A

Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 20/11/2009

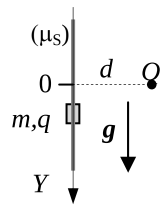
Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove su un piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R (incognito) con accelerazione **angolare** α = 2.0 rad/s^2 **costante e uniforme**. Inoltre si sa che all'istante t_0 = 0 esso parte da fermo dalla posizione angolare θ_0 = 0 e che all'istante t' = 1.0 s esso ha accelerazione di **modulo** a' = 5.0 m/s^2.
   a) Quanto vale il raggio R della traiettoria circolare? [Ricordate che l'accelerazione, in generale, è un vettore!]
   R = …………………………………… ~ ………. m $a/(\alpha(1+\alpha^2 t'^4)^{1/2})$ ~ 1.1 m [in un moto circolare l'accelerazione è un vettore che ha due componenti ortogonali tra loro; conviene fare riferimento alle componenti radiali e tangenziali che in modulo sono: $a_R = a_{centr} = \omega^2 R$ e $a_T = \alpha R$. Poiché il moto è uniformemente accelerato, si ha $\omega(t) = \alpha t$, dove si è tenuto conto della condizione iniziale sulla velocità. Ricordando significato ed espressione del modulo di un vettore (teorema di Pitagora!), deve essere: $a' = (a_R'^2+a_T^2)^{1/2}$, da cui la soluzione]

   b) In quale istante t'' l'oggetto avrà percorso per intero e per la prima volta un giro completo della sua traiettoria?
   t'' = …………………………………… ~ ………. s $(4\pi/\alpha)^{1/2}$ ~ 2.5 s [tenendo conto delle condizioni iniziali date, la legge oraria del moto angolare recita $\theta(t) = (\alpha/2)t^2$. La soluzione si ottiene imponendo $\theta(t'') = 2\pi$ (lo spostamento angolare corrispondente a un giro completo)]

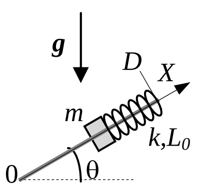
2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere lungo una guida rigida (un tondino) disposto in direzione verticale. Il manicotto reca una carica elettrica q = 1.0x10^{-4} C; un'altra carica puntiforme, di valore $Q = -q$ (i segni sono opposti), si trova **fissata** nello spazio nella posizione indicata in figura, che è a una distanza d = 1.0 m rispetto alla guida. La figura mostra anche il sistema di riferimento (asse Y) che **dovete** usare: esso è verticale, diretto verso il basso e centrato "alla stessa quota" della carica Q.



   a) Supponete per questa domanda che il manicotto possa muoversi lungo la guida con **attrito trascurabile**. Come si scrive l'equazione del moto del manicotto, $a(y)$? Come si scrive la funzione $N(y)$ che esprime il modulo della reazione vincolare esercitata dalla guida sul manicotto per una posizione generica y? [Nelle risposte **non** dovete utilizzare valori numerici, ma dovete limitarvi a esprimere funzioni della coordinata y del manicotto, rispetto all'asse Y di figura, mettendoci dentro le espressioni letterali dei dati noti del problema e usando i simboli g e κ_E per indicare il modulo dell'accelerazione di gravità e della costante del campo elettrico nel vuoto, rispettivamente]
   $a(y)$ = …………………………………… $g - (\kappa_E/m)q^2y/(d^2+y^2)^{3/2}$ [il manicotto si muove sotto l'effetto della forza peso, mg , e della componente verticale della forza elettrica tra le due cariche puntiformi, che ha **modulo** pari a $\kappa_E q^2/(d^2+y^2)$. La sua proiezione lungo l'asse Y si scrive moltiplicando il modulo per $-y/(d^2+y^2)^{1/2}$, dove il segno negativo tiene conto del carattere attrattivo della forza e dell'orientazione dell'asse indicato. Da qui si ottiene la soluzione]
   $N(y)$ = …………………………………… $\kappa_E q^2 d/(d^2+y^2)^{3/2}$ [la reazione vincolare serve a bilanciare la componente orizzontale della forza elettrica, cioè a uguagliarne il modulo. La componente orizzontale si ottiene moltiplicando la forza elettrica (trovata sopra) per $d/((d^2+y^2)^{1/2})$, da cui la soluzione]

   b) Supponete che la configurazione descritta ammetta una posizione di **equilibrio** y_{EQ} per il manicotto (supponete vuol dire che **non** dovete determinarla, ma solo sapere che ce ne è almeno una). Immaginate poi che, a differenza della situazione considerata nella domanda precedente, la guida sia **scabra** e che il manicotto subisca attrito **statico** con coefficiente di attrito μ_S = 0.50. Quanto vale, in modulo, la forza di attrito F_{AS} quando il manicotto si trova nella posizione y_{EQ} (sempre che si tratti ancora di una posizione di equilibrio)? Come si fa in questo caso a determinare la (o le) possibili posizioni di equilibrio in presenza di questo attrito? Discutete per benino in brutta!
   F_{AS} = …………………………………… = ……….. N 0 [la forza di attrito statico si oppone al moto del manicotto in direzione verticale. Nella posizione indicata, che era di equilibrio, forza peso e componente verticale della forza elettrica si annullano, per cui non c'è alcuna forza che provoca movimento. Dunque l'attrito deve essere nullo!]
   Discussione: …………………………………… la forza di attrito statico vale, **al massimo**, $F_{ASMAX} = \mu_S N(y)$ dove la funzione $N(y)$ è stata determinata sopra. Finché la risultante di forza peso e forza elettrica in direzione verticale (questa risultante si ottiene dalla risposta data prima, moltiplicando per m l'equazione del moto $a(y)$, cioè $F_Y = ma(y)$) è minore, in modulo, della forza di attrito, si ha equilibrio. La condizione dà luogo a un intervallo di posizioni, i cui estremi possono essere individuati risolvendo la complicata equazione algebrica $F_{ASMAX} = F_Y$ (se volete provarci, fatelo pure!)

3. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida e indeformabile (un tondino) di lunghezza D = 2.0 m, fissa su un piano verticale e tale da formare un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, come indicato in figura. Il manicotto è attaccato all'estremo di una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 18 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm, il cui altro estremo è vincolato al punto "superiore" della guida. Nelle soluzioni **dovete** fare uso del sistema di riferimento indicato in figura come asse X, diretto come la guida, orientato in alto e centrato sull'estremo



"inferiore" della guida stessa. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $sin(\pi/6) = 1/2$]

a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto? [Dovete usare il sistema di riferimento indicato e non dovete usare valori numerici per questa risposta, esprimendo i dati noti del problema con i propri simboli "letterali"!]

$a(x)$ = …………………………………… $(k/m)(D-x-L_0)-gsin\theta$ [nella direzione dell'asse, sul manicotto agisce la proiezione della forza peso, $-mgsin\theta$, dove il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse, e la forza elastica, che in modulo vale $k|\Delta|$. Δ è la compressione o elongazione della molla, cioè la differenza tra lunghezza della molla, $L = D - x$, e lunghezza a riposo L_0. Notate che per $\Delta > 0$ (molla estesa) la forza deve avere segno positivo, e viceversa per $\Delta < 0$. Quindi è $F_{ELA} = k(D-x-L_0)$, da cui la risposta]

b) Supponete ora che il manicotto venga spostato (da un operatore esterno) nella posizione $x_0 = D/2$ e che da qui, all'istante t_0=0, venga lasciato libero di muoversi. Quanto vale la velocità v' con cui il manicotto passa per la propria posizione di equilibrio x_{EQ}?

v' = …………………………………… = ……….. m/s $\pm\omega(L_0 +(mg/k)sin\theta - D/2)=(k/m)^{1/2}(L_0 +(mg/k)sin\theta - D/2)$ = 0.13 m/s [la soluzione dell'equazione del moto è armonica, del tipo $x(t) = C\,cos(\omega t+\phi)+x_{EQ}$, con x_{EQ} tale che $a(x_{EQ}) = 0$ [da cui $x_{EQ} = D-L_0-(mg/k)sin\theta$)]. La legge oraria della velocità è $v(t) = -\omega C sin(\omega t+\phi)$. Dovendo essere $v(t=0)$=0, si ha subito $\phi = 0$. Imponendo la condizione iniziale $x_0 = D/2$ si ottiene $C = L_0+(mg/k)sin\theta - D/2$. In questo moto armonico la posizione di equilibrio viene raggiunta quando $cos(\omega t') = 0$, cioè quando $sin(\omega t') = \pm1$. Dunque la velocità vale $v' = \pm\, \omega\, C$, dove il segno è negativo nelle fasi di risalita e positivo altrimenti, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 20/11/2009 Firma:

B

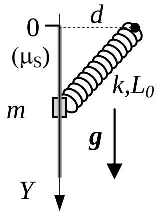
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 20/11/2009

Nome e cognome: ………………………………………………………. Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano orizzontale *XY* sotto l'azione di un'accelerazione **costante e uniforme** $\boldsymbol{a} = (0, a)$, con a = 2.0 m/s^2. Si sa che all'istante iniziale t_0 = 0 esso si trova nell'origine del sistema di riferimento con una velocità di modulo v_0 = 10 m/s diretta nel verso positivo dell'asse *X*.
   a) Quanto vale il **modulo** della velocità v' che l'oggetto possiede all'istante t' = 10 s? [Ricordate che la velocità, in generale, è un vettore!]
   v' = …………………………………… ~ ……… m/s $(v_0^2+a^2t'^2)^{1/2}$ ~ 22 m/s [deve essere $v' = (v'_X{}^2+v'_Y{}^2)^{1/2}$. Poiché l'accelerazione è diretta lungo Y, tenendo conto delle condizioni iniziali si ha $v'_X = v_0$ e $v'_Y = at'$, da cui la soluzione]
   b) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione **tangenziale** a'_T che l'oggetto ha all'istante t' di cui sopra? [Ricordate il significato di accelerazione tangenziale come accelerazione del punto **nella direzione del suo moto**]
   a'_T = …………………………………… ~ ……… m/s^2 $a\sin\theta = atg\theta/(1+tg^2\theta)^{1/2} = a(at/v_0)/(1+(at/v_0)^2)^{1/2}$ ~ 1.8 m/s^2
   [l'oggetto ha sempre accelerazione $\boldsymbol{a}$, che, secondo il testo, è costante e uniforme e diretta lungo *Y*. Per rispondere al quesito occorre proiettare il vettore $\boldsymbol{a}$ nella direzione del moto all'istante t' . Tale direzione coincide con la direzione della velocità allo stesso istante, che può essere espressa usando l'angolo θ rispetto all'orizzontale come: $tg\theta = v'_Y/v'_X = at/v_0$. La proiezione del vettore $\boldsymbol{a}$ lungo tale direzione si ottiene moltiplicandone il modulo per $\sin\theta = tg\theta/(1+tg^2\theta)^{1/2}$, da cui la soluzione]

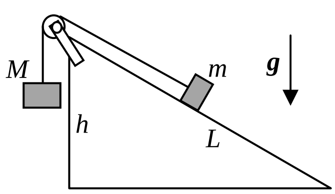
2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 50 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 1.0 m, il cui altro estremo è inchiodato a una parete verticale. L'intero sistema ha la configurazione di figura, dove sono indicati l'asse *Y* che **dovete** impiegare (verticale, diretto verso il basso e centrato all'estremità superiore della guida) e la distanza d fra chiodo che fissa la molla e guida, che vale $d = L_0$ = 1.0 m.



   a) Supponete per questa domanda che il manicotto possa muoversi lungo la guida con **attrito trascurabile**. Come si scrive l'equazione del moto del manicotto, $a(y)$? Come si scrive la funzione $N(y)$ che esprime il modulo della reazione vincolare esercitata dalla guida sul manicotto per una posizione generica y? [Nelle risposte **non** dovete utilizzare valori numerici, ma dovete limitarvi a esprimere funzioni della coordinata y del manicotto, rispetto all'asse *Y* di figura, mettendoci dentro le espressioni letterali dei dati noti del problema e usando il simbolo g per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   $a(y)$ = ………………………………… $g - (k/m)((L_0^2+y^2)^{1/2}-L_0)(y/(L_0^2+y^2)^{1/2})$ [il manicotto si muove sotto l'effetto della forza peso, mg , e della componente verticale della forza elastica. In corrispondenza a una posizione y generica del manicotto, la lunghezza della molla vale, per la geometria del sistema, $(y^2+L_0^2)^{1/2}$ (teorema di Pitagora!) e quindi il **modulo** della forza elastica è $k((y^2+L_0^2)^{1/2}-L_0)$. La componente verticale si ottiene proiettando tale forza lungo l'asse *Y*, cioè moltiplicandola per $-y/(y^2+L_0^2)^{1/2}$. dove il segno negativo tiene conto del verso e dell'orientazione dell'asse. Da qui si ottiene la soluzione]
   $N(y)$ = ………………………………… $k((L_0^2+y^2)^{1/2}-L_0)(L_0/(L_0^2+y^2)^{1/2})$ [la reazione vincolare serve a bilanciare la componente orizzontale della forza elastica, cioè a uguagliarne il modulo. La componente orizzontale si ottiene moltiplicando la forza elastica (trovata sopra) per $L_0/((L_0^2+y^2)^{1/2})$, da cui la soluzione]

   b) Supponete che la configurazione descritta ammetta una posizione di **equilibrio** y_{EQ} per il manicotto (supponete vuol dire che **non** dovete determinarla, ma solo sapere che ce ne è almeno una). Immaginate poi che, a differenza della situazione considerata nella domanda precedente, la guida sia **scabra** e che il manicotto subisca attrito statico con coefficiente di attrito **statico** μ_S = 0.50. Quanto vale, in modulo, la forza di attrito F_{AS} quando il manicotto si trova nella posizione y_{EQ} (sempre che si tratti ancora di una posizione di equilibrio)? Come si fa in questo caso a determinare la (o le) possibili posizioni di equilibrio in presenza di questo attrito? Discutete per benino in brutta!
   F_{AS} = ………………………………… = ……….. N 0 [la forza di attrito statico si oppone al moto del manicotto in direzione verticale. Nella posizione indicata, che era di equilibrio, forza peso e componente verticale della forza elastica si annullano, per cui non c'è alcuna forza che provoca movimento. Dunque l'attrito deve essere nullo!]
   Discussione: ………………………………… la forza di attrito statico vale, **al massimo**, $F_{ASMAX} = \mu_S N(y)$ dove la funzione $N(y)$ è stata determinata sopra. Finché la risultante di forza peso e forza elastica in direzione verticale (questa risultante si ottiene dalla risposta data prima, moltiplicando per m l'equazione del moto $a(y)$, cioè $F_Y = ma(y)$) è minore, in modulo, della forza di attrito si ha equilibrio. La condizione dà luogo a un intervallo di posizioni, i cui estremi possono essere individuati risolvendo la complicata equazione algebrica $F_{ASMAX} = F_Y$ (se volete provarci, fatelo pure!)

3. Una (piccola) cassa di massa m = 6.0 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo un piano inclinato di altezza h = 2.0 m e lunghezza L = 4.0 m. Alla cassa è annodata una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è vincolato ad un oggetto di massa M = 8.0 kg. La fune passa per la gola di una puleggia di **massa trascurabile** e si suppone che



essa, nel suo **eventuale** movimento, non slitti sulla superficie laterale della puleggia. La puleggia, che può ruotare con **attrito trascurabile** attorno al proprio asse, è attaccata alla sommità del piano inclinato attraverso un giogo, come rappresentato in figura: notate che la fune, nel tratto che va dalla puleggia alla cassa, è parallela al piano inclinato. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Quanto vale l'accelerazione a dell'oggetto di massa M? [Per il segno, fate riferimento a un asse verticale diretto verso il basso]

a = …………………………………… = ……….. m/s^2 $g(M-mh/L)/(M+m)$ = 3.5 m/s^2 [l'equazione del moto dell'oggetto nel riferimento specificato è $a = g-T/M$, con T modulo della tensione della fune. L'equazione del moto della cassa, scritta in un riferimento parallelo al piano e orientato verso l'alto (cosicché l'accelerazione della cassa è anche a , di modulo e segno uguale a quello dell'oggetto, essendo la fune inestensibile) è $a = -g\sin\theta+T/m$, con $\sin\theta = h/L$. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo per a si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale, in **modulo**, la forza F che il giogo esercita sulla puleggia?

F = …………………………………… ~ ……….. N

$(T^2\cos^2\theta+(T\sin\theta+T)^2)^{1/2}=T(2(1+h/L))^{1/2}=mMg(1+h/L)(2(1+h/L))^{1/2}/(M+m)$ ~ 87 N [la puleggia è ovviamente in equilibrio. Su di essa agiscono le due tensioni della fune, di direzione una parallela al piano inclinato e l'altra verticale (entrambe sono orientate "verso il basso"). Infatti, affinché la fune non slitti sulla puleggia, è necessario che essa trasferisca alla puleggia stessa delle forze uguali in modulo alla tensione T della fune e orientate come la fune. Queste forze devono essere bilanciate dalla forza F , il cui modulo, quindi, deve essere uguale al modulo della somma **vettoriale** delle due tensioni. Dalla soluzione al quesito precedente si sa che $T = M(g-a)= mMg(1+h/L)/(M+m)$. Per calcolare il modulo della somma **vettoriale** è utile notare che la tensione nel tratto di collegamento dalla puleggia all'oggetto ha solo componente verticale, mentre la tensione del tratto di fune che va dalla puleggia alla cassa ha componente verticale $T\sin\theta = Th/L$ e componente orizzontale $T\cos\theta = T(1-\sin^2\theta)^{1/2} = T(1-h^2/L^2)^{1/2}$. Da qui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 20/11/2009 Firma:

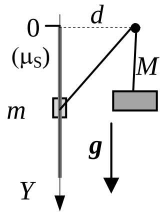
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 1 - 20/11/2009

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

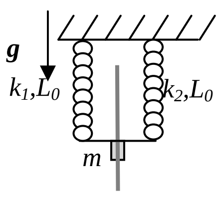
1. Un oggetto puntiforme si muove sul piano orizzontale compiendo una traiettoria **circolare** di raggio R (incognito) con accelerazione **angolare** α **costante e uniforme** (incognita). Si sa che all'istante t' = 1.0 s il **modulo** della sua accelerazione vale a' = 1.0 m/s^2 , mentre all'istante t'' = 2.0 s il modulo della sua accelerazione è a'' = 2.0 m/s^2.
   a) Quanto vale l'accelerazione angolare α? [Ricordate che l'accelerazione, in generale, è un vettore!]
   α = …………………………………… ~ ………. rad/s^2 $(3/(t''^4-4t'^4))^{1/2}$ = 0.50 rad/s^2 [in un moto circolare l'accelerazione è un vettore che ha due componenti ortogonali tra loro; conviene fare riferimento alle componenti radiali e tangenziali che in modulo sono: $a_R = a_{centr} = \omega^2 R$ e $a_T = \alpha R$. Poiché il moto è uniformemente accelerato, si ha $\omega(t) = \alpha t$, dove si è tenuto conto della condizione iniziale sulla velocità. Ricordando significato ed espressione del modulo di un vettore (teorema di Pitagora!), deve essere: $a' = (a_R'^2+a_T^2)^{1/2}$, per cui $a' = R\alpha(1+\alpha^2 t'^4)^{1/2}$ e $a'' = Ra(1+a^2 t''^4)^{1/2}$. Dunque il rapporto vale: $a''/a'=((1+\alpha^2 t''^4)/(1+\alpha^2 t'^4))^{1/2}$. Risolvendo questa equazione algebrica si trova la soluzione]

   b) Quanto vale il raggio dell'orbita R?
   R = …………………………………… ~ ………. m $a'/(\alpha(1+\alpha^2 t'^4))^{1/2}$ ~ 1.8 m [dalla soluzione del quesito precedente si trova $a' = R\alpha(1+\alpha^2 t'^4)^{1/2}$ da cui, sostituendo il valore di α appena determinato, si trova la risposta]



2. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg può scorrere lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a una fune inestensibile di massa trascurabile che, dopo essere passata su un perno molto sottile conficcato in una parete verticale, termina con una massa M (incognita). La fune scorre **con attrito trascurabile** sul perno e l'intero sistema ha la configurazione di figura, dove sono indicati l'asse Y che **dovete** impiegare (verticale, diretto verso il basso e centrato all'estremità superiore della guida) e la distanza d fra perno e guida, che vale d = 1.0 m. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Supponete per questa domanda che il manicotto possa muoversi lungo la guida con **attrito trascurabile**. Sapendo che la posizione di equilibrio del manicotto, misurata nel sistema di riferimento indicato, è $y_{EQ} = d$, quanto vale la massa M? E quanto vale, all'equilibrio, il modulo della reazione vincolare N che la guida esercita sul manicotto?
   M = …………………………………… ~ ………. kg $md/(d^2+d^2)^{1/2} = m2^{1/2}$ ~ 2.8 kg [dovendo essere in equilibrio anche la massa M , la tensione della fune vale in modulo $T = Mg$. Tenendo conto della geometria del sistema, si ha che la componente verticale della tensione della fune per una posizione y generica $y>0!$) si esprime come $T_Y=-Ty/(y^2+d^2)$. All'equilibrio deve essere $mg+T_Y = 0$, da cui la soluzione]
   N = …………………………………… ~ ………. N $Mgd/(d^2+d^2)^{1/2} = Mg2^{1/2} = \cancel{2}mg = \cancel{39}$ N [la reazione vincolare serve a equilibrare le forze in direzione orizzontale; tali forze sono date dalla componente orizzontale della tensione della fune, che si esprime come $T_X = Td/(d^2+y^2)^{1/2}$ (si è scelto un asse X orientato verso destra), da cui, usando le considerazioni svolte nella risposta al quesito precedente, si trova la risposta]

   b) Immaginate ora che, a differenza della situazione considerata nella domanda precedente, la guida sia **scabra** e che il manicotto subisca attrito **statico** con coefficiente di attrito μ_S = 0.50. Quanto vale, in modulo, la forza di attrito F_{AS} quando il manicotto si trova nella posizione $y_{EQ} = d$ (sempre che si tratti ancora di una posizione di equilibrio)? Quale o quali sono le possibili posizioni di equilibrio? Discutete per benino in brutta!
   F_{AS} = …………………………………… = ……….. N 0 [la forza di attrito statico si oppone al moto del manicotto in direzione verticale. Nella posizione indicata, che era di equilibrio, forza peso e componete verticale della tensione della fune si annullano, per cui non c'è alcuna forza che provoca movimento. Dunque l'attrito deve essere nullo!]
   Discussione: …………………………………… la forza di attrito statico vale, **al massimo**, $F_{ASMAX} = \mu_S N = \mu_S Mgd/(d^2+y^2)^{1/2}$ (essendo la situazione di equilibrio, si ha sempre $T = Mg$). Questa forza si oppone al moto del corpo, che avviene sotto l'effetto della risultante verticale delle forze, il cui **modulo** è $|mg-Mgy/(d^2+y^2)^{1/2}|$ (è bene prendere in considerazione il modulo, perché il movimento potrebbe avvenire verso l'alto o verso il basso a seconda dello scostamento verso il basso o verso l'alto rispetto alla posizione di equilibrio y_{EQ}). Si vede allora che esiste un intervallo di posizioni attorno a y_{EQ} all'interno del quale si continua ad avere equilibrio. Cerchiamo gli estremi di questo intervallo: essi sono dati dalle soluzioni dell'equazione algebrica: $F_{ASMAX}=\mu_S Mgd/(d^2+y^2)^{1/2} = \pm(mg-Mgy/(d^2+y^2)^{1/2})$, dove il segno ± si riferisce rispettivamente a $y > y_{EQ}$ e $y < y_{EQ}$. La soluzione di queste equazioni algebriche del secondo ordine fornisce la risposta al problema.



3. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 10 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Il manicotto è vincolato a un'asta orizzontale di massa trascurabile, a cui sono attaccate due molle di massa trascurabile, lunghezza di riposo L_0 = 2.0 m e costanti elastiche rispettivamente k_1 = 40 N/m e k_2 = 1.2x10^2 N/m. Gli altri estremi delle molle sono attaccati a un solaio rigido come rappresentato in figura. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

a) Quanto vale, all'**equilibrio**, l'allungamento Δ_0 delle due molle? [Notate che, a causa della guida e del fatto che le due lunghezze di riposo sono uguali, l'allungamento deve essere lo stesso per le due molle]

Δ_0 = ... = ... m $mg/(k_1+k_2) = 0.61$ m   [all'equilibrio la somma delle due forze elastiche deve uguagliare in modulo la forza peso, cioè $mg = k_1\Delta + k_2\Delta$, da cui la soluzione]

b) Agendo con una qualche perturbazione esterna (ad esempio una manina che sposta la massa e lo lascia andare, oppure che ci dà un colpettino), il manicotto viene messo in oscillazione. Durante l'oscillazione si osserva che l'allungamento massimo delle molle vale Δ_{MAX} = 81 cm. Quanto vale, in modulo, la massima velocità v_{MAX} che il manicotto raggiunge durante il suo moto oscillatorio?

v_{MAX} = ... = ... m/s $((k_1+k_2)/m)^{1/2}(\Delta_{MAX}-\Delta_0) = 0.80$ m/s   [scegliendo un asse verticale Y orientato, ad esempio, verso il basso e centrato sul solaio, l'equazione del moto del manicotto si scrive: $a(y) = -((k_1+k_2)/m)(y-L_0)+g$. Questa equazione del moto ammette soluzione armonica del tipo : $y(t) = C\cos(\omega t+\phi)+y_{EQ}$ a cui corrisponde la legge oraria per la velocità $v(t) = -\omega C\sin(\omega t+\phi)$, con $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$. Esprimendo la posizione in funzione dell'allungamento o compressione della molla $\Delta(t)$, che è ovviamente dato da $\Delta(t)=y(t)-\Delta_0$ e notando che $y_{EQ} = L_0+\Delta_0$, si ha $\Delta(t) = C\cos(\omega t+\phi)+\Delta_0$. Il dato del problema significa che, al massimo, cioè quando $\omega t+\phi = 2n\pi$, con $n = 0,1,\ldots$, si ha $\Delta(t) = \Delta_{MAX}$, da cui si deduce $C = \Delta_{MAX}-\Delta_0$. La massima velocità (in modulo) si ha per $|\sin(\omega t + \phi)| = 1$ (il manicotto passa per la posizione di equilibrio) e vale $v_{MAX} = \omega C$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 20/11/2009   Firma: