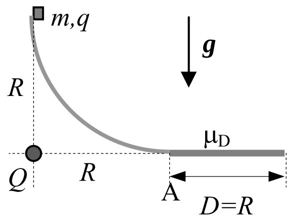
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 18/12/2009

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme di massa m (nota) si muove con attrito trascurabile su un piano orizzontale sotto l'azione di una forza **conservativa e disuniforme $\boldsymbol{F}$** , le cui componenti dipendono dalle coordinate x, y dell'oggetto secondo le funzioni: $F_X = Ax^2+B$; $F_Y = Cy$, dove A, B, C sono costanti (note) opportunamente dimensionate. Si sa che a un certo istante l'oggetto passa per l'origine del sistema di riferimento XY avendo una velocità di modulo (noto) v_0, e che a un istante successivo esso passa per il punto di coordinate x_1, y_1 (note) con velocità di modulo v_1. [Supponete che la dinamica dell'oggetto sia determinata solo dalla forza $\boldsymbol{F}$]
   a) Quanto vale v_1? [Ovviamente non dovete dare risultati numerici, ma esprimere la soluzione in funzione dei parametri letterali noti del problema; ricordate che, per $n \neq -1$, è $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, con ξ variabile generica]
   v_1 = …………………………………… $(v_0^2+(2/m)((A/3)x_1^3+Bx_1+(C/2)y_1^2)^{1/2}$ [essendo la dinamica dell'oggetto determinata dalla sola forza conservativa $\boldsymbol{F}$ **,** si ha conservazione dell'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K = (m/2)(v_1^2-v_0^2)$, mentre per definizione è $\Delta U = -L = -\int_0^{r1}\boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{r} = -(\int_0^{x1}F_X dx+\int_0^{y1}F_Y dy)$, da cui, risolvendo gli integrali, si ottiene la soluzione]

2. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g che reca una carica elettrica q = 2.0x10^{-5} C può muoversi lungo una guida rigida e indeformabile che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 2.5 m e si trova, fissa, su un piano verticale. Come mostrato in figura, l'arco di circonferenza è raccordato con un tratto piano e orizzontale: l'arco di circonferenza presenta attrito **trascurabile**, mentre il tratto orizzontale è **scabro** e presenta un attrito **dinamico** con coefficiente μ_D (incognito). Nella posizione indicata in figura (corrispondente alla proiezione sull'asse orizzontale della "sommità" dell'arco di circonferenza, dove l'asse orizzontale ha direzione e quota del tratto orizzontale) si trova, **fissa nello spazio**, una carica puntiforme Q = --q (la carica Q è "uguale e opposta" a q). Inizialmente l'oggetto si trova fermo alla "sommità" dell'arco come in figura, a causa di un operatore esterno (una manina) che lì lo tiene; ad un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l'accelerazione di gravità, il valore κ_E = 9.0x10^9 N m^2/C^2 per la costante del campo elettrico; può farvi comodo ricordare che, per $n \neq -1$, è $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, con ξ generica]



   a) Quanto vale, in **modulo,**, la velocità v' con cui l'oggetto raggiunge "il termine" dell'arco di circonferenza, cioè passa per il punto A di figura?
   v' = ……………………………..=........... m/s $(2gR)^{1/2}$ = 7.0 m/s [durante la discesa lungo l'arco di circonferenza sull'oggetto non agiscono forze dissipative, e dunque si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$, con $\Delta E_K = (m/2)v'^2$ (parte da fermo) e $\Delta U = \Delta U_G + \Delta U_E$, dove si tiene in debito conto la presenza delle due forze conservative, peso ed elettrica, che sono le uniche che compiono lavoro. Si ha immediatamente $\Delta U_G = -mgR$, essendo R la variazione di quota. Inoltre è $\Delta U_E = -L_E = -\int_0^A \boldsymbol{F_E}\bullet d\boldsymbol{r} = -q\int_0^A \boldsymbol{E_Q}\bullet d\boldsymbol{r}$, dove 0 ed A indicano rispettivamente posizione iniziale e "finale" del processo considerato. Usando un sistema di riferimento sferico (o polare) centrato sulla carica Q, l'espressione del campo elettrico prodotto dalla carica puntiforme Q è: $\boldsymbol{E_Q} = (\kappa_E Q/R^2)\boldsymbol{R}$, con $\boldsymbol{R}$ versore di direzione radiale. Nell'integrale di linea compare dunque un prodotto scalare $\boldsymbol{R}\bullet d\boldsymbol{r} = dR$, che significa, in pratica, che delle tante direzioni possibili di $d\boldsymbol{r}$ abbiamo "selezionato" (ovvero proiettato) solo quelle che hanno componenti radiali rispetto al sistema di riferimento considerato. Dal punto di vista pratico, questa scelta significa che, come percorso per passare dalla posizione iniziale alla posizione A fatto di due tratti radiali (nella direzione dei raggi uscenti dalla posizione della carica Q), che in pratica corrispondono rispettivamente a un tratto verticale e uno orizzontale. Dunque, tenendo anche conto del fatto che $Q = -q$, si ottiene: $\Delta U_E = \kappa_E q^2 \int_R^R (1/R^2)dR$. Fate attenzione al fatto che gli estremi di integrazione, che corrispondono alle distanze dalla carica Q all'inizio e alla "fine" del processo, sono identici! Infatti, sia all'inizio che alla "fine" la carica q si trova a distanza R rispetto alla carica Q. Di conseguenza il lavoro del campo elettrico, ovvero la variazione di energia potenziale elettrostatica, sono nulli e il campo elettrico non influisce affatto sulla dinamica dell'oggetto. Intuitivamente ciò corrisponde a notare che la carica Q, che attrae q, per metà del percorso accelera la carica q e per l'altra metà la "decelera". Con il senno di poi, è evidente che lo stesso risultato si otterrebbe anche considerando uno spostamento tangenziale, su un arco di circonferenza di raggio R centrato sulla posizione della carica Q: in questo caso la forza elettrica non farebbe lavoro essendo sempre ortogonale allo spostamento. Insomma, ci sono molti buoni motivi per rendersi conto che la configurazione studiata conduce a un lavoro, ovvero una differenza di potenziale, nullo. Da qui si ottiene la soluzione, che è ovviamente la stessa che si avrebbe in assenza della carica Q]
   b) Si osserva quindi che, dopo essere transitato per il punto A, l'oggetto si muove per un tratto $D = R$ = 2.5 m lungo il piano orizzontale scabro, e poi si ferma. Quanto vale il coefficiente di attrito μ_D?
   μ_D = ……………………………..= .... $(mgR-\kappa_E q^2/(2R))/(mgR) = 1-\kappa_E q^2/(2mgR^2)$ = 0.41 [il bilancio energetico, ovvero il teorema dell'energia cinetica, o delle forze vive, stabilisce che $L_A = \Delta E_K+\Delta U$. Applichiamo il bilancio considerando come situazione iniziale quella in cui l'oggetto passa per il punto A e come situazione finale quella in cui si è fermato; di conseguenza si ha $\Delta E_K = -(m/2)v'^2 = -mgR$. Inoltre, poiché non c'è variazione di quota, è $\Delta U = \Delta U_E = -L_E = \kappa_E q^2 \int_R^{2R}(1/R^2)dR = -\kappa_E q^2(1/(2R)-1/R) = \kappa_E q^2/(2R)$, dove abbiamo fatto tesoro e sfruttato quanto affermato nella soluzione al punto precedente. Il lavoro della forza di attrito è $L_A = -\mu_D mgR$ (la forza di attrito dinamico è costante e uniforme e sempre opposta allo spostamento, e notate che la forza elettrica, essendo diretta lungo la congiungente delle due cariche, che è orizzontale nel caso considerato, non modifica il valore di N rispetto al caso senza Q). Mettendo insieme tutti i pezzi del bilancio energetico e risolvendo per μ_D si ottiene la soluzione]

3. Due carrellini (puntiformi!) di massa rispettivamente $m_1 = m/4$ e $m_2 = m$, con m = 0.50 kg, si muovono con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. I due carrellini sono collegati da una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 10 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm (in pratica le due estremità della molla sono vincolate ai due carrelli); l'asse della molla rimane sempre parallelo all'asse X. All'istante t_0 = 0 i due carrellini si muovono con velocità $\boldsymbol{v_{01}}$ e $\boldsymbol{v_{02}}$ dirette **entrambe** nel verso positivo dell'asse X e di modulo rispettivamente $v_{01} = 2v_0$ e $v_{02} = v_0$, con v_0 = 1.0 m/s. Inoltre si sa che, all'istante t_0, le

coordinate dei due carrellini sono rispettivamente x_{01} = 0 (il carrellino 1 sta passando per l'origine dell'asse) e $x_{02} = L_0$. Con il passare del tempo il carrellino 1 si avvicina al 2 e la molla si comprime fino a raggiungere la compressione massima Δ_{MAX}.

a) Quanto vale, in modulo, la compressione massima della molla, Δ_{MAX}?

Δ_{MAX} = …………………………………… = …….. m $(m/(5k))^{1/2}v_0 = 0.10$ m [i due carrellini formano un sistema per la presenza dell'interazione elastica prodotta dalla molla. Tale sistema è isolato lungo l'asse X, non essendoci forze esterne in questa direzione; dunque si conserva la quantità di moto totale in direzione X, cioè $m_1v_{01}+m_2v_{02} = m_1v_1+m_2v_2$, essendo v_1 e v_2 le velocità dei due carrellini in un istante generico (attenzione: sono le componenti orizzontali delle velocità rispetto al riferimento considerato). Inoltre, non agendo forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, cioè, tenendo conto che inizialmente la molla è "scarica" (la distanza fra i carrelli è la lunghezza della molla, che inizialmente è pari alla lunghezza di riposo!): $(m_1/2)v_{01}^2 + (m_2/2)v_{02}^2 = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + (k/2)\Delta^2$, dove abbiamo tenuto in debito conto dell'espressione dell'"energia" potenziale elastica, che dipende quadraticamente dalla compressione (o estensione) della molla. La condizione di massima compressione, ovvero minima distanza relativa tra i carrellini, si ottiene quando $v_1 = v_2 = v$. Dunque, tenendo anche conto delle relazioni tra masse e tra velocità date nel testo, la conservazione della quantità di moto si scrive:; $(3/2)mv_0 = (5/4)mv$, da cui $v = (6/5)v_0$. La conservazione dell'energia meccanica diventa invece: $(m/4)4v_0^2+mv_0^2=2mv_0^2=(5/4)mv^2 + k\Delta_{MAX}^2 = (5/4)m((6/5)v_0^2)+k\Delta_{MAX}^2$, da cui, con qualche altro ulteriore passaggio algebrico, si trova la soluzione]

b) Quanto vale l'istante t' in cui la molla raggiunge (per la prima volta) la massima compressione Δ_{MAX}?

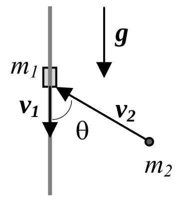
t' = …………………………………… ~ ……….. s $\pi/(2\omega) = \pi/(2(5k/m)^{1/2}) \sim 0.16$ s [essendo il sistema isolato (lungo X), si può descrivere il moto relativo dei due carrellini attraverso l'equazione del moto relativo: $a_{REL} = a_2\text{-}a_1 = F^{INT}/\mu$, con $1/\mu = 1/m_1+1/m_2 = 5/m$ (l'ultimo passaggio deriva dalla relazione tra le masse data nel testo). La forza interna è ovviamente quella elastica che, detta L la lunghezza della molla (a un istante generico), si scrive $F^{INT} = -k(L-L_0)$. Per la geometria del sistema, è evidente che $L = x_2 - x_1$, e d'altra parte per definizione è $a_{REL} = d^2(x_2-x_1)/dt^2$. Dunque il moto **relativo** è armonico, con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2} = (5k/m)^{1/2}$. L'istante iniziale, t_0 = 0, corrisponde alla posizione di equilibrio di questo moto (la molla è "scarica"); l'istante t', che corrisponde alla massima compressione della molla, si raggiunge dopo che è trascorso un intervallo pari a $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

c) Quanto valgono all'istante t' (in cui la molla si trova alla massima compressione Δ_{MAX}) le **coordinate** x_1' e x_2' dei due carrellini? [La soluzione può essere algebricamente complicata: cercate almeno di impostarla correttamente!]

x_1' = …………………………………… ~ ……….. m $(6v_0t'+4\Delta_{MAX})/5 \sim 0.27$ m [il modo più semplice per rispondere consiste nel considerare il moto del centro di massa e il moto relativo. Essendo il sistema isolato (lungo X), il centro di massa si muove con velocità costante e uniforme, sempre pari al valore iniziale: $v_{CM} = (m_1v_{01}+m_2v_{02})/(m_1+m_2) = ((3/2)mv_0)/((5/4)m) = (6/5)v_0$ (come è logico, questa velocità è proprio la velocità comune ai due carrellini nell'istante di massimo avvicinamento, che abbiamo già calcolato prima). La posizione iniziale del centro di massa è, dalla definizione di posizione del centro di massa, $x_{CM0} = m_2L_0/(m_1+m_2) = (4/5)L_0$. La posizione del centro di massa all'istante t' sarà allora $x_{CM}' = x_{CM0}+v_{CM}t' = (4L_0+6v_0t')/5$. D'altra parte, sempre per la definizione di posizione del centro di massa, dovrà anche essere: $x_{CM}' = (m_1x_1'+m_2x_2')/(m_1+m_2) = x_1'/5 + 4x_2'/5$. Inoltre sappiamo che $x_2'-x_1' = L' = L_0-\Delta_{MAX}$. Abbiamo quindi ottenuto un sistema di due equazioni lineari con le due incognite x_1' e x_2', che, risolto per x_1', fornisce la soluzione]

x_2' = …………………………………… ~ ……….. m $x_1'+L_0-\Delta_{MAX} \sim 0.97$ m [vedi sopra]

4. Un manicotto di massa $m_1 = m$ = 2.0 kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale. Ad un certo istante il manicotto si muove verso il basso con velocità di modulo v_1 = 1.2 m/s; in questo stesso istante (ovvero immediatamente dopo) nel manicotto si conficca un proiettile di massa $m_2 = m/5$ che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità $\mathbf{v_2}$ diretta come in figura (il proiettile arriva "dal basso" e l'angolo, misurato rispetto alla verticale, vale $\theta = \pi/3$) e di modulo $v_2 = 5v_1$. [Tenete in debito conto che il processo di urto è praticamente **istantaneo**; ricordate che $cos(\pi/3)$ = ½ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Quanto vale la velocità v' con cui il sistema manicotto+proiettile (conficcato) si muove **subito dopo** l'urto?

v' = …………………………………… = …….. m/s $(5/6)(1\text{-}cos\theta)v_1 = 5v_1/12 = 0.50$ m/s [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione verticale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne così dirette in grado di produrre variazioni della quantità di moto. Infatti le forze peso che agiscono sui due oggetti sono per loro natura non impulsive, e quindi non modificano la quantità di moto del sistema nel breve intervallo temporale dell'urto. Pertanto deve essere: $m_1v_1\text{-}m_2v_2cos\theta = mv_1(1\text{-}cos\theta) = (m_1+m_2)v' = (6/5)mv'$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/12/2009 Firma:

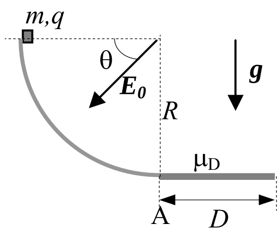
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 18/12/2009

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

1. Un oggetto puntiforme di massa m si muove con attrito trascurabile lungo l'asse X sotto l'effetto di una forza **conservativa** $\boldsymbol{F}$ unidimensionale (cioè diretta lungo lo stesso asse X) a cui è associata l'energia potenziale $U(x) = Ax^3+Bx^2+C$, con A, B, C costanti (note) opportunamente dimensionate, tutte e tre positive. [Supponete che non ci siano altre forze all'infuori di $\boldsymbol{F}$]
   a) Quali sono le posizioni di equilibrio x_{EQ} dell'oggetto? A quale tipo di equilibrio (stabile, instabile, indifferente) corrispondono? Discutete per benino in brutta. [Ovviamente non dovete dare risultati numerici, ma esprimere la soluzione in funzione dei parametri letterali noti del problema; ricordate che, per $n \neq -1$, è $d\xi^n/d\xi = n\xi^{n-1}$, con ξ variabile generica]
   x_{EQ} = …………………, ………………… $x_{EQ} = 0$ e $x_{EQ} = -2B/(3A)$ [si ha equilibrio quando la forza, ovvero l'accelerazione, è nulla. Energia potenziale e forza sono legate fra loro, nel caso unidimensionale, dalla relazione $F(x) = - dU(x)/dx$. Eseguendo la derivazione e imponendo che la forza sia nulla si ottengono le due soluzioni]
   Discussione: …………………, ………………… $(v_0^2+(2/m)((A/2)x_1^2+Bx_1+(C/3)y_1^3))^{1/2}$ [le posizioni di equilibrio corrispondono a punti di massimo o minimo della funzione energia potenziale. Eseguendo un rapido studio della funzione $U(x)$ si ottiene che $x_{EQ} = 0$ è una posizione di minimo (relativo), per cui l'equilibrio è stabile (cioè spostandosi di poco attorno a questa posizione la forza tende a riportare l'oggetto nella posizione di equilibrio, e infatti la forza cambia segno attorno a $x = 0$, diventando negativa per $x > 0$ e positiva altrimenti). Invece la posizione $x_{EQ} = -2B/(3A)$ è di massimo (relativo), corrispondente a una posizione di equilibrio instabile. Infatti al diminuire di x rispetto a questa posizione la forza diventa negativa, e positiva altrimenti, per cui l'oggetto si allontana dalla posizione di equilibrio]

2. Un oggetto puntiforme di massa m = 50 g che reca una carica elettrica $q = 2.0\times10^{-3}$ C può muoversi lungo una guida rigida e indeformabile che ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio R = 2.5 m e si trova, fissa, su un piano verticale. Come mostrato in figura, l'arco di circonferenza è raccordato con un tratto piano e orizzontale: l'arco di circonferenza presenta attrito **trascurabile**, mentre il tratto orizzontale è **scabro** e presenta un attrito **dinamico** con coefficiente μ_D (incognito). In **tutta la regione di interesse** agisce un campo elettrico esterno $\boldsymbol{E_0}$, **uniforme e costante** , di modulo $E_0 = 7.0\times10^2$ N/C diretto come indicato in figura (l'angolo vale $\theta = \pi/4$). Inizialmente l'oggetto si trova fermo alla "sommità" dell'arco, a causa di un operatore esterno (una manina) che lì lo tiene; ad un dato istante l'oggetto viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s^2 per l'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!!

   a) Quanto vale, in **modulo,**, la velocità v' con cui l'oggetto raggiunge "il termine" dell'arco di circonferenza, cioè passa per il punto A di figura?
   v' = ……………………………..=.......... m/s $(2gR)^{1/2}$ = 7.0 m/s [durante la discesa lungo l'arco di circonferenza sull'oggetto non agiscono forze dissipative, e dunque si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$, con $\Delta E_K = (m/2)v'^2$ e $\Delta U = \Delta U_G + \Delta U_E$, dove si tiene in debito conto la presenza delle due forze conservative, peso ed elettrica, che sono le uniche che compiono lavoro. Si ha immediatamente $\Delta U_G = -mgR$, essendo R la variazione di quota. Inoltre è $\Delta U_E = -L_E = -\int_0^A \boldsymbol{F_E}\bullet d\boldsymbol{r} = -q\int_0^A \boldsymbol{E_0}\bullet d\boldsymbol{r}$, dove 0 ed A indicano rispettivamente posizione iniziale e "finale" del processo considerato. Il calcolo dell'integrale di linea si può fare in modo semplice usando un sistema di riferimento cartesiano con asse X orizzontale e asse Y verticale, che supponiamo centrato ad esempio nel punto di partenza (la sommità dell'arco). In questo riferimento le componenti del campo elettrico sono: $E_X = -E_0\cos\theta$; $E_Y = -E_0\sin\theta$ (i segni negativi sono dovuti alla scelta del riferimento e al fatto che E_0 indica un modulo). La posizione di partenza ha coordinate $(0,0)$ e quella "finale" ha coordinate $(R,-R)$. In questo riferimento l'integrale di linea si scrive in questo modo: $L_E = q(\int_0^R E_X dx + \int_0^{-R} E_Y dy) = -qE_0(R\cos\theta - R\sin\theta) = 0$, dato che $\sin\theta = \cos\theta$. Operativamente, calcolare l'integrale in questo modo equivale a passare dal punto di partenza a quello di arrivo lungo una spezzata con due lati (di uguale lunghezza), rispettivamente paralleli all'asse X e all'asse Y. Dal punto di vista intuitivo, si noti che il campo elettrico accelera il moto verticale e decelera quello orizzontale, con un effetto netto nullo, data la configurazione del sistema. La soluzione è allora ovvia, ed è la stessa che si otterrebbe in assenza di campo elettrico]
   b) Si osserva quindi che, dopo essere transitato per il punto A, l'oggetto si muove per un tratto D = 1.0 m lungo il piano orizzontale scabro, e poi si ferma. Quanto vale il coefficiente di attrito μ_D? [Tenete conto che il campo elettrico continua a fare i suoi effetti, se li fa, anche quando l'oggetto si muove sul piano, dato che esso è presente in tutta la regione di interesse]
   μ_D = ……………………………..~ .... $(mgR-qE_0\cos\theta D)/((mg+qE_0\sin\theta)D) \sim 0.16$ [il bilancio energetico, ovvero il teorema dell'energia cinetica, o delle forze vive, stabilisce che $L_A = \Delta E_K + \Delta U$. Applichiamo il bilancio considerando come situazione iniziale quella in cui l'oggetto passa per il punto A e come situazione finale quella in cui si è fermato; di conseguenza si ha $\Delta E_K = -(m/2)v'^2 = -mgR$. Inoltre, poiché non c'è variazione di quota, è $\Delta U = \Delta U_E = -L_E = qE_0\cos\theta D$, dove si è notato (vedi anche la risposta al quesito precedente) che il campo elettrico è uniforme e che la sua componente nella direzione dello spostamento (asse X) vale $-qE_0\cos\theta$. Il lavoro della forza di attrito è $L_A = -\mu_D ND$ (la forza di attrito dinamico è costante e uniforme e sempre opposta allo spostamento), dove $N = mg+qE_0\sin\theta$ (la reazione vincolare deve opporsi alla risultante di tutte le forze in direzione verticale). Dunque si trova $L_A = -\mu_D(mg+qE_0\sin\theta)D$. Mettendo insieme tutti i pezzi del bilancio energetico e risolvendo per μ_D si ottiene la soluzione]

3. Due carrellini (puntiformi!) di massa rispettivamente $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$, con m = 0.50 kg, si muovono con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. I due carrelli sono collegati da una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 3.0 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 0.50 m (in pratica le due estremità della molla sono vincolate ai due carrelli); l'asse della molla rimane sempre parallelo all'asse X. All'istante $t_0 = 0$ il carrellino di massa m_1 è fermo all'origine del sistema di riferimento, mentre il carrellino di massa m_2 passa per la coordinata $x_{02} = L_0$ con una velocità di modulo v_0 = 0.90 m/s diretta nel

verso positivo dell'asse X. Con il passare del tempo, si osserva che il carrellino 2 si allontana dal carrellino 1 e la molla si estende fino a raggiungere (per la prima volta) l'estensione massima Δ_{MAX}.

a) Quanto vale, in modulo, l'estensione massima della molla, Δ_{MAX}?

Δ_{MAX} = …………………………………… = …….. m $(2m/(3k))^{1/2}v_0 = 0.30$ m [i due carrellini formano un sistema per la presenza dell'interazione elastica prodotta dalla molla. Tale sistema è isolato lungo l'asse X, non essendoci forze esterne in questa direzione; dunque si conserva la quantità di moto totale in direzione X, cioè $m_1v_{01}+m_2v_{02} = m_1v_1+m_2v_2$, essendo v_1 e v_2 le velocità dei due carrellini in un istante generico (attenzione: sono le componenti orizzontali delle velocità rispetto al riferimento considerato). Inoltre, non agendo forze dissipative, si conserva l'energia meccanica, cioè, tenendo conto che inizialmente la molla è "scarica" (la distanza fra i carrelli è la lunghezza della molla, che inizialmente è pari alla lunghezza di riposo!): $(m_1/2)v_{01}^2 + (m_2/2)v_{02}^2 = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + (k/2)\Delta^2$, dove abbiamo tenuto in debito conto dell'"energia" potenziale elastica, che dipende quadraticamente dall'estensione (o compressione) della molla. La condizione di massima compressione, ovvero minima distanza relativa tra i carrellini, si ottiene quando $v_1 = v_2 = v$. Dunque, tenendo anche conto delle relazioni tra masse e tra velocità date nel testo, la conservazione della quantità di moto si scrive:; $2mv_0 = 3mv$, da cui $v = (2/3)v_0$. La conservazione dell'energia meccanica diventa invece: $(m/2)4v_0^2=(3/2)mv^2 + (k/2)\Delta_{MAX}^2$, da cui, con qualche altro ulteriore passaggio algebrico, si trova la soluzione]

b) Quanto vale l'istante t' in cui la molla raggiunge (per la prima volta) la massima estensione Δ_{MAX}?

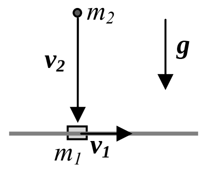
t' = …………………………………… ~ ………… s $\pi/(2\omega) = \pi/(2(3k/(2m))^{1/2}) \sim 0.52$ s [essendo il sistema isolato (lungo X), si può descrivere il moto relativo dei due carrellini attraverso l'equazione del moto relativo: $a_{REL} = a_2-a_1 = F^{INT}/\mu$, con $1/\mu = 1/m_1+1/m_2 = 3/(2m)$ (l'ultimo passaggio deriva dalla relazione tra le masse data nel testo). La forza interna è ovviamente quella elastica che, detta L la lunghezza della molla (a un istante generico), si scrive $F^{INT} = -k(L-L_0)$. Per la geometria del sistema, è evidente che $L = x_2 - x_1$, e d'altra parte per definizione è $a_{REL} = d^2(x_2-x_1)/dt^2$. Dunque il moto **relativo** è armonico, con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2} = (3k/(2m))^{1/2}$. L'istante iniziale, $t_0 = 0$, corrisponde alla posizione di equilibrio di questo moto (la molla è "scarica"); l'istante t', che corrisponde alla massima cestensione della molla, si raggiunge dopo che è trascorso un intervallo pari a $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

c) Quanto valgono all'istante t' le **coordinate** x_1' e x_2' dei due carrellini? [La soluzione può essere algebricamente complicata: cercate almeno di impostarla correttamente!]

x_1' = …………………………………… ~ ………… m $(2/3)(v_0t'-\Delta_{MAX}) \sim 0.11$ m [il modo più semplice per rispondere consiste nel considerare il moto del centro di massa e il moto relativo. Essendo il sistema isolato (lungo X), il centro di massa si muove con velocità costante e uniforme, sempre pari al valore iniziale: $v_{CM} = m_2v_0/(m_1+m_2) = 2mv_0/(3m) = (2/3)v_0$ (come è logico, questa velocità è proprio la velocità comune ai due carrellini nell'istante di massimo allontanamento, che abbiamo già calcolato prima). La posizione iniziale del centro di massa è, dalla definizione di posizione del centro di massa, $x_{CM0} = m_2L_0/(m_1+m_2) = (2/3)L_0$. La posizione del centro di massa all'istante t' sarà allora $x_{CM}' = x_{CM0}+v_{CM}t' = (2/3)(L_0+v_0t')$. D'altra parte, sempre per la definizione di posizione del centro di massa, dovrà anche essere: $x_{CM}' = (m_1x_1'+m_2x_2')/(m_1+m_2) = x_1'/3 + 2x_2'/3$. Inoltre sappiamo che $x_2'-x_1' = L' = L_0+\Delta_{MAX}$. Abbiamo quindi ottenuto un sistema di due equazioni lineari con le due incognite x_1' e x_2', che, risolto per x_1', fornisce la soluzione]

x_2' = …………………………………… ~ ………… m $x_1'+L_0+\Delta_{MAX} \sim 0.91$ m [vedi sopra]

4. Un manicotto di massa $m_1 = m = 2.0$ kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Ad un certo istante il manicotto si muove verso "destra" con velocità di modulo $v_1 = 1.0$ m/s; in questo stesso istante (ovvero immediatamente dopo) nel manicotto si conficca un proiettile di massa $m_2 = m/6$ che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità $\mathbf{v_2}$ diretta verticalmente verso il basso, come mostrato in figura, e di modulo $v_2 = 3v_1$.



a) Quanto vale la variazione ΔE_{KTOT} di energia cinetica **totale** del sistema manicotto+proiettile (conficcato) nel processo? [Considerate la differenza tra l'energia cinetica totale subito dopo e subito prima l'urto]

ΔE_{KTOT} = …………………………………… = …….. J $-(23/28)mv_1^2 = 1.6$ J [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione orizzontale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne così dirette in grado di produrre variazioni della quantità di moto. Di conseguenza si conserva la quantità di moto totale del sistema lungo questa direzione, cioè $m_1v_1 = (m_1+m_2)V = (7/6)mV$, da cui $V = (6/7)v_1$, con V velocità del sistema dopo l'urto. La variazione di energia cinetica si calcola dalla definizione, cioè è $\Delta E_{KTOT} = ((m_1+m_2)/2)V^2-((m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2) = (7/12)mV^2- (5/2)mv_1^2$. Sostituendo l'espressione di V data dalla conservazione della quantità di moto si ottiene il risultato. Il valore ottenuto è ovviamente negativo, dato che parte dell'energia cinetica totale del sistema finisce in energia di altra forma (calore, deformazione plastica, etc.) nel processo di penetrazione e arresto del proiettile all'interno del manicotto]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/12/2009 Firma:

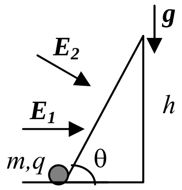
Corso di Laurea Ing. EA – PROVA DI VERIFICA n. 2 - 18/12/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Siete invitati a riportare i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. ***Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione***

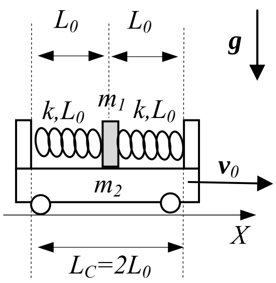
1. Un oggetto puntiforme di massa m (nota) si muove con attrito trascurabile su un piano orizzontale essendo vincolato (ad esempio tramite una guida) a percorrere una traiettoria rettilinea che passa per la **bisettrice** (III-I quadrante) del piano. Sull'oggetto agiscono **due** distinte forze **conservative** $\boldsymbol{F_1}$ ed $\boldsymbol{F_2}$, dirette rispettivamente lungo l'asse X e lungo l'asse Y del riferimento considerato. $\boldsymbol{F_1}$ ha modulo **costante e uniforme**, di valore uguale ad A (noto); $\boldsymbol{F_2}$, invece, è **disuniforme** e dipende dalla coordinata y secondo la funzione: $F_2(y) = By^2$, con B costante (nota) opportunamente dimensionata. Si sa che a un certo istante l'oggetto passa per l'origine del sistema di riferimento XY avendo una velocità di modulo (noto) v_0, e che a un istante successivo esso si trova a distanza d (nota) dall'origine avendo una velocità di modulo v_1. [La distanza è ovviamente misurata lungo la bisettrice del piano; inoltre supponete che la dinamica dell'oggetto sia determinata solo dalla forza $\boldsymbol{F}$]
   a) Quanto vale v_1? [Ovviamente non dovete dare risultati numerici, ma esprimere la soluzione in funzione dei parametri letterali noti del problema; ricordate che, per $n \neq -1$, è $\int \xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$, con ξ variabile generica]
   v_1 = …………………………………… $((2/m)((Ad^{1/2}+(B/3)d^{3/2}+v_0^2)^{1/2}$ [essendo la dinamica dell'oggetto determinata dalle sole forze conservative $\boldsymbol{F_{1,2}}$ si ha che si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_K = (m/2)(v_1^2-v_0^2)$, mentre per definizione è $\Delta U = -L = -\int_0^d (\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_2}) \bullet d\boldsymbol{r} = -(\int_0^{x1} F_1 dx + \int_0^{y1} F_2 dy)$, in cui, essendo il moto diretto lungo la bisettrice, si ha $x1 = y1 = d^{1/2}$. Risolvendo gli integrali si ottiene la soluzione]

2. Un punto materiale di massa m = 80 g reca una carica elettrica q = 2.0x10^{-3} C. Inizialmente tale punto si trova **fermo** alla base di un piano inclinato di altezza h = 20 cm che forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Ad un dato istante vengono simultaneamente e istantaneamente accesi due campi elettrici esterni **uniformi e costanti** $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E_2}$, entrambi di modulo E_0 = 7.0x10^2 N/C e agenti sull'intera regione di interesse. Le direzioni dei campi sono quelle indicate in figura: in particolare, $\boldsymbol{E_1}$ è orizzontale, mentre $\boldsymbol{E_2}$ è ortogonale al piano inclinato. In seguito all'accensione dei campi elettrici si osserva che il punto sale lungo il piano inclinato. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3)$ = ½]



   a) Considerate per questa domanda che il punto materiale possa muoversi sul piano inclinato con **attrito trascurabile**. Quanto vale, in **modulo**, la velocità v' con cui il punto arriva alla sommità del piano inclinato, se ci arriva?
   v' = …………………………………… ~ ……… m/s $(-2gh+2qE_0h/(mtg\theta))^{1/2} \sim$ 0.35 m/s [non sono presenti forze dissipative e dunque si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta E_K + \Delta U$. Si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2$ (il punto parte da fermo), mentre la variazione di energia potenziale è dovuta sia alla variazione di quota, $\Delta U_G = mgh$, che alla variazione di energia potenziale elettrostatica, ΔU_E. Poiché il moto avviene in direzione ortogonale al campo $\boldsymbol{E_2}$, questo non partecipa alla variazione di energia, che è solo $\Delta U_E = -qE_0h/tg\theta$, dove si è notato che campo elettrico (e quindi forza) sono costanti e uniformi e che la proiezione dello spostamento nella direzione del campo vale $Lcos\theta = h/tg\theta$ (la lunghezza del piano inclinato è $L = h/sin\theta$). Da qui si ottiene la soluzione]
   b) Immaginate ora che il punto si muova invece sul piano inclinato subendo **attrito dinamico** con coefficiente μ_D = 0.80. Quanto vale, in questo caso, il **modulo** della velocità v'' con cui il punto arriva alla sommità del piano inclinato, se ci arriva?
   v'' = …………………………………… ~ ………… m/s non arriva alla sommità [in questo caso conviene applicare il bilancio energetico nella forma $L_A = \Delta E_K + \Delta U$. I termini al secondo membro sono ovviamente gli stessi calcolati prima. Il lavoro della forza di attrito F_A si ottiene moltiplicando la forza per la lunghezza del piano, $L = h/sin\theta$; infatti tale forza è costante e uniforme ed è diretta in verso opposto allo spostamento. Si ha $F_A = \mu_D N = \mu_D(mgcos\theta + qE_1 sin\theta + qE_2) = \mu_D(mgcos\theta + qE_0(sin\theta+1))$, dove si è tenuto conto del fatto che la reazione vincolare, di modulo N, deve essere uguale e opposta alla componente normale rispetto al piano della somma di tutte le forze che agiscono sul punto materiale. In definitiva si ottiene: $L_A = -\mu_D Nh/sin\theta = -\mu_D h(mgtg\theta + qE_0(1+1/sin\theta)$. Risolvendo numericamente il bilancio energetico per l'incognita v'' si osserva che la soluzione comporta di estrarre la radice quadrata di una grandezza negativa. Questo vuol dire che, nelle nuove condizioni, la massa m non arriva sulla sommità del piano inclinato, anzi, più correttamente, essa non si mette neanche in movimento, essendo la risultante delle forze "attive" (la proiezione della forza elettrica dovuta al campo $\boldsymbol{E_1}$ lungo la direzione del piano) minore in modulo della risultante delle forze che si oppongono al moto, cioè la forza di attrito e la componente della forza peso lungo la direzione del piano]

3. Un oggetto **puntiforme** di massa $m_1 = m/4$ può scorrere con **attrito trascurabile** sul piano di un carrellino di massa $m_2 = m$, con m = 0.50 kg, il quale può a sua volta muoversi con **attrito trascurabile** lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. Come rappresentato in figura, il carrellino è dotato di due sponde rigide, a cui sono vincolate due molle di massa trascurabile, identiche fra loro e con costante elastica k = 5.0 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 50 cm; gli "altri due" estremi di queste molle sono uniti all'oggetto (**puntiforme**!) di massa m_1. L'asse delle due molle rimane sempre parallelo all'asse X e la lunghezza del piano del carrellino è $L_C = 2L_0$. All'istante t_0 = 0 il carrellino si sta muovendo nel verso positivo dell'asse X con velocità di modulo v_0 = 1.0 m/s mentre la velocità dell'oggetto, misurata rispetto all'asse X (fisso), è nulla. Inoltre si sa che in questo istante l'oggetto si trova nel punto di mezzo del piano, cioè ad una distanza $L_C/2=L_0$ dalle due sponde. Con il passare del tempo, l'oggetto si avvicina alla sponda "di sinistra" (rispetto alla figura), fino a raggiungere una distanza minima d_{MIN} da essa.



   a) Quanto vale, in modulo, la distanza minima d_{MIN} tra oggetto e sponda "di sinistra"?
   d_{MIN} = …………………………………… = …….. m $L_0-(m/(10k))^{1/2}v_0$ = 0.40 m [le due masse formano un sistema per la presenza dell'interazione elastica prodotta dalle molle. Tale sistema è isolato lungo l'asse X, non essendoci forze esterne in questa direzione; dunque si conserva la quantità di moto totale in direzione X, cioè $m_1v_{01}+m_2v_{02} = m_1v_1+m_2v_2$, essendo v_1 e v_2 le velocità delle due masse in un istante generico (attenzione: sono le componenti orizzontali delle velocità rispetto al riferimento considerato). Inoltre, non agendo forze

dissipative, si conserva l'energia meccanica, cioè: $(m_1/2)v_{01}^2 + (m_2/2)v_{02}^2 = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 + \Delta U_{ELA}$. La variazione di energia elastica è dovuta alle due molle che si comprimono (quella "di sinistra") o si estendono (quella "di destra"). Notate che, a causa della geometria del sistema, la compressione della molla "di sinistra" è uguale all'estensione della molla "di destra", dato che $L_C = 2L_0$. Tenendo conto che l'"energia" potenziale elastica di una molla dipende quadraticamente dalla compressione (o estensione) della molla stessa e ricordando che le energie si sommano (algebricamente), è facile determinare $\Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta^2 + (k/2)\Delta^2 = k\Delta^2$. Inoltre è evidente dalla geometria che la distanza dalla sponda "di sinistra" può essere espressa come $d = L_0 - \Delta$ La condizione di minima distanza dalla sponda corrisponde evidentemente alla massima compressione della molla "di sinistra" e massima estensione di quella "di destra", cioè $d_{MIN} = L_0 - \Delta_{MAX}$ Questa situazione si ottiene quando $v_1 = v_2 = v$. Dunque, tenendo anche conto delle relazioni tra masse date nel testo, la conservazione della quantità di moto si scrive:; $mv_0 = (5/4)mv$, da cui $v = (4/5)v_0$. La conservazione dell'energia meccanica diventa invece: $(m/2)v_0^2 = (5/4)(m/2)v^2 + k\Delta_{MAX}^2$; usando l'espressione di v data dalla conservazione della quantità di moto e riarrangiando si ottiene $k\Delta_{MAX}^2 = (m/2)v_0^2(1-(5/4)(16/25)) = mv_0^2/10$. Da qui, tenendo conto della relazione tra d_{MIN} e Δ_{MAX} , si trova la soluzione]

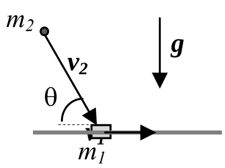
b) Quanto vale l'istante t' in cui si l'oggetto raggiunge (per la prima volta) la distanza minima d_{MIN} rispetto alla sponda "di sinistra"? [Può farvi comodo ricordare che le due molle considerate (collegate in parallelo) danno luogo allo stesso comportamento elastico di una singola molla dotata di costante elastica "efficace" $k' = 2k$ e lunghezza di riposo L_0]

t' = ... ~ .... s $\pi/(2\omega) = \pi/(2(10k/m)^{1/2}) \sim 0.16$ s [essendo il sistema isolato (lungo X), si può descrivere il moto relativo delle due masse attraverso l'equazione del moto relativo: $a_{REL} = a_2 - a_1 = F^{INT}/\mu$, con $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 = 5/m$ (l'ultimo passaggio deriva dalla relazione tra le masse data nel testo). La forza interna è ovviamente quella elastica esercitata dalle due molle. Detta L la lunghezza della molla "di sinistra" (a un istante generico), la lunghezza della molla "di destra" sarà, per la geometria del sistema, pari a $2L_0 - L$. Quindi la forza elastica complessiva si scrive $F^{INT} = -k(L-L_0) + k(2L_0 - L - L_0) = -2k(L-L_0)$, che dimostra quanto scritto nel suggerimento del testo. Se chiamiamo x_1 la posizione della sponda "sinistra" del carrello (a un istante generico), è evidentemente $L = x_2 - x_1$.D'altra parte per definizione è $a_{REL} = d^2(x_2 - x_1)/dt^2$. Dunque il moto **relativo** è armonico, con pulsazione $\omega = (2k/\mu)^{1/2} = (10k/m)^{1/2}$. L'istante iniziale, $t_0 = 0$, corrisponde alla posizione di equilibrio di questo moto (le molle sono "scariche"); l'istante t', che corrisponde alla massima compressione di una molla e alla massima estensione dell'altra. si raggiunge dopo che è trascorso un intervallo pari a $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale lo spostamento Δx_2 che il carrello compie nell'intervallo di tempo fra t_0=0 e l'istante t' determinato alla soluzione del punto precedente? [Fate attenzione: il problema è simile, ma non identico, a quelli svolti in classe!]

Δx_1 = ... ~ .... m $(4v_0t' + L_0 - d_{MIN})/5 \sim$ 0.15 m [il modo più semplice per rispondere consiste nel considerare il moto del centro di massa e il moto relativo. Essendo il sistema isolato (lungo X), il centro di massa si muove con velocità costante e uniforme, sempre pari al valore iniziale: $v_{CM} = (m_1v_{01} + m_2v_{02})/(m_1+m_2) = (4/5)v_0$ (come è logico, questa velocità è proprio la velocità comune alle due masse nell'istante di massimo avvicinamento, che abbiamo già calcolato prima). Dunque il centro di massa del sistema si sposta (in direzione X) del tratto $\Delta x_{CM} = v_{CM}t' = (4/5)v_0t'$. Tenendo presente la definizione di posizione del centro di massa e la circostanza che le masse rimangono costanti, deve essere $\Delta x_{CM} = (m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)/(m_1+m_2) = (\Delta x_1 + 4\Delta x_2)/5$. D'altronde lo spostamento **relativo** dell'oggetto rispetto al carrello vale $-\Delta_{MAX} = -(L_0 - d_{MIN})$, dove il segno negativo tiene conto del verso dello spostamento. Quindi, tenendo conto che il carrello si sposta di un tratto Δx_2 (incognito!), si ha $\Delta x_1 = \Delta x_2 - L_0 + d_{MIN}$. Sostituendo questa espressione nella precedente equazione e risolvendo si ottiene la soluzione]

4. Un manicotto di massa $m_1 = m$ = 2.0 kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione orizzontale. Inizialmente il manicotto si muove con velocità $\boldsymbol{v_1}$ diretta nel verso positivo dell'asse X (parallelo alla guida) e di modulo v_1 = 0.80 m/s. Ad un dato istante nel manicotto si conficca un proiettile di massa $m_2 = m/5$ che impatta sul manicotto avendo, subito prima dell'urto, la velocità $\boldsymbol{v_2}$ diretta come in figura (il proiettile proviene "da sinistra" e l'angolo indicato, misurato rispetto all'orizzontale, vale $\theta = \pi/3$) e di modulo $v_2 = 5v_1$. [Ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]



a) Quanto vale la velocità v' con cui il sistema manicotto+proiettile (conficcato) si muove subito dopo l'urto?

v' = ... = …….. m/s $(5/6)(1+cos\theta)v_1 = 5v_1/4 =$ 1.0 m/s [considerando la situazione subito dopo e quella subito prima dell'urto, si ha che il sistema proiettile e manicotto è isolato lungo la direzione orizzontale, che è quella di moto, non essendoci forze esterne così dirette. Pertanto deve essere: $m_1v_1 + m_2v_2cos\theta = mv_1(1+cos\theta) = (m_1+m_2)v' = (6/5)mv'$, da cui la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/12/2009 Firma: