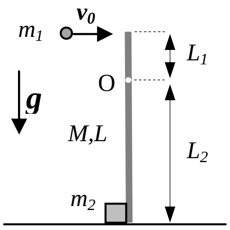
A

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 7/4/2009

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un'asta **sottile** omogenea, di lunghezza L=20 cm e massa M=0.90 kg, è imperniata nel punto O che dista $L_1=L/4$ da un suo estremo in modo da poter ruotare **con attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente l'asta si trova in equilibrio in direzione verticale e, come rappresentato in figura, il suo estremo "inferiore", che si trova a distanza $L_2=3L/4$ dal perno, è **a contatto** con un oggetto **puntiforme** di massa m_2=0.10 kg. Ad un certo istante, un proiettile puntiforme di massa m_1=90 g incide sull'estremo "superiore" dell'asta con velocità di direzione orizzontale e modulo $v_0=1.0\mathrm{x}10^2$ m/s, **rimanendovi conficcato**. In seguito all'urto con il proiettile, l'asta comincia a ruotare e l'oggetto m_2, spinto dall'estremo dell'asta, prende a muoversi con attrito trascurabile lungo la direzione orizzontale. [**Suggerimento**: tenete conto che, subito dopo l'urto, l'oggetto m_2 inizia a muoversi con la stessa velocità tangenziale dell'estremo "inferiore" dell'asta, essendo a contatto con questa; per il calcolo, può farvi comodo ricordare il "teorema degli assi paralleli", che recita: $I=I_{CM}+md^2$, dove I_{CM} è il momento di inerzia rispetto al CM, m è la massa del corpo rigido e d la distanza tra l'asse considerato ed il CM (gli assi devono essere paralleli)]



   a) Discutete in modo chiaro, in brutta, quali grandezze del sistema si conservano nel processo di urto tra: quantità di moto, energia cinetica, momento angolare; spiegate bene il perché!
   Discussione e spiegazione: …………………………………… l'energia cinetica non si conserva dato che l'urto è anelastico, e parte dell'energia cinetica viene spesa nella penetrazione ed arresto del proiettile all'interno dell'asta. La quantità di moto non si conserva, dato che il perno può esercitare forze impulsive sull'asta, e quindi il sistema non è isolato durante l'urto. Dato che le forze del perno sono esercitate nel polo (punto O), il loro braccio è nullo e quindi il sistema può essere considerato isolato rispetto ai momenti delle forze esterne durante il processo di urto. In conseguenza, l'unica grandezza che si conserva è il momento angolare assiale (lungo la direzione ortogonale al foglio).

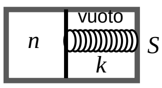
   b) Quanto vale il modulo della velocità v_2 con cui l'oggetto di massa m_2 comincia a muoversi **subito dopo** l'urto fra proiettile e asta?
   v_2 = …………………………………… = …….. m/s $v_0 9m_1/(7M+3m_1+27m_2)$ = 9.0 m/s [la conservazione del momento angolare rispetto ad O implica che: $m_1v_0L_1 = I'\omega+m_2v_2L_2$, con I' momento di inerzia del sistema composto costituito da asta e proiettile conficcato. Sfruttando il suggerimento dato nel testo, si ha $\omega = v_2/L_2$. Inoltre si ha $I'=I_{ASTA}+I_{PROIETTILE}$, con $I_{PROIETTILE}=m_1L_1^2$. Ricordando che, per un'asta sottile omogenea, si ha $I_{CM}=ML^2/12$ ed usando il teorema degli assi paralleli, si ha poi $I_{ASTA}=I_{CM}+M(L/2-L_1)^2=ML^2(1/12+1/16)=7ML^2/48$; pertanto si ottiene $I' = (L^2/48)(7M+3m_1)$. Si ottiene quindi: $v_2=v_0 (m_1L/4) / (I'/(3L/4)+m_2(3L/4))$ da cui, sostituendo e semplificando dove possibile, la soluzione. Notate che la v_2 ha verso opposto a quello di v_0, ma il contributo del movimento di m_2 al momento angolare assiale ha lo stesso segno di quello di m_1 (iniziale), come si può facilmente verificare con la regola della manoo destra per il prodotto vettoriale, che è alla base della definizione del momento angolare]

2. Una quantità n = 0.200 moli di gas perfetto monoatomico compie un ciclo costituito dalla sequenza delle seguenti trasformazioni che si possono considerare **reversibili**: espansione adiabatica A→B, isocora B→C, compressione adiabatica C→D, isocora D→A. Si sa che $P_A=2P_D$ e $P_B=2P_C$. [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti; disegnate per benino, in brutta, il ciclo descritto sul piano VP, stando attenti a considerare i rapporti tra le pressioni dati nel testo]

   a) Quanto valgono le variazioni di entropia ΔS_{BC} e ΔS_{DA}? [Può farvi comodo sapere che $ln(2)$~0.693]
   ΔS_{BC} = ……………………………………~ ……… J/K $n(3R/2)ln(P_C/P_B)$~ -1.73 J/K [la trasformazione considerata è un'isocora reversibile, per cui $\Delta S_{BC}=nc_V ln(T_C/T_B)=nc_V ln(P_C/P_B)$, dove l'ultimo passaggio si deve alla legge delle isocore reversibili. Tenendo conto che, per un gas perfetto monoatomico, si ha $c_V=3R/2$, si ottiene la soluzione]
   ΔS_{DA} = ……………………………………~ ……… J/K $-\Delta S_{BC}$)~ 1.73 J/K [dato che la variazione di entropia è nulla sull'intero ciclo, che oltre alle isocore comprende due isoentropiche (adiabatiche reversibili), si ottiene il risultato. Notate che da questo consegue che $T_C/T_B=T_D/T_A$, come ovvio tenendo conto anche delle informazioni del testo relative alle pressioni]

   b) Sapendo anche che $V_B=4V_A$, quanto vale l'efficienza η del ciclo?
   η = …………………………………… ~ ………. $1-(V_A/V_B)^{2/3}$ ~ 0.603 [si ha per definizione $\eta = 1+Q_{ced}/Q_{ass}$. Il calore viene ceduto nella B→C ed assorbito nella D→A e quindi è: $\eta = 1+nc_V(T_C-T_B)/(nc_V(T_A-T_D))=1+(T_B/T_A)(T_C/T_B-1)/(1-T_D/T_A) = 1+(T_B/T_A)(P_C/P_B-1)/(1-P_D/P_A)=1-T_B/T_A$. Tenendo conto che la A→B è un'adiabatica reversibile, si ha $T_B/T_A=(V_A/V_B)^{\gamma-1}=(V_A/V_B)^{2/3}$, dove si è tenuto conto del fatto che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V$ = 5/3. Da qui esce la soluzione]

3. Una quantità n = 500 moli di gas perfetto monoatomico è contenuta in un recipiente separato in due camere da un setto a tenuta, scorrevole senza attrito (in una camera si trova il gas, nell'altra è fatto il vuoto pneumatico). Il setto, che ha **massa trascurabile**, è collegato tramite una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 2.00\mathrm{x}10^5$ N/m ad una parete (rigida e indeformabile) del recipiente, come rappresentato schematicamente in figura. Inizialmente il gas si trova a temperatura T_0 = 350 K e la molla è compressa per un tratto Δ_0 = 50.0 cm (la condizione è di **equilibrio**). [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]



   a) Sapendo che l'area della sezione del contenitore è S = 100 cm^2, quanto vale la pressione iniziale P_0 del gas?
   P_0 = …………………………………… = ………. Pa $k\Delta_0/S$ =1.00x10^7 Pa [all'equilibrio la forza esercitata dalla molla deve uguagliare la forza di pressione del gas, da cui la soluzione]

   b) Supponete ora che il recipiente, che ha pareti permeabili al calore, venga tuffato in una tinozza contenente una massa M=5.00 kg di acqua alla temperatura T_{A0}=300 K [considerate per l'acqua un calore specifico costante $c_A=4.18\mathrm{x}10^3$ J/(kg K)]. Sapendo che la tinozza è chiusa da un involucro di materiale **isolante termico**, supponendo trascurabile la capacità termica del contenitore del gas e dei suoi componenti (gas escluso!) e osservando che, al termine del processo di termalizzazione, cioè ad equilibrio termico raggiunto, la molla viene ad assumere la compressione Δ = 40.0 cm (cioè essa si è estesa e il gas si è compresso), quanto vale la temperatura finale di equilibrio T del sistema? [Trascurate ogni scambio di calore eccetto quello che avviene tra gas e acqua]
   T = …………………………………… = ………. K $(3nRT_0+2Mc_AT_{A0}-k(\Delta^2-\Delta_0^2)/(3nR+2Mc_A)$ = 312 K [per raggiungere l'equilibrio termico il gas cederà una quantità Q di calore, che sarà assorbito dall'acqua. Dovrà quindi essere $0 = Q+Mc_A(T-T_{A0})$. D'altra parte per il primo principio si ha Q

= $L+\Delta U$, dove L rappresenta il lavoro compiuto (o subito, come in questo caso) dal gas. Questo lavoro può essere valutato tenendo conto del lavoro fatto dalla molla: $L = -L_{MOLLA} = (k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2)$. Inoltre $\Delta U=nc_V(T-T_0)= n(3R/2)(T-T_0)$. Da qui si ottiene un'equazione la cui soluzione fornisce la risposta al quesito; notate che, numericamente, la compressione del gas comporta un'energia praticamente trascurabile, per cui lo stesso risultato numerico si ottiene anche trascurando (o formulando in modo erroneo) il lavoro subito dal gas]

4. Un tubo orizzontale con sezione di area S = 5.0 cm^2 è interessato da un flusso stazionario ed omogeneo di acqua (da considerare come un fluido ideale **non viscoso**). Questo tubo viene usato per riempire un secchio di volume V = 20 litri.
   a) Sapendo che per riempire il secchio occorre un tempo Δt = 10 s, quanto vale la velocità v dell'acqua nel tubo? [Nella zona di tubo considerata non si trovano ovviamente né pozzi né sorgenti]
   v = …………………………………… = ……… m/s $Q_V/S = V/(S\ \Delta t)$ = 4.0 m/s [la portata in volume è $Q_V = V/\Delta t = Sv$, da cui la soluzione]

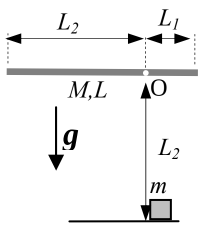
Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 7/4/2009 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 7/4/2009

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un'asta **sottile** omogenea, di lunghezza L=98 cm e massa M=0.27 kg, è imperniata nel punto O che dista $L_1=L/4$ da un estremo in modo da poter ruotare **con attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente l'asta è mantenuta in direzione orizzontale, come rappresentato in figura, da una forza esterna, che ad un dato istante viene improvvisamente rimossa: l'asta comincia allora a ruotare in verso antiorario (rispetto alla figura) partendo da ferma. Quando si trova in direzione verticale, essa **urta** in modo **completamente elastico** un oggetto puntiforme di massa m=70 g, che si trovava inizialmente fermo a distanza L_2 "sotto" il punto O; tale oggetto è libero di scivolare senza attrito lungo la direzione orizzontale. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; per il calcolo, può farvi comodo ricordare il "teorema degli assi paralleli", che recita: $I=I_{CM}+md^2$, dove I_{CM} è il momento di inerzia rispetto al CM, m è la massa del corpo rigido e d la distanza tra l'asse considerato ed il CM (gli assi devono essere paralleli)]



a) Quanto vale la velocità angolare ω_0 che l'asta possiede quando si trova in direzione verticale, cioè **subito prima** dell'urto con l'oggetto puntiforme? [Ricordate che la rotazione dell'asta avviene con attrito trascurabile!]

ω_0 = …………………………………… ~ ……… rad/s $(MgL/(2I))^{1/2} = (24g/(7L))^{1/2} \sim$ 5.8 rad/s [si conserva l'energia meccanica, per cui $\Delta E_K=(I/2)\omega_0^2=-\Delta U_G=Mg(L-L_1)=MgL/4$, dove si è tenuto conto del fatto che l'energia potenziale gravitazionale varia a causa della variazione di quota del centro di massa dell'asta, il quale scende verso il basso per un tratto $|L-L_1|=L/4$. Il momento di inerzia dell'asta per una rotazione ttorno al polo O può essere calcolato usando il teorema degli assi paralleli (vedi risposta al quesito 1a del compitino A), ottenendo $I = 7ML^2/48$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta **subito dopo** l'urto con l'oggetto puntiforme? [Suggerimento: considerate attentamente tutte le conservazioni di grandezze rilevanti. **Nota bene**: la soluzione numerica completa può rivelarsi difficoltosa: se non ci riuscite, lasciate chiaramente indicate le equazioni che vanno risolte usando le espressioni letterali dei dati noti del problema, senza ostinarvi nella soluzione!]

ω = …………………………………… ~ …….. rad/s $-\omega_0(1-7M/(27m))/(1+7M/(27m)) = 9\omega_0/11 \sim$ 4.8 rad/s [nell'urto si conservano l'energia cinetica totale del sistema (l'urto è dichiarato elastico) e il momento angolare (la quantità di moto non si conserva a causa di forze impulsive che agiscono sul perno, le quali, avendo braccio nullo, non modificano il momento angolare). Si possono dunque scrivere due equazioni: $(I/2)\omega_0^2 = (I/2)\omega^2+(m/2)v^2$; $I\omega_0 = I\omega+mvL_2$, dove v indica la velocità dell'oggetto puntiforme subito dopo l'urto. La soluzione del sistema di queste due equazioni porta alla risposta, per ottenere la quale conviene esprimere esplicitamente I secondo quanto trovato nella risposta al quesito precedente ed eseguire un po' di algebra (sostituzioni, semplificazioni, etc,)]

2. Una quantità n = 0.200 moli di gas perfetto monoatomico compie un ciclo costituito dalla sequenza delle seguenti trasformazioni che si possono considerare **reversibili**: espansione adiabatica A→B, compressione isobara B→C, compressione adiabatica C→D, espansione isobara D→A. Si sa che $V_A=2V_D$ e $V_B=2V_C$. [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto valgono le variazioni di entropia ΔS_{BC} e ΔS_{DA}? [Può farvi comodo sapere che $ln(2)$~0.693; disegnate per benino, in brutta, il ciclo descritto sul piano VP]

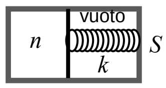
ΔS_{BC} = ……………………………………~ ……… J/K $n(5R/2)ln(V_C/V_B) \sim$ -2.88 J/K [la trasformazione considerata è un'isobara reversibile, per cui $\Delta S_{BC}=nc_P ln(T_C/T_B)=nc_P ln(V_C/V_B)$, dove l'ultimo passaggio si deve alla legge delle isobare reversibili. Tenendo conto che, per un gas perfetto monoatomico, si ha $c_P=5R/2$, si ottiene la soluzione]

ΔS_{DA} = ……………………………………~ ……… J/K $-\Delta S_{BC}$)~ 2.88 J/K [dato che la variazione di entropia è nulla sull'intero ciclo, che oltre alle isobare comprende due isoentropiche (adiabatiche reversibili), si ottiene il risultato. Notate che da questo consegue che $T_C/T_B=T_D/T_A$, come ovvio tenendo conto anche delle informazioni del testo relative alle pressioni]

b) Sapendo anche che $V_B=4V_A$, quanto vale l'efficienza η del ciclo?

η = …………………………………… ~ ………. $1-(V_A/V_B)^{2/3} \sim$ 0.603 [si ha per definizione $\eta = 1+Q_{ced}/Q_{ass}$. Il calore viene ceduto nella B→C ed assorbito nella D→A e quindi è: $\eta = 1+nc_P(T_C-T_B)/(nc_P(T_A-T_D))=1+(T_B/T_A)(T_C/T_B-1)/(1-T_D/T_A) = 1+(T_B/T_A)(V_C/V_B-1)/(1-V_D/V_A)=1-T_B/T_A$. Tenendo conto che la A→B è un'adiabatica reversibile, si ha $T_B/T_A=(V_A/V_B)^{\gamma-1}=(V_A/V_B)^{2/3}$, dove si è tenuto conto del fatto che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V$ = 5/3. Da qui esce la soluzione]

3. Una quantità n = 500 moli di gas perfetto monoatomico è contenuta in un recipiente separato in due camere da un setto a tenuta, scorrevole senza attrito (in una camera si trova il gas, nell'altra è fatto il vuoto pneumatico). Il setto, che ha **massa trascurabile**, è collegato tramite una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 2.00x10^6 N/m ad una parete (rigida e indeformabile) del recipiente, come rappresentato schematicamente in figura. Inizialmente il gas si trova a temperatura T_0 = 313 K e la molla è compressa per un tratto Δ_0 = 50.0 cm (la condizione è di **equilibrio**). [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]



a) Sapendo che l'area della sezione del contenitore è S = 0.100 m^2, quanto vale la pressione iniziale P_0 del gas?

P_0 = …………………………………… = ………. Pa $k\Delta_0/S$ =1.00x10^7 Pa [all'equilibrio la forza esercitata dalla molla deve uguagliare la forza di pressione del gas, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che il recipiente, che ha pareti permeabili al calore, venga messo in una tinozza contenente un'**enorme** quantità di ghiaccio fondente, cioè una miscela di ghiaccio ed acqua che si trovano alla temperatura di fusione del ghiaccio (0 ^{0}C), il cui calore latente di fusione vale λ_F = 3.33x10^5 J/kg Sapendo che la tinozza è chiusa da un involucro di materiale **isolante termico**, supponendo trascurabile la capacità termica del contenitore del gas e dei suoi componenti (gas escluso!) e osservando che, al termine del processo di termalizzazione, cioè ad equilibrio termico raggiunto, la molla viene ad assumere la compressione Δ = 40.0 cm (cioè essa si è espansa e il gas si è compresso rispetto alla situazione iniziale), quanto vale la massa di ghiaccio Δm che si è sciolta? [Trascurate ogni scambio di calore eccetto quello che avviene tra gas e acqua e supponete che Δm sia molto minore della massa iniziale del ghiaccio presente nella tinozza]

Δm= …………………………………… = ………. kg $-((k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2)+n(3R/2)(T_{FUS}-T_0))/\lambda_F$ = 1.02 kg [Dato che la quantità di ghiaccio che si scioglie è molto minore della quantità di ghiaccio inizialmente presente nella tinozza, questa si comporta da termostato: pertanto all'equilibrio termico la temperatura del sistema sarà $T_{FIN}=T_{FUS}=0$ ^{0}C = 273 K. Per raggiungere l'equilibrio termico a tale temperatura il gas cederà una quantità Q di calore, che sarà assorbito dall'acqua. Dovrà quindi essere $0 = Q+\lambda_F\Delta m$. D'altra parte per il primo principio si ha $Q = L+\Delta U$, dove L rappresenta il lavoro compiuto (o subito, come in questo caso) dal gas. Questo lavoro può essere valutato tenendo conto del lavoro fatto dalla molla: $L = -L_{MOLLA} = (k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2)$. Inoltre $\Delta U=nc_V(T_{FIN}-T_0)= n(3R/2)(T_{FIN}-T_0)$. Da qui si ottiene un'equazione la cui soluzione fornisce la risposta al quesito]

4. Un tubo orizzontale con sezione circolare di area S = 5.0 cm^2 è interessato da un flusso stazionario ed omogeneo di acqua che si muove alla velocità v = 2.0 m/s. [Considerate l'acqua come un fluido ideale **non viscoso**; nella zona di tubo considerata non si trovano né pozzi né sorgenti]

a) Quanto vale il flusso del vettore velocità del fluido $\Phi_{S'}(\mathbf{v})$ calcolato su una superficie S' di forma circolare, area S' = 50 cm^2, posta in direzione ortogonale all'asse del tubo e concentrica con questo?

$\Phi_{S'}(\mathbf{v})$ = …………………………………… = ………. m^3/s Sv = 1.0x10^{-3} m^3/s [per definizione, è $\Phi_{S'}(\mathbf{v}) = \int_{S'} \mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\, ds$. Quando si esegue questo integrale occorre tenere presente che $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{n}$ sono paralleli tra loro (o antiparalleli, la scelta del verso del versore ortogonale alla superficie su cui si calcola il flusso è arbitraria, ma la scelta "naturale" è quella di prenderlo parallelo a $\mathbf{v}$) e che, ovviamente, $\mathbf{v}$ =0 fuori dal tubo. Quindi il flusso coincide con la portata in volume del tubo, che vale $Q_V = Sv$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

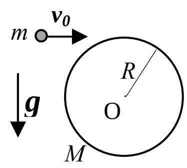
Pisa, 7/4/2009 Firma:

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 3 - 7/4/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………   Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un cilindro omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 10 cm è imperniato sul suo asse (punto O) in modo da poter ruotare **con attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente il cilindro è fermo; ad un dato istante un piccolo oggetto di massa $m = M/20$ = 50 g incide sulla superficie laterale del cilindro avendo una velocità diretta **orizzontalmente** di modulo v_0 = 10 m/s. La figura rappresenta una schematizzazione del problema prima dell'impatto tra oggetto e cilindro: si noti che la traiettoria dell'oggetto è tangente alla superficie laterale, in modo che l'oggetto "sfiora" il cilindro. La superficie laterale del cilindro è scabra (presenta un certo attrito): in seguito all'"impatto" con l'oggetto, si osserva che il cilindro si mette in rotazione con velocità angolare ω e che l'oggetto **prosegue** il suo movimento con una velocità che, **subito dopo** l'impatto, è sempre orizzontale ed ha modulo $v' = v_0/4$.



   a) Quanto vale, in modulo, la velocità angolare ω del cilindro **subito dopo** l'impatto? [Fate attenzione a considerare quali grandezze si conservano nel processo, tenendo anche conto della domanda successiva; spiegate bene, in brutta, le motivazioni che sono dietro alla vostra soluzione]

   ω = …………………………………… = ……… rad/s $|2m(v_0-v)/(MR)| = 3mv_0/(4MR) = (3/40)v_0/R$ = 7.5 rad/s [nel processo si conserva solamente il momento angolare; infatti non ci sono indicazioni a priori sul fatto che si conservi l'energia cinetica del sistema e il sistema non può essere considerato isolato a causa delle forze impulsive trasmesse dal perno. Però tali forze hanno braccio, e dunque momento delle forze, nullo rispetto al polo di rotazione (il perno), per cui si conserva il momento angolare complessivo del sistema (si intende in direzione assiale, quella ortogonale al foglio). Infatti le forze di attrito che si sviluppano sulla superficie del cilindro, pur non avendo braccio (e dunque momento) nullo, sono interne al sistema e quindi non alterano il momento angolare complessivo . La conservazione del momento angolare, considerando gli istanti immediatamente precedenti e successivi all'impatto, si scrive: $mv_0R = I\omega + mv'R$. Poiché $I = (M/2)R^2$, semplificando si ottiene la soluzione]

   b) L'impatto, che sicuramente non può essere considerato alla stregua di un urto anelastico, può essere considerato **completamente** elastico? Date una risposta convincente, calcolando il valore della differenza di energia cinetica ΔE_K.

   Carattere puramente elastico (scrivete sì o no): ….. no

   ΔE_K= …………………………………… ~ …….. J $(I/2)\omega^2 + (m/2)(v'^2 - v_0^2) = (MR^2/4)(3mv_0/(4MR))^2 - (m/2)(7v_0^2/16) = (mv_0^2/32)(18m/M-7)$ = - 0.95 J [il calcolo è immediato ricordando che, dopo l'urto, l'energia cinetica compete sia all'oggetto che al cilindro. Il risultato è ovviamente negativo, a indicare che parte dell'energia cinetica iniziale è stata spesa attraverso il processo di attrito tra oggetto e cilindro per mettere in moto quest'ultimo. Dunque il processo non può essere raffigurato come un urto puramente elastico]

2. Una quantità n = 0.200 moli di gas perfetto monoatomico compie un ciclo costituito dalla sequenza delle seguenti trasformazioni che si possono considerare **reversibili**: espansione adiabatica A→B, isocora B→C, compressione adiabatica C→D, espansione isobara D→A. Si sa che $V_A=2V_D$ e $P_B=2^{5/3}P_C$. [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti; disegnate per benino, in brutta, il ciclo descritto sul piano VP, considerando il rapporto tra le pressioni dell'isocora dato nel testo]

   a) Quanto valgono le variazioni di entropia ΔS_{BC} e ΔS_{DA}? [Può farvi comodo sapere che $ln(2)$~0.693]

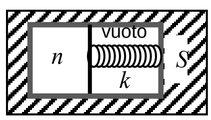
   ΔS_{BC} = ……………………………………~ ……… J/K $n(3R/2)ln(P_C/P_B) = n(3R/2)ln(1/2^{5/3}) = -n(3R/2)(5/3)ln(2) = -n(5R/2)ln(2)$ ~ -2.88 J/K [(ATTENZIONE: nel testo consegnato per lo svolgimento c'era un refuso nel rapporto P_B/P_C , indicato erroneamente come 2 invece che come $2^{5/3}$. Ciò comportava un'assurdità, dato che non si verificava $\Delta S_{BC}=-\Delta S_{DA}$, come richiesto dal ciclo (vedi dopo). Nella correzione si è debitamente considerato questo problema, valutando correttamente gli sforzi degli studenti a prescindere dal risultato finale.) La trasformazione considerata è un'isocora reversibile, per cui $\Delta S_{BC}=nc_V ln(T_C/T_B)=nc_V ln(P_C/P_B)$, dove l'ultimo passaggio si deve alla legge delle isobare reversibili. Tenendo conto che, per un gas perfetto monoatomico, si ha $c_V=3R/2$, si ottiene la soluzione]

   ΔS_{DA} = ……………………………………~ ……… J/K $-\Delta S_{BC}$)~ 2.88 J/K   [dato che la variazione di entropia è nulla sull'intero ciclo, che oltre all'isocora e all'isobara comprende due isoentropiche (adiabatiche reversibili), si ottiene il risultato. Questo risultato è confermato dal calcolo diretto che, tenendo conto della trasformazione isobara, stabilisce $\Delta S_{DA}=nc_P ln(V_A/V_D)=n(5/2)Rln(2)$, essendo $c_P=(5/2)R$]

   b) Sapendo anche che $V_B=4V_A$, quanto vale l'efficienza η del ciclo?

   η = …………………………………… ~ ……… $1-(6/5)(V_A/V_B)^{2/3}(1-1/2^{5/3})$ ~ 0.674   [si ha per definizione $\eta = 1+Q_{ced}/Q_{ass}$. Il calore viene ceduto nella B→C ed assorbito nella D→A e quindi è: $\eta = 1+nc_V(T_C-T_B)/(nc_P(T_A-T_D)) = 1+(3/5)(T_B/T_A)(T_C/T_B-1)/(1-T_D/T_A) = 1+(3/5)(T_B/T_A)(P_C/P_B-1)/(1-V_D/V_A) = 1-(6/5)(T_B/T_A)(1-1/2^{5/3})$. Tenendo conto che la A→B è un'adiabatica reversibile, si ha $T_B/T_A=(V_A/V_B)^{\gamma-1}=(V_A/V_B)=(1/4)^{2/3}$, dove si è tenuto conto del fatto che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V$ = 5/3. Da qui esce la soluzione]

3. Una quantità n = 50.0 moli di gas monoatomico che può essere considerato perfetto, è contenuta in un recipiente separato in due camere da un setto a tenuta, scorrevole senza attrito (in una camera si trova il gas, nell'altra è fatto il vuoto pneumatico). Il setto, che ha **massa trascurabile**, è collegato tramite una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 2.00x10^5 N/m ad una parete (rigida e indeformabile) del contenitore, come rappresentato schematicamente in figura. Il contenitore ha pareti fatte di **isolante termico**; la capacità termica sua e di quanto vi è contenuto, gas a parte, può essere considerata trascurabile. Inizialmente il gas si trova alla temperatura T_0 = 300 K; in queste condizioni la molla è compressa per un tratto Δ_0 = 40.0 cm (la condizione è di **equilibrio**). [Usate il valore R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]



   a) Sapendo che l'area della sezione (interna) del contenitore è S = 10 cm^2, quanto vale la pressione iniziale P_0 del gas?

   P_0 = …………………………………… = ……… Pa $k\Delta_0/S$ =8.00x10^7 Pa   [all'equilibrio la forza esercitata dalla molla deve uguagliare la forza di pressione del gas, da cui la soluzione]

   b) Ad un dato istante, per una qualche ragione, il gas esplode e al suo interno si libera improvvisamente una certa quantità q = 2.00x10^4 J di energia. In seguito all'esplosione, dopo aver aspettato il raggiungimento di una nuova condizione di equilibrio, si osserva che il setto si è spostato in modo che la molla sia compressa per un tratto Δ = 50.0 cm (la molla si è compressa ed il gas si è espanso). Quanto vale la nuova temperatura di equilibrio T del gas? [Tenete conto che l'energia liberata dall'esplosione viene assorbita dal gas sotto forma di calore]

T= …………………………………… = ……… K $\quad (q-L)/(nc_V) + T_0 = 2(q-(k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2))/(3nR)$ = 318 K [poiché il contenitore è rivestito di isolante termico e la capacità termica dei suoi componenti è nulla, è ovvio che l'energia q generata dall'esplosione viene assorbita come calore dal gas. Per il primo principio deve allora essere: $q = L+\Delta U$, dove L rappresenta il lavoro compiuto dal gas e $\Delta U=nc_V(T-T_0)= n(3R/2)(T-T_0)$. Il lavoro L può essere valutato tenendo conto del lavoro fatto dalla molla: $L = -L_{MOLLA} = (k/2)(\Delta^2-\Delta_0^2)$ (attenti ai segni: questa scelta dà un lavoro positivo del gas, come deve essere per l'espansione) da cui la soluzione. Notate che, certamente, la trasformazione considerata **non** è reversibile!]

4. Un tubo orizzontale con sezione di area S = 5.0 cm^2 è interessato da un flusso stazionario ed omogeneo di acqua che si muove alla velocità v = 2.0 m/s. [Considerate l'acqua come un fluido ideale **non viscoso**; nella zona di tubo considerata non si trovano né pozzi né sorgenti]

a) Quanto vale il flusso del vettore velocità del fluido $\Phi_{S'}(\mathbf{v})$ calcolato su una superficie S' che taglia per intero il tubo come una fetta di salame (inclinata di $\theta = \pi/4$ rispetto all'orizzontale)? [Spiegate bene, in brutta, la soluzione]

$\Phi_{S'}(\mathbf{v})$ = …………………………………… = ……… m^3/s $\quad Sv = 1.0\times10^{-3}$ m^3/s [in assenza di pozzi o sorgenti tante linee di flusso passano per la sezione S del tubo quante ne passano per la sezione S' . Dunque il flusso deve essere lo stesso, da cui la soluzione. Alternativamente, si può considerare il flusso attraverso una scatola (chiusa) che ha per basi le due sezioni considerate: essendo il flusso complessivo nullo, si ottiene ancora la soluzione. Da ultimo, volendo, se si ha competenza di integrazione superficiale si può provare a calcolare direttamente l'integrale $\Phi_{S'}(\mathbf{v}) = \int_{S'} \mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\, ds$, dimostrando direttamente che esso fornisce il risultato riportato nella soluzione (basta notare che il prodotto scalare fornisce un termine $\cos\theta$ e che la superficie S' vale $S/\cos\theta$)]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 7/4/2009 Firma: