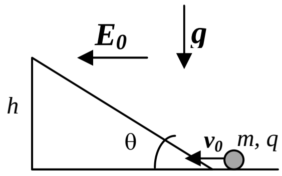
Pisa, 19/12/2008 Firma:

C

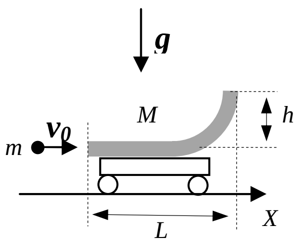
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 19/12/2008

Nome e cognome: …………………………………………………….　　　Matricola: ……………

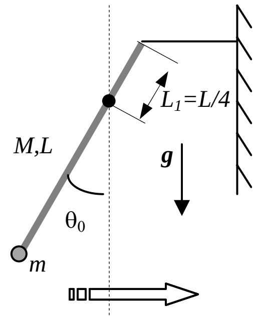
Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***



1. Un piccolo oggetto di massa m = 200 g e dotato di una carica elettrica q = 1.0x10^{-3} C giunge con una velocità di modulo v_0 = 5.0 m/s alla base di un piano inclinato rigido e fisso che forma un angolo $\theta = \pi/6$ con l'orizzontale ed ha altezza h = 20 cm, come rappresentato in figura. Nella regione di interesse è presente un campo elettrico esterno **costante ed uniforme** di modulo E_0 = 300 V/m diretto lungo l'asse X nel verso indicato in figura. Si osserva che l'oggetto percorre per intero il piano inclinato muovendosi con **attrito trascurabile**. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = ½$]
   a) Quanto vale, in **modulo**, la velocità v con cui l'oggetto raggiunge la sommità del piano inclinato?
   v= …………………………………… ~ ………. m/s　　$(v_0^2-2gh+2qE_0h/(mtg\theta))^{1/2} \sim 4.7$ m/s　　[nel processo si conserva l'energia meccanica, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U_G+\Delta U_E = (m/2)v^2-(m/2)v_0^2+mgh-qE_0h/tg\theta$, dove si è espresso la variazione di energia potenziale elettrica $\Delta U_E = -L_E = -|F_E|\Delta s$, con Δs spostamento nella direzione del campo elettrico (è pari a $h/tg\theta$)]
   b) Quanto vale la **differenza di potenziale** elettrico ΔV tra posizione "finale" (in cima al piano) e "iniziale" (alla base) dell'oggetto?
   ΔV = …………………………………… ~…….. V　　$-E_0h/tg\theta \sim -1.0$x10^2 V　　[per definizione, $\Delta V = \Delta U_E/q$, con ΔU_E calcolato nella risposta al punto precedente, da cui la soluzione]



2. Un sottile tubo cavo è piegato in modo da formare una specie di manico d'ombrello: esso, infatti, può essere immaginato come composto da un tratto rettilineo (asse in direzione orizzontale) seguito da un tratto piegato a formare un quarto di circonferenza. Il tubo è montato sopra un carrello che si può muovere con **attrito trascurabile** su una strada orizzontale (vedi figura): la massa complessiva del sistema è M ed inizialmente carrello+tubo sono fermi. Un proiettile puntiforme, di massa $m = M/5$, si infila nel tubo avendo una velocità di modulo v_0 diretta orizzontalmente nel verso di figura. Il diametro del tubo è tale che il proiettile ci può scorrere dentro con **attrito trascurabile**. Altri parametri noti rilevanti per il problema sono la "lunghezza" L e l'"altezza" h. [In questo esercizio i valori numerici dei dati sono ignoti e dovete esprimere le soluzioni in funzione delle espressioni letterali dei vari parametri. Usate il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Si osserva che il proiettile percorre per intero il tubo e ne fuoriesce con una velocità di modulo v; nel contempo, anche il carrello si mette in movimento con una velocità che raggiunge il valore V. Come si esprimono, **in modulo**, le velocità V e v? [Si intende che entrambe le velocità sono misurate nello stesso sistema di riferimento all'istante in cui il proiettile fuoriesce dal tubo; ricordate che il problema **non** è unidimensionale!]
   V = ……………………………………　　$mv_0/(m+M)=v_0/6$ [il sistema proiettile + carrello con tubo è isolato lungo la direzione orizzontale, dunque si deve conservare la componente della quantità di moto in questa direzione: $mv_0 = mv_X+MV$. Nell'istante in cui il proiettile fuoriesce dal tubo esso possiede, rispetto al carrello, solo velocità in direzione verticale; quindi deve essere v_X=V, da cui la soluzione, per la quale è stata anche considerata la relazione tra le masse indicata nel testo]
   v = ……………………………………　　$(v_0^2 - (M/m)V^2-2gh)^{1/2} = (31v_0^2/36-2gh)^{1/2}$　[non essendoci dissipazioni, si conserva l'energia meccanica complessiva. Quindi si può scrivere $0=(m/2)v^2+(M/2)V^2-(m/2)v_0^2+mgh$ (notate che nell'energia va considerato il modulo della velocità del proiettile, e non solo qualche sua componente!). Sostituendo l'espressione di V trovata sopra ed usando la relazione tra le masse indicata nel testo si ottiene la soluzione]
   b) Dopo aver lasciato il tubo, il proiettile prosegue in un moto libero (supposto con **attrito trascurabile**). Come si esprime la quota massima h_{MAX} da esso raggiunta? [Si intende che tale quota è misurata a partire dalla quota occupata dal proiettile prima di penetrare nel tubo]
   h_{MAX} = ……………………………………　　$(v_0^2-(m+M)V^2/m)/g = 5v_0^2/(12g)$　[per la mancanza di attrito l'energia meccanica si conserva nell'intero processo, da quando il proiettile inizia a penetrare nel tubo fino a quando esso raggiunge la quota massima (cioè annulla la componente verticale della propria velocità). Quindi deve essere $0 = (M/2)V^2 + (m/2)V^2 - (m/2)v_0^2 + mgh_{MAX}$, dove si è tenuto conto del fatto che il carrello continua a muoversi con velocità V anche dopo che il proiettile ha lasciato il tubo e che V continua ad essere (inalterata) la velocità orizzontale del proiettile. Da qui la soluzione, che è poi scritta usando l'espressione di V trovata sopra e la relazione tra le masse]
   c) Supponendo di sapere che il tempo necessario affinché il proiettile percorra per intero il tubo sia t' (un nuovo dato letterale del problema), come si scrive lo spostamento ΔX del carrello+tubo? [Fate riferimento ad un asse orizzontale orientato come in figura]
   ΔX = ……………………………………　　$v_{CM}t'- mL/(m+M) = m(v_0t'-L)/(m+M)= (v_0t'-L)/6$.
   [essendo il sistema isolato lungo l'orizzontakle, nell'intero processo il centro di massa si muove in questa direzione con velocità rettilinea ed uniforme costantemente pari alla velocità iniziale, $v_{CM}=mv_0/(m+M)$. Pertanto il suo spostamento è $\Delta x_{CM}=v_{CM}t'=(m\Delta x+M\Delta X)/(m+M)$. La soluzione si trova quindi notando che lo spostamento del proiettile Δx (misurato rispetto alla strada!) è $\Delta x=L+\Delta X$ per la composizione degli spostamenti (orizzontali) relativi]



3. Un sistema è formato da una sottile sbarra **omogenea** di lunghezza L = 1.0 m e massa M = 2.0 kg ad una cui estremità è fissata una massa puntiforme $m = M/2$ = 1.0 kg. La sbarra può ruotare con **attrito trascurabile** attorno ad un perno, inchiodato su una parete rigida verticale, che la attraversa ad una distanza $L_1 = L/4$ da una sua estremità (vedi figura). Inizialmente il sistema è tenuto in equilibrio nella configurazione geometrica di figura (l'angolo indicato vale $\theta_0 = \pi/3$) da una fune inestensibile un cui estremo è vincolato ad un'altra parete rigida verticale. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2;$ può esservi utile ricordare il "teorema degli assi paralleli", che recita $I' = I_{CM} + Md^2$, con M massa dell'oggetto considerato e d distanza tra i due assi paralleli considerati, uno dei quali passa per il centro di massa]
   a) Quanto valgono, **in modulo**, la tensione T della fune e la forza F esercitata dal perno sul cilindro?

T = …………………………………… ~ ………. N $(Mg(L/4)+3mg(L/4))sin\theta_0/((L/4)cos\theta_0) = 5Mgtg\theta_0/2$ ~ 85 N [per l'equilibrio rotazionale del sistema per rotazioni attorno ad un asse passante per il perno occorre che siano bilanciati i momenti delle forze. Le sole forze esterne che fanno momento sono la forza peso della sbarra, applicata al centro di massa della sbarra stessa, cioè a metà della sua lunghezza (la sbarra è omogenea!), la forza peso della massa puntiforme e la tensione della fune. Le forze peso danno luogo a momenti che tendono a far ruotare la sbarra in verso antiorario, la tensione della fune in verso orario. Dunque è sufficiente uguagliare i moduli. La risposta si ottiene notando che il braccio della forza peso agente sulla sbarretta è $Lsin\theta_0/4$ mentre quello della forza peso agente sulla massa è $3Lsin\theta_0/4$ (per banali ragioni geometriche) mentre il braccio della tensione della fune è $Lcos\theta_0/4$ (per ragioni altrettanto banali!)]

F = …………………………………… ~ ………. N $(T^2+((M+m)g)^2)^{1/2} = Mg(25tg^2\theta_0/4 + 9/4)^{1/2}$ ~ 57 N [per l'equilibrio traslazionale del sistema occorre che tutte le forze esterne si annullino. Queste forze valgono in modulo $2Mg$ (in direzione verticale, notate che anche il cilindro ha la sua massa!) e T (in direzione orizzontale), da cui la soluzione]

b) Supponete ora che la fune venga rimossa e che il sistema venga configurato (attraverso opportune condizioni iniziali) in modo da compiere piccole oscillazioni attorno alla direzione verticale. Come si scrive l'equazione del moto rotazionale $\alpha(\theta)$ per le piccole oscillazioni? Quanto vale il periodo t delle piccole oscillazioni? [Ricordate che, per $\theta << 1$, $sin\theta \sim \theta$; **non** usate valori numerici nell'espressione dell'equazione del moto; servitevi piuttosto delle espressioni letterali dei parametri noti del problema]

$\alpha(\theta)$ = …………………………………… $-(Mg(L/4)+3mg(L/4))\theta/I_{TOT} = -(g/L)(5/8)\theta/(41/96) = -(60g/(41L))\theta$

[l'equazione del moto rotazionale recita $\alpha = \Sigma\tau/I_{TOT}$. In assenza di fune, agiscono solo i momenti delle forze peso, cioè (tenendo conto in modo opportuno del segno), $\Sigma\tau = -(Mg(L/4)sin\theta+mg(3L/4)sin\theta) \sim -Mg(L/4)(1+3/2)\theta$, dove si è tenuto conto della relazione tra le masse e delle piccole oscillazioni. Il momento di inerzia totale è $I_{TOT}=I_{sb}+I_m$, con $I_m = m(3L/4)^2 = 9ML^2/32$. Il momento di inerzia della sbarretta, che ruota attorno ad un asse distante $d=L/4$ dal CM, si ottiene dal teorema degli assi paralleli e vale $I_{sb} = ML^2/12+M(L/4)^2 = 7ML^2/48$, da cui $I_{TOT}=41ML^2/96$ e quindi la soluzione]

t = …………………………………… ~ …….. s $2\pi(41L/(60g))^{1/2}$ ~ 1.7 s [la pulsazione del moto armonico soluzione della precedente equazione del moto rotazionale stabilisce $\omega = (60g//41L)^{1/2}$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 19/12/2008 Firma: